数理解析研究所講究録
第133巻 1972年 48-52

球面の商多様体について

奈良女 理　上部 恒知

§.1. 有限群の球面への free operation.

どんな有限群がなん次元の球面にどのような free operation を持つか，という問題については多くの研究者により次に列挙するような結果が得られている。

(1) $Z_p \oplus Z_p$ はどんな球面にも free に作用できない。(P.A.Smith)

(2) 有限群 G が S^n (cohomology の形が S^n と同じでよい) に free に作用すれば $H^*(G)$ は $(n+1)$ の周期をもつ。(フランス学派)

(3) 周期的 cohomology をもつ有限群はある球面の homotopy type をもつ C.W. 複体に free に作用できる。(R.Swan)

(4) G が球面に free に作用すれば，G の order 2 の元は G の center に属する。(J.Milnor)

(5) $Z_{(p,q;r)} = \{x, y \mid x^p = y^q = e,\ yxy^{-1} = x^r\}$

は，p が奇数，q が奇素数のとき $\Sigma \in \theta_{2n-1}(\partial\pi)$（parallelizable 多様体の境界で S^{2n-1} の homotopy type をもつ多様体，特に $S^{2n-1} \in \theta_{2n-1}(\partial\pi)$）に free，微分可能に作用できる。　（T. Petrie）

以上の結果は主に"どんな有限群が球面に free に作用しうるか"という問題に限ったものである。(2) は (1) を意味し，(1) より有限群論よりかかる群の p-Sylow 群は次の可能性しかもたない。

$$\begin{cases} p=2 \text{ のとき，} & \text{巡回群 か 四元数群.} \\ p=\text{奇素数のとき，} & \text{巡回群.} \end{cases}$$

p-sylow 群がすべて巡回群である有限群（以後 Z-group と呼ぶ）に制限しても問題は open である。(4), (5) は type $Z(p,q;r)$ $\begin{cases} p: \text{奇素数} \\ q: \text{素数} \end{cases}$ の場合の解になり $Z(p,2;r)$ 形だけが free に作用できぬことを示している。

§2. 商多様体の K-環

Z-group が free に作用してできる商多様体の K-環について述べよう。$f: S^{2n-1} \times G \to S^{2n-1}$ を free operation，$\kappa: G \to U(m)$ を表現とするとき，$S^{2n-1}/G, f$ 上の m-次元 vector bundle $\alpha_f(\kappa)$ を次のように定義する。κ の表現加群を M_κ とするとき，G は $S^{2n-1} \times M_\kappa$ 上に

$(x, v)\cdot g = (f(x,g),\ g^{-1}v)$ で作用する，$x \in S^{2n-1}$，$v \in M_K$，$g \in G$。この商空間を $S^{2n-1}\times_G M_K$ とするとき，自然な写像 $\pi : S^{2n-1}\times_G M_K \to S^{2n-1}/G, f$ は vector bundle である。これは K の同値類に対して well-defined であるから，これを $\alpha_f(K)$ で記す。α_f は自然に準同型：$\alpha_f ; R(G) \to K(S^{2n-1}/G, f)$ に拡張される。次の定理は M.F. Atiyah の定理の系として得られる。

定理. $f : S^{2n-1}\times G \to S^{2n-1}$ は free かつ微分可能な作用とする。このとき，α_f は上への準同型である。さらに $H^*(G)$ が表現の chern class ($h : E_G \to B_G$ を G の分類空間とするとき，$c(\alpha_h(K)) = C(K) \in H^*(B_G) = H^*(G)$ で定義される) で生成されゝば，kernel $\alpha_f = R_n^\gamma(G)$ である。こゝで ideal $R_n^\gamma(G)$ は $R(G)$ の γ-operation による filtration である。

Z-group G に対して，$H^*(G)$ は chern class により生成されることが証明される。上の定理により，

定理 G を Z-group，$f : S^{2n-1}\times G \to S^{2n-1}$ を free かつ微分可能な作用とするとき；$K(S^{2n-1}/G, f) \cong R(G)/R_n^\gamma(G)$.

この定理から $K(S^{2n-1}/G, f)$ の group extension を決

めることは一般には困難である。今Gのp-Sylow subgroupをG_pとするとき，自然な写像π; $S^{2n-1}/G_p, f|G_p \longrightarrow S^{2n-1}/G, f$により誘導される準同型 $\pi^!$; $K(S^{2n-1}/G, f) \to K(S^{2n-1}/G_p, f|G_p)$ は中へのp-componentの同型である。$G_p = Z_{p^8}$のときの$K(S^{2n-1}/Z_{p^8})$のgroup extensionはF. Suzukiにより決定された。

§.3. 商多様体のtangent bundle.

実表現$\kappa : G \to SO(m)$に対して§.2と同様にして定義されるm-次実vector bundleを$\beta(\kappa)$で記す。$x \in \widetilde{KO}(S^{2n-1}/G, f)$に対して $x + \theta_k \cong \beta(\kappa)$ を満す最小のkをxの代数的次元と呼び，alg. dim xと記す。

定理. $f : S^{2n-1} \times G \to S^{2n-1}$をfree微分可能な作用とするとき，　alg. dim $(\tau(S^{2n-1}/G, f) - \theta_{2n-1}) < \infty$.

上の定理より，いかなる代数的次元をもつ作用fが有り得るか興味ある問題である。次の定理は，$S^{2n-1}/G, f$でfが変わるとき，そのstable tangent bundleがJ-invariantであることを示す。

定理. M_1, M_2をコンパクト，弧状連結，次元nの多様体とする。もし$J(\tau(M_i)) \in J(M_i)$のp-componentで写像$f_{i,j} : M_i \to M_j$で $(f_{i,j})_* : H_n(M_i : Z_p) \cong H_n(M_j : Z_p)$

$(f_{1,2})'(f_{2,1})' = id\ \tilde{J}(M_2)$ の p-component なるものが存在すれば，$(f_{1,2})'(\tilde{J}(\tau(M_2))) = \tilde{J}(\tau(M_1))$，ここに bundle ξ に対し $\tilde{J}(\xi)$ はその J-stable 類を表わす。

この定理を素数位数の巡回群 Z_p に適用して，

定理. $n < p^{[n-1/p-1]}$ のとき

$$\text{alg.dim}\,(\tau(S^{2n-1}/Z_p,+) - \theta_{2n-1}) = 2n + 2s\,p^{[n-1/p-1]}$$

$$0 \leqq s \leqq p(p-1)/2.$$

この定理の系として.

定理. pを奇素数とする。このとき $n>p$ に対し $S^{2n-1}/Z_p,+$ は S-parallélizable でない。$n \leqq p$ のときは，S-parallelizable である必要十分条件は $P(\tau(S^{2n-1}/Z_p,+)) = 1$ なることである。 $p=2$ のときは $n=1,3,7$ のときに限り S-parallelizable である。

以上の結果の証明等については下記に与えられる。

(1) T. Kambe et Fukue Suzuki ; K-anneau de la variété quotient de sphère par Z-group. (à paraître)

(2) T. Kambe ; La caractérisation du fibré tangent des variétés S^{2n-1}/Z_p. (à paraître)

(3) T. Kambe ; Fibrés vectoriels sur S^{2n-1}/Z_p (à paraître)