

ある種の時間依存的な
非線形発展方程式について

電気通信大 渡辺 二郎

§1. 定理

H を実ヒルベルト空間, φ を H から $(-\infty, +\infty]$ への下半連続 proper 凸関数とする. φ が proper であるとは, φ の effective domain $\{u \in H \mid \varphi(u) < +\infty\}$ が空でないことである. H から H への多価写像 $\partial\varphi$ を次のように定義する:

$$\partial\varphi(u) = \{w \in H \mid \varphi(v) \geq \varphi(u) + (w, v-u) (\forall v \in H)\}.$$

その定義域は $D(\partial\varphi) = \{u \in H \mid \partial\varphi(u) \neq \emptyset\}$ である.

次の (I) - (V) を仮定する ([4], [1] 参照).

(I) $T > 0$ とする. 各 $t \in [0, T]$ に対して, H から $(-\infty, +\infty]$ への下半連続 proper 凸関数 φ^t が与えられ, φ^t の effective domain D は t に無関係である.

(II) 各 $r > 0$ に対して, $c_r, c'_r > 0$ が存在して

$$|\varphi^s(u) - \varphi^t(u)| \leq |s - t| \cdot [c_r \cdot \varphi^t(u) + c'_r] \\ (0 \leq \forall s, \forall t \leq T, \|u\| \leq r \text{ なる } \forall u \in D).$$

(III) ある $b \in D$ が存在して, $b \in D(\partial\varphi^t)$ (a. a. $t \in [0, T]$) かつ $\|\partial\varphi^t(b)^\circ\|$ は $0 \leq t \leq T$ で可積分とする. ただし, $\partial\varphi^t(b)^\circ$ は閉凸集合 $\partial\varphi^t(b)$ の中のノルム最小の元を表わす.

(IV) f は $[0, T] \times H$ から H への連続写像であり, $[0, T] \times H$ の有界集合の f による像は H で有界である.

(V) ある実数 c_0 が存在して

$$(f(t, u) - f(t, v), u - v) \leq c_0 \|u - v\|^2 \quad (\forall u, v \in H).$$

定理. (I) - (V) を仮定する. 任意の $a \in D$ に対して, 次の i), ii) をみたす $u \in C([0, T]; H)$ と $y \in L^2(0, T; H)$ が一意的に存在する:

i) $u(t) \in D$ ($\forall t \in (0, T]$), $u(t) \in D(\partial\varphi^t)$ (a. a. $t \in [0, T]$) かつ $y(t) \in \partial\varphi^t(u(t))$ (a. a. $t \in [0, T]$).

$$ii) u(t) + \int_0^t y(\sigma) d\sigma = a + \int_0^t f(\sigma, u(\sigma)) d\sigma \quad (0 \leq t \leq T).$$

注意 1. 定理の u は

$$u' + \partial\varphi^t(u) \ni f(t, u) \quad (0 \leq t \leq T), \quad u(0) = a$$

の genuine solution である ([5] をみよ).

注意 2. (I) - (V) を仮定する. 任意の $a \in \bar{D}$ (D の閉包)

に対して, 定理の i) と次の ii) をみたす $u \in C([0, T]; H)$ と $[0, T]$ 上の強可測関数 y が一意的に存在することとを証明できる:

$$\begin{cases} \text{ii) 任意の } s \in (0, T] \text{ に対して } y \in L^2(s, T; H) \text{ かつ} \\ u(t) + \int_s^t y(\sigma) d\sigma = u(s) + \int_s^t f(\sigma, u(\sigma)) d\sigma \quad (0 < \forall s \leq \forall t \leq T) \\ u(0) = a. \end{cases}$$

§2. $\partial\varphi$ の吉田近似

H から $(-\infty, +\infty]$ への下半連続 proper 凸関数 φ と $\partial\varphi$ の近似に関する基本的事項を要約する. これらは本質的に Moreau [6] により得られたものである.

$\partial\varphi$ は monotone であることは容易にわかる.

$$\Phi_\lambda(u, v) = \varphi(v) + \|u - v\|^2 / (2\lambda) \quad (\forall \lambda > 0, \forall u, \forall v \in H)$$

とおく. 各 $\lambda > 0$ と各 $u \in H$ に対して関数 $v \rightarrow \Phi_\lambda(u, v)$ が最小値をとる点が一意的に存在する. この点を $J_\lambda^\varphi u$ とかく:

$$(2.1) \quad \Phi_\lambda(u; J_\lambda^\varphi u) \leq \Phi_\lambda(u, v) \quad (\forall \lambda > 0, \forall u, \forall v \in H).$$

(2.1) から次の (2.2) を得るのは容易である:

$$(2.2) \quad (\partial\varphi)_\lambda u \equiv (u - J_\lambda^\varphi u) / \lambda \in \partial\varphi(J_\lambda^\varphi u) \quad (\forall \lambda > 0, \forall u \in H).$$

したがって $\partial\varphi$ は極大 monotone であり $J_\lambda^\varphi = (I + \lambda \cdot \partial\varphi)^{-1}$ ($\lambda > 0$) である. J_λ^φ が縮小的であることと $(\partial\varphi)_\lambda$ が monotone であることはよく知られている.

$$(2.3) \varphi_\lambda(u) = \varphi(J_\lambda^\varphi u) + \lambda \cdot \|(\partial\varphi)_\lambda u\|^2/2 \quad (\forall \lambda > 0, \forall u \in H)$$

と表す。(2.2)から、任意の $\lambda > 0$, $u, v \in H$ に対して

$$(2.4) \begin{aligned} & \Phi_\lambda(u, v) - \varphi_\lambda(u) \\ &= \varphi(v) - \varphi(J_\lambda^\varphi u) - (v - J_\lambda^\varphi u, (\partial\varphi)_\lambda u) + \frac{\|v - J_\lambda^\varphi u\|^2}{2\lambda} \\ &\geq \|v - J_\lambda^\varphi u\|^2 / (2\lambda). \end{aligned}$$

H から $(-\infty, +\infty]$ への関数 ψ の共役 ψ^* を

$$\psi^*(u) = \sup\{(u, v) - \psi(v) \mid v \in H\} \quad (\forall u \in H)$$

により定義する。下半連続 proper 凸関数 φ の共役 φ^* は下半連続 proper 凸関数である。 $u, v \in H$ に対して

$$(2.5) \quad v \in \partial\varphi(u) \iff \varphi(u) + \varphi^*(v) = (u, v)$$

はよく知られている。また、 $(\varphi_\lambda)^*(u) = \varphi^*(u) + \lambda \cdot \|u\|^2/2$

($\lambda > 0, u \in H$) は容易に確かめることができる。したがって

すべての $\lambda > 0$ と $u \in H$ に対して

$$\begin{aligned} & \varphi_\lambda(u) + (\varphi_\lambda)^*((\partial\varphi)_\lambda u) \\ &= \varphi(J_\lambda^\varphi u) + \varphi^*((\partial\varphi)_\lambda u) + \lambda \cdot \|(\partial\varphi)_\lambda u\|^2 \\ &= (J_\lambda^\varphi u, (\partial\varphi)_\lambda u) + \lambda \cdot \|(\partial\varphi)_\lambda u\|^2 \\ &= (u, (\partial\varphi)_\lambda u). \end{aligned}$$

ゆえに(2.5)から $(\partial\varphi)_\lambda u \in \partial(\varphi_\lambda)u$ 。したがって

$$(2.6) \begin{aligned} & 0 \leq \varphi_\lambda(v) - \varphi_\lambda(u) - (v - u, (\partial\varphi)_\lambda u) \\ & \leq (v - u, (\partial\varphi)_\lambda v - (\partial\varphi)_\lambda u) \\ & \leq \|v - u\|^2 / \lambda \quad (\forall \lambda > 0, \forall u, \forall v \in H). \end{aligned}$$

ゆえに φ_λ は $u \in H$ において微分可能 (Fréchet の意味) であり, その Fréchet 微分係数は $(\partial\varphi)_\lambda u$ である. したがって $\partial(\varphi_\lambda)u = \{(\partial\varphi)_\lambda u\}$. 今後, $(\partial\varphi)_\lambda$ の代りに $\partial\varphi_\lambda$ とかく.

§3. 関数 $t \rightarrow \partial\varphi_\lambda^t$ の連続性

補題 3.1. φ^1 と φ^2 は H から $(-\infty, +\infty]$ への下半連続 proper 凸関数とする. このとき任意の $\lambda > 0$ と $u \in H$ に対し

$$\begin{aligned} & \varphi_\lambda^1(u) - \varphi_\lambda^2(u) \\ & \leq \varphi^1(J_\lambda^{\varphi^2} u) - \varphi^2(J_\lambda^{\varphi^2} u) - \frac{\lambda}{2} \|\partial\varphi_\lambda^1(u) - \partial\varphi_\lambda^2(u)\|^2. \end{aligned}$$

証明. $[\varphi_\lambda^1(u) - \varphi_\lambda^2(u)] - [\varphi^1(J_\lambda^{\varphi^2} u) - \varphi^2(J_\lambda^{\varphi^2} u)]$

$$\begin{aligned} & = \varphi^1(J_\lambda^{\varphi^1} u) - \varphi^1(J_\lambda^{\varphi^2} u) + \frac{\lambda}{2} (\|\partial\varphi_\lambda^1(u)\|^2 - \|\partial\varphi_\lambda^2(u)\|^2) \\ & = \varphi^1(J_\lambda^{\varphi^1} u) - \varphi^1(J_\lambda^{\varphi^2} u) - (\partial\varphi_\lambda^1 u, J_\lambda^{\varphi^1} u - J_\lambda^{\varphi^2} u) + \\ & \quad + \frac{\lambda}{2} [\|\partial\varphi_\lambda^1(u)\|^2 - \|\partial\varphi_\lambda^2(u)\|^2 - 2(\partial\varphi_\lambda^1(u), \partial\varphi_\lambda^1(u) - \partial\varphi_\lambda^2(u))] \\ & \leq -\frac{\lambda}{2} \|\partial\varphi_\lambda^1(u) - \partial\varphi_\lambda^2(u)\|^2. \end{aligned}$$

補題 3.2. φ^1 と φ^2 は H から $(-\infty, +\infty]$ への下半連続 proper 凸関数とする. ある $x \in H$, ある $\delta > 0$, ある $\varepsilon > 0$, ある $\varepsilon' > 0$ とある $\eta \in (0, 1)$ に対し

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \|u - J_\lambda^{\varphi^1} x\| \leq \delta \text{ なら } \forall u \in H \text{ に対し} \\ \quad \varphi^2(u) \geq (1-\eta)\varphi^1(u) - \varepsilon, \\ \text{ii) } \varphi^2(J_\lambda^{\varphi^1} x) \leq \varphi^1(J_\lambda^{\varphi^1} x) + \varepsilon'. \end{array} \right.$$

$$\text{(iii)} \quad \delta^2/(2\lambda) \geq \varepsilon + \varepsilon' + \eta \cdot \Phi'_\lambda(x) \equiv \alpha$$

かゝる λ が存在するならば

$$\|2\Phi'_\lambda(x) - 2\Phi'_\lambda(x)\|^2 \leq 2\alpha/\lambda.$$

証明. $i=1, 2$ と $u \in H$ に対して

$$\Phi^i(u) = \Phi^i(u) + \|u - x\|^2/(2\lambda), \quad x_i = J_\lambda^{\Phi^i} x$$

とおく. (2.3) と (2.4) から

$$(3.1) \quad \Phi^i(u) \geq \Phi^i(x_i) + \|u - x_i\|^2/(2\lambda) \quad (i=1, 2; u \in H).$$

i) と ii) から

$$(3.2) \quad \Phi^2(u) \geq (1-\eta)\Phi^1(u) - \varepsilon \quad (\forall u \in H: \|u - x_1\| \leq \delta),$$

$$(3.3) \quad \Phi^2(x_1) \leq \Phi^1(x_1) + \varepsilon'.$$

$\|x_1 - x_2\| \leq \delta$ を証明する. $\|x_1 - x_2\| > \delta$ を仮定して矛盾を

導く. $\theta = \delta/\|x_1 - x_2\|$, $x_\theta = (1-\theta)x_1 + \theta x_2$ とおく.

$0 < \theta < 1$, $\|x_\theta - x_1\| = \delta$ である. (3.1), (3.2), (3.3) から

$$\begin{aligned} (1-\eta)\Phi^1(x_1) - \varepsilon &\leq (1-\eta)\Phi^1(x_\theta) - \varepsilon \leq \Phi^2(x_\theta) \\ &\leq (1-\theta)\Phi^2(x_1) + \theta\Phi^2(x_2) \\ &\leq (1-\theta)[\Phi^1(x_1) + \varepsilon] + \theta[\Phi^1(x_1) + \varepsilon' - \frac{\|x_1 - x_2\|^2}{2\lambda}]. \end{aligned}$$

これと iii) から

$$\frac{\delta^2}{2\lambda\theta} = \frac{\theta}{2\lambda} \|x_1 - x_2\|^2 \leq \varepsilon + \varepsilon' + \eta \cdot \Phi^1(x_1) \leq \frac{\delta^2}{2\lambda}.$$

ゆえに $\theta \geq 1$. 矛盾. ゆえに $\|x_1 - x_2\| \leq \delta$.

(3.1), (3.2), (3.3) から

$$\Phi^2(x_2) + \varepsilon \geq (1-\eta)\Phi^1(x_2) \geq (1-\eta)[\Phi^1(x_1) + \|x_1 - x_2\|^2/(2\lambda)]$$

および

$$\Phi^1(x_1) + \varepsilon' \geq \Phi^2(x_2) + \|x_1 - x_2\|^2/(2\lambda)$$

を得る。したがって

$$\varepsilon + \varepsilon' + \eta \cdot \Phi^1(x_1) \geq \frac{2-\eta}{2\lambda} \cdot \|x_1 - x_2\|^2 \geq \frac{1}{2\lambda} \cdot \|x_1 - x_2\|^2.$$

したがって

$$\|\partial\varphi_\lambda^1(x) - \partial\varphi_\lambda^2(x)\|^2 = \|x_1 - x_2\|^2/\lambda^2 \leq 2\alpha/\lambda.$$

命題 3.3. §1 の (I) と次の (II') を仮定する:

(II') $h(s, t)$ は $0 \leq s, t \leq T$ 上の非負値関数で, 各 $t \in [0, T]$ に対して $s \rightarrow h(s, t)$ は $[0, T]$ で連続であり, $h(t, t) = 0$ ($0 \leq t \leq T$) をみたす. また, 各 $r > 0$ に対して C_r と C_r' が存在して,

$$|\varphi^s(u) - \varphi^t(u)| \leq h(s, t) \cdot [C_r \cdot \varphi^t(u) + C_r']$$

$$(0 \leq \forall s, \forall t \leq T, \|u\| \leq r \text{ なる } \forall u \in D).$$

このとき各 $x \in H$ と各 $\lambda > 0$ に対して, $t \rightarrow \partial\varphi_\lambda^t(x)$ は $[0, T]$ において連続である.

さらに, もしある定数 $C > 0$ と $\alpha \in (0, 1]$ が存在して

$$(3.4) \quad h(s, t) \leq C \cdot |s - t|^\alpha \quad (0 \leq s, t \leq T)$$

であるならば, $t \rightarrow \partial\varphi_\lambda^t(x)$ は $[0, T]$ において $\alpha/2$ Hölder 連続である.

証明. $t \in [0, T]$ を1つとって固定し, $x_t = J_\lambda^{\varphi^t} x$ と
 かく. $r > \|x_t\|$ とする. (II) から

$$\varphi^s(u) \geq [1 - c_f \cdot h(s, t)] \cdot \varphi^t(u) - c_f \cdot h(s, t) \\ (0 \leq s, t \leq T, u \in D: \|u\| \leq r)$$

かつ

$$\varphi^s(x_t) \leq \varphi^t(x_t) + h(s, t) \cdot [c_r \cdot \varphi^t(x_t) + c_f].$$

したがって補題3.2により, s が十分 t に近いとき

$$(3.5) \quad \|\partial \varphi_\lambda^s(x) - \partial \varphi_\lambda^t(x)\|^2 \\ \leq (4/\lambda) \cdot h(s, t) \cdot [c_r \cdot \varphi^t(x_t) + c_f + \frac{\lambda}{4} c_r \cdot \|\partial \varphi_\lambda^t(x)\|^2].$$

したがって $s \rightarrow \partial \varphi_\lambda^s(x)$ は $s = t$ において連続である. t は
 任意であったからこれは $0 \leq s \leq T$ で連続である.

したがって, r として次のようにとれる:

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|x_t\| = \max_{0 \leq t \leq T} \|x - \lambda \cdot \partial \varphi_\lambda^t(x)\| < r.$$

したがって, (2.3) と補題3.1から $\sup\{\varphi^t(x_t) \mid 0 \leq t \leq T\} < \infty$. したがって, ある $M > 0$ が存在して, (3.5)
 により, 各 $t \in [0, T]$ に対して s が十分 t に近いとき

$$(3.6) \quad \|\partial \varphi_\lambda^s(x) - \partial \varphi_\lambda^t(x)\| \leq M \cdot h(s, t)^{1/2}.$$

h が (3.4) をみたすとき, (3.6) は $t \rightarrow \partial \varphi_\lambda^t(x)$ が $0 \leq t \leq T$ において $\alpha/2$ -Hölder 連続であることを示す.

§ 4. 定理の証明

§ 1 の (I) - (V) を仮定する. 命題 3.3 と $u \rightarrow \partial\varphi_\lambda^t(u)$ の Lipschitz 連続性により, 各 $\lambda > 0$ に対して, $[t, u] \rightarrow f(t, u) - \partial\varphi_\lambda^t(u)$ は $[0, T] \times H$ の上で連続であり, $[0, T] \times H$ の有界集合を H の有界集合に写像し, かつ (V) により

$$\begin{aligned} & ([f(t, u) - \partial\varphi_\lambda^t(u)] - [f(t, v) - \partial\varphi_\lambda^t(v)], u - v) \\ & \leq c_0 \cdot \|u - v\|^2 \quad (\forall u, \forall v \in H) \end{aligned}$$

をみたすから, 任意の $a \in D$ に対して

$$(4.0) \begin{cases} u'(t) + \partial\varphi_\lambda^t(u(t)) = f(t, u(t)), & 0 \leq t \leq T \\ u(0) = a. \end{cases}$$

の解 $u_\lambda \in C^1([0, T]; H)$ が一意的に存在する ([1] を見よ).

簡単のために, $y_\lambda(t) = \partial\varphi_\lambda^t(u_\lambda(t))$ とかく.

補題 4.1 $\sup\{\|u_\lambda(t)\| \mid \lambda > 0, 0 \leq t \leq T\} < \infty.$

証明.

$u_\lambda'(t) + y_\lambda(t) = f(t, u_\lambda(t))$ ($0 \leq t \leq T$), $u_\lambda(0) = a$ から容易に, すべての $t \in [0, T]$ に対して

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_\lambda(t) - b\|^2 \\ & = (f(t, u_\lambda) - y_\lambda, u_\lambda - b) \\ & = ([f(t, u_\lambda) - f(t, b)] - [y_\lambda - \partial\varphi_\lambda^t(b)], u_\lambda - b) + \end{aligned}$$

$$+(f(t, b) - \partial\varphi_\lambda^t(b), u_\lambda - b)$$

$$\leq c_0 \|u_\lambda(t) - b\|^2 + (\|f(t, b)\| + \|\partial\varphi_\lambda^t(b)\|) \cdot \|u_\lambda(t) - b\|.$$

したがって、ほとんどすべての $t \in [0, T]$ に対して

$$\frac{d}{dt} \|u_\lambda(t) - b\| \leq c_0 \|u_\lambda(t) - b\| + \|f(t, b)\| + \|\partial\varphi_\lambda^t(b)\|.$$

したがって、すべての $t \in [0, T]$ に対して

$$\|u_\lambda(t) - b\| \leq e^{c_0 t} \|a - b\| + \int_0^t e^{c_0(t-\sigma)} (\|f(\sigma, b)\| + \|\partial\varphi_\lambda^\sigma(b)\|) d\sigma.$$

よく知られているように、 $\|\partial\varphi_\lambda^\sigma(b)\| \leq \|\partial\varphi^\sigma(b)\|$ であるから (III) により、上の不等式の右辺は $0 \leq t \leq T$, $\lambda > 0$ において有界である。したがって $\|u_\lambda(t)\|$ もそうである。

補題 4.2 B が H の有界集合ならば、 $\{J_\lambda^{\varphi^t} u \mid 0 \leq t \leq T, 0 < \lambda \leq 1, u \in B\}$ は有界である。

証明. $\|J_\lambda^{\varphi^t} u\| \leq \|J_\lambda^{\varphi^t} v\| + \|u - v\|$ であるから、補題の証明のためには、ある $v \in B$ に対して $\{J_\lambda^{\varphi^t} v \mid 0 \leq t \leq T, 0 < \lambda \leq 1\}$ が有界であることを示せば十分である。

v を B の任意の元とする。 $t \in [0, T]$ と $\lambda > 0$ に対して

$$\begin{aligned} & \|v - J_\lambda^{\varphi^t} v\|^2 - \|v - J_1^{\varphi^t} v\|^2 \\ & \leq 2 \cdot (v - J_\lambda^{\varphi^t} v, (v - J_\lambda^{\varphi^t} v) - (v - J_1^{\varphi^t} v)) \\ & = 2\lambda \cdot (\partial\varphi_\lambda^t(v), J_1^{\varphi^t} v - J_\lambda^{\varphi^t} v) \\ & \leq 2\lambda \cdot (\partial\varphi_1^t(v), J_1^{\varphi^t} v - J_\lambda^{\varphi^t} v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\lambda (v - J_1^{\varphi^t} v, (v - J_\lambda^{\varphi^t} v) - (v - J_1^{\varphi^t} v)) \\
&\leq 2\lambda \|v - J_1^{\varphi^t} v\| \cdot \|v - J_\lambda^{\varphi^t} v\| \\
&\leq \frac{1}{2} \|v - J_\lambda^{\varphi^t} v\|^2 + 2\lambda^2 \|v - J_1^{\varphi^t} v\|^2.
\end{aligned}$$

また, (II) と命題 3.3 から, $t \rightarrow J_1^{\varphi^t} v$ は $[0, T]$ において連続であるから

$$\sup_{\substack{0 \leq t \leq T \\ 0 < \lambda \leq 1}} \|v - J_\lambda^{\varphi^t} v\|^2 \leq \sup_{\substack{0 \leq t \leq T \\ 0 < \lambda \leq 1}} 2(1 + 2\lambda^2) \|v - J_1^{\varphi^t} v\|^2 < \infty.$$

したがって $\{J_\lambda^{\varphi^t} v \mid 0 \leq t \leq T, 0 < \lambda \leq 1\}$ は有界である。

補題 4.3. $\sup \{\varphi_\lambda^t(u_\lambda(t)) \mid 0 \leq t \leq T, 0 < \lambda \leq 1\} < \infty$.

証明. 補題 4.1 と補題 4.2 により, 正数 r が存在して, すべての $s, t \in [0, T]$, $\mu \in (0, 1]$, $\lambda > 0$ に対して, $r > \|J_\mu^{\varphi^t} u_\lambda(s)\|$ が成り立つ。

$\lambda > 0$, $u \in H$ とする. $r > \|J_\lambda^{\varphi^s} u\|$ ($0 \leq s \leq T$) ならば, 補題 3.1 と (II) により, (2.3) をもちいて

$$\begin{aligned}
&|\varphi_\lambda^t(u) - \varphi_\lambda^s(u)| \\
(4.1) \quad &\leq \max\{\varphi^t(J_\lambda^{\varphi^s} u) - \varphi^s(J_\lambda^{\varphi^s} u), \varphi^s(J_\lambda^{\varphi^t} u) - \varphi^t(J_\lambda^{\varphi^t} u)\} \\
&\leq |t-s| [c_r \cdot \max\{\varphi^s(J_\lambda^{\varphi^s} u), \varphi^t(J_\lambda^{\varphi^t} u)\} + c_r] \\
&\leq |t-s| [c_r \cdot \max\{\varphi_\lambda^s(u), \varphi_\lambda^t(u)\} + c_r].
\end{aligned}$$

したがって, $\varepsilon < \varepsilon$ に, $t \rightarrow \varphi_\lambda^t(u)$ は連続である. (2.6) と

(4.1) から

$$\begin{aligned} |\varphi_\lambda^s(u_\lambda(s)) - \varphi_\lambda^t(u_\lambda(t))| &\leq |\varphi_\lambda^s(u_\lambda(s)) - \varphi_\lambda^s(u_\lambda(t))| + |\varphi_\lambda^s(u_\lambda(t)) - \varphi_\lambda^t(u_\lambda(t))| \\ &\leq |(y_\lambda(s), u_\lambda(s) - u_\lambda(t))| + \|u_\lambda(s) - u_\lambda(t)\|^2/\lambda + \\ &\quad + |t-s| [c_f \cdot \max\{\varphi_\lambda^t(u_\lambda(t)), \varphi_\lambda^s(u_\lambda(t))\} + c_f]. \end{aligned}$$

したがって, u_λ の 1 回連続強微分可能性と $\sup\{\|y_\lambda(s)\| \mid 0 \leq s \leq T\} < \infty$ とから, $t \rightarrow \varphi_\lambda^t(u_\lambda(t))$ の連続性, さらに Lipschitz 連続性がわかる. (2.6) をもちいて

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \varphi_\lambda^t(u_\lambda(s)) \Big|_{s=t} &= (y_\lambda(t), u_\lambda'(t)) \\ &= (f(t, u_\lambda(t)) - u_\lambda'(t), u_\lambda'(t)) \leq \frac{1}{4} \|f(t, u_\lambda(t))\|^2 \end{aligned}$$

最後の辺は, (IV) と補題 4.1 により, t, λ に無関係な定数 $C > 0$ でおさえられる. したがって, (4.1) をもちいて

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \varphi_\lambda^t(u_\lambda(t)) \\ &\leq \overline{\lim}_{s \rightarrow t} \frac{\varphi_\lambda^s(u_\lambda(s)) - \varphi_\lambda^t(u_\lambda(s))}{s-t} + \lim_{s \rightarrow t} \frac{\varphi_\lambda^t(u_\lambda(s)) - \varphi_\lambda^t(u_\lambda(t))}{s-t} \\ &\leq c_f \cdot \varphi_\lambda^t(u_\lambda(t)) + c_f + C. \end{aligned}$$

この不等式から, $t \rightarrow \varphi_\lambda^t(u_\lambda(t))$ の絶対連続性をもちいて

$$\varphi_\lambda^t(u_\lambda(t)) \leq e^{c_f \cdot t} \varphi_\lambda^0(a) + (c_f + C) \int_0^t e^{c_f \cdot (t-\sigma)} d\sigma$$

が導かれるが, $\varphi_\lambda^0(a) \leq \varphi^0(a) < \infty$ であるから, 上の不等式の右辺は $0 \leq t \leq T, \lambda > 0$ で有界である. 証明おわり.

補題 4.4. $\sup \{ \int_0^T \|y_\lambda(t)\|^2 dt \mid 0 < \lambda \leq 1 \} < \infty$.

証明. r は補題 4.3 の証明の r と同じものとする. $T' \in (0, T)$ と $\lambda \in (0, 1]$ に対して

$$\begin{aligned}
 (4.2) \quad & \int_0^{T'} (y_\lambda(t), f(t, u_\lambda) - y_\lambda(t)) dt \\
 &= \int_0^{T'} (y_\lambda(t), u_\lambda(t)) dt \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^{T'} [\varphi_\lambda^t(u_\lambda(t+h)) - \varphi_\lambda^t(u_\lambda(t))] dt \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \left(\int_{T'}^{T'+h} - \int_0^h \right) \varphi_\lambda^t(u_\lambda(t)) dt - \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^{T'} [\varphi_\lambda^{t+h}(u_\lambda(t+h)) - \varphi_\lambda^t(u_\lambda(t+h))] dt \right\} \\
 &= \varphi_\lambda^{T'}(u_\lambda(T')) - \varphi_\lambda^0(a) - \\
 &\quad - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^{T'} [\varphi_\lambda^{t+h}(u_\lambda(t+h)) - \varphi_\lambda^t(u_\lambda(t+h))] dt.
 \end{aligned}$$

(4.1) と Fatou の補題により

$$\begin{aligned}
 & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^{T'} [\varphi_\lambda^{t+h}(u_\lambda(t+h)) - \varphi_\lambda^t(u_\lambda(t+h))] dt \\
 (4.3) \quad & \leq \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^{T'} [c_r \cdot \max\{\varphi_\lambda^{t+h}(u_\lambda(t+h)), \varphi_\lambda^t(u_\lambda(t+h))\} + c_r'] dt \\
 & \leq \int_0^{T'} [c_r \cdot \varphi_\lambda^t(u_\lambda(t)) + c_r'] dt.
 \end{aligned}$$

(4.2) と (4.3) と補題 4.3 により, ある定数 $C > 0$ が存在して

$$\begin{aligned}
 (4.4) \quad & \int_0^T \|y_\lambda(t)\|^2 dt - \int_0^T (y_\lambda(t), f(t, u_\lambda(t))) dt \\
 & \leq -\varphi_\lambda^T(u_\lambda(T)) + \varphi_\lambda^0(a) + C.
 \end{aligned}$$

ところで φ^T は H の各有界集合上で下から有界であるから

(2.3) をもちいて

$$\inf\{\varphi_\lambda^T(u_\lambda(T)) \mid 0 < \lambda \leq 1\} \geq \inf\{\varphi^T(J_\lambda^{\Phi^T} u_\lambda(T)) \mid 0 < \lambda \leq 1\} > -\infty.$$

また, $\varphi_\lambda^0(a) \leq \varphi^0(a) < \infty$ であるから, (4.4) からただちに $\int_0^T \|y_\lambda(t)\|^2 dt$ が $0 < \lambda \leq 1$ において有界であることがわかる.

定理の証明. 存在, $\lambda, \mu > 0$ とする.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\|^2 &= 2(u'_\lambda(t) - u'_\mu(t), u_\lambda(t) - u_\mu(t)) \\ &= 2([f(t, u_\lambda) - f(t, u_\mu)] - [y_\lambda(t) - y_\mu(t)], u_\lambda(t) - u_\mu(t)) \\ &\leq 2c_0 \|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\|^2 - 2(y_\lambda(t) - y_\mu(t), \lambda y_\lambda(t) - \mu y_\mu(t)) \\ &= 2c_0 \|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\|^2 - (\lambda + \mu) \|y_\lambda(t) - y_\mu(t)\|^2 - \\ &\quad - (\lambda - \mu) (\|y_\lambda(t)\|^2 - \|y_\mu(t)\|^2). \end{aligned}$$

と $u_\lambda(0) = u_\mu(0) = a$ から, すべて $t \in [0, T]$ に対して

$$(4.5) \quad e^{-2c_0 t} \|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\|^2 + (\lambda + \mu) \int_0^t e^{-2c_0 s} \|y_\lambda(s) - y_\mu(s)\|^2 ds \\ \leq (\mu - \lambda) \int_0^t e^{-2c_0 s} (\|y_\lambda(s)\|^2 - \|y_\mu(s)\|^2) ds.$$

したがって, $\lambda \downarrow 0$ のとき $\int_0^t e^{-2c_0 s} \|y_\lambda(s)\|^2 ds$ は非減少であるが, 補題 4.4 により

$$\sup_{0 < \lambda \leq 1} \int_0^t e^{-2c_0 s} \|y_\lambda(s)\|^2 ds \leq \sup_{0 < \lambda \leq 1} \int_0^T \|y_\lambda(s)\|^2 ds < \infty$$

であるから, $\lambda \downarrow 0$ のとき $\int_0^t e^{-2c_0 s} \|y_\lambda(s)\|^2 ds$ はある有限

な数に収束する。したがって, (4.5)から, ある $u \in C([0, T]; H)$ が存在して $C([0, T]; H)$ において $u_\lambda \rightarrow u$ ($\lambda \downarrow 0$).
また, ある $y \in L^2(0, T; H)$ が存在して $L^2(0, T; H)$ において $y_\lambda \rightarrow y$ ($\lambda \downarrow 0$).

このとき, $\lambda_n \downarrow 0$ が存在して, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{\lambda_n}(t) = y(t)$ a.e.
このことと $y_{\lambda_n}(t) = \partial \varphi_{\lambda_n}^t(u_{\lambda_n}(t))$ と $u_{\lambda_n}(t) \rightarrow u(t)$ ($n \rightarrow \infty$) から, ほとんどすべての t に対して

$$(4.6) \quad u(t) \in D(\partial \varphi^t) \quad \text{と} \quad y(t) \in \partial \varphi^t(u(t))$$

が得られる ([2] Theorem 2.3.(c)). $D(\partial \varphi^t)$ は D の稠密な部分集合であるから ([7]), $\overline{D(\partial \varphi^t)} = \overline{D}$. したがって, (4.6) と u の連続性から, $u(t) \in \overline{D(\partial \varphi^t)}$ がすべての $t \in [0, T]$ に対して得られる. これから

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} J_\lambda^{\varphi^t} u_\lambda(t) = u(t) \quad (0 \leq t \leq T)$$

が得られる. なぜならば, $u(t)$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して $u_\varepsilon \in D(\partial \varphi^t)$, $\|u_\varepsilon - u(t)\| \leq \varepsilon$, とれば

$$\begin{aligned} & \overline{\lim_{\lambda \downarrow 0} \|J_\lambda^{\varphi^t} u_\lambda(t) - u(t)\|} \\ & \leq \overline{\lim_{\lambda \downarrow 0} (\|J_\lambda^{\varphi^t} u_\lambda(t) - J_\lambda^{\varphi^t} u_\varepsilon\| + \|J_\lambda^{\varphi^t} u_\varepsilon - u_\varepsilon\| + \|u_\varepsilon - u(t)\|)} \\ & \leq \overline{\lim_{\lambda \downarrow 0} (\|u_\lambda(t) - u_\varepsilon\| + \lambda \|\partial \varphi^t(u_\varepsilon)\| + \varepsilon)} \\ & \leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

がなりたつからである. したがって, φ^t の下半連続性,

(2.3) と補題 4.3 により

$$\varphi^t(u(t)) \leq \lim_{\lambda \downarrow 0} \varphi^t(J_\lambda^{\varphi^t} u_\lambda(t)) \leq \lim_{\lambda \downarrow 0} \varphi_\lambda^t(u_\lambda(t)) < \infty.$$

したがって, すべて $t \in [0, T]$ に対して $u(t) \in D$. i) がなりたつことがわかった.

u_λ が (4.0) の解であることから, 各 $t \in [0, T]$ に対して

$$u_\lambda(t) + \int_0^t y_\lambda(\sigma) d\sigma = a + \int_0^t f(\sigma, u_\lambda(\sigma)) d\sigma.$$

上の式において, $\lambda \downarrow 0$ のときの極限をとれば, ii) がなりたつことがわかる.

一意性. $u_i \in C([0, T]; H)$ と $y_i \in L^2(0, T; H)$ が i)

と ii) をみたすとする ($i = 1, 2$). このとき

$$\begin{cases} u_i'(t) + y_i(t) = f(t, u_i(t)) & \text{a.e.} \\ u_i(0) = a \end{cases} \quad (i = 1, 2)$$

がなりたつから, ほとんど"すべて" t に対して

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_1(t) - u_2(t)\|^2 \\ &= (f(t, u_1) - y_1(t) - f(t, u_2) + y_2(t), u_1(t) - u_2(t)) \\ &\leq c_0 \|u_1(t) - u_2(t)\|^2. \end{aligned}$$

したがって

$$e^{-2c_0 t} \|u_1(t) - u_2(t)\|^2 \leq \|u_1(0) - u_2(0)\|^2 = 0$$

ゆえに $u_1(t) = u_2(t)$ ($0 \leq t \leq T$). 証明おわり.

§ 5. 擾動

§ 1 の (I), (II), (III) を仮定する. $[0, T] \times D$ から H への写像 f と $a \in D$ が与えられたとき, コーシー問題

$$(5.1) \quad \begin{cases} u'(t) + \partial \varphi^t(u(t)) \ni f(t, u(t)) & (0 \leq t \leq T) \\ u(0) = a \end{cases}$$

を考える. H が可分のとき (5.1) は 次の仮定のもとで解ける.

f に対して, 次の性質をもつ近似列 $\{f_n\}$ が存在すると仮定する:

(IV_n) 各 f_n は (IV) の f の性質をもつ.

(V_n) 各 f_n は (V) の f の性質をもつ. ただし (V) における C_0 を γ_n に代えるものとする.

(VI) 各 $r > 0$ と (II) の C_r と C'_r に対して
 $\|f_n(t, u)\|^2 \leq C_r \cdot \varphi^t(u) + C'_r \quad (\forall t, \forall n, \forall u \in D: \|u\| \leq r).$

(VII) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\gamma_\varepsilon \geq 0$ が存在して
 $(f_n(t, u) - f_n(t, v), u - v) \leq \varepsilon (u_1 - v_1, u - v) + \gamma_\varepsilon \cdot \|u - v\|^2$
 $(\forall t, \forall n, \forall u, v \in D(\partial \varphi^t), \forall u_1 \in \partial \varphi^t(u), \forall v_1 \in \partial \varphi^t(v)).$

(VIII) 各実数 r に対して, f_n は f に $\{(t, u) \in [0, T] \times D \mid \varphi^t(u) \leq r\}$ において一様収束する.

(IX) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u \in D$ かつ $\text{weak} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t, u_n) = v$ ならば, $f(t, u) = v$.

H が可分るとき, 以上の仮定のもとで, 任意の $a \in D$ に対して, $u \in C([0, T]; H)$ と $y \in L^2(0, T; H)$ で

$$i) u(t) \in D (\forall t \in [0, T]), y(t) \in \partial \varphi^t(u(t)) \text{ (a. a. t.)}$$

$$ii) u(t) + \int_0^t y(\sigma) d\sigma = a + \int_0^t f(\sigma, u(\sigma)) d\sigma \text{ (}\forall t \in [0, T]\text{)}$$

をみたすものが一意的に存在することを証明することができる。

これは, たとえば, 変動境界をもつ領域における非線形熱方程式に関する Dirichlet 境界条件のもとでの初期値問題の解の存在の証明に応用することができる ([3] 参照).

文献

- [1] F.E. Browder, Non-linear equations of evolution, Ann. of Math. 80 (1964), 485-523.
- [2] M.G. Crandall and A. Pazy, Semi-groups of nonlinear contractions and dissipative sets, J. Functional Anal. 3 (1969), 376-418.
- [3] H. Fujita, The penalty method and some nonlinear initial value problems, to appear.

- [4] T. Kato, Nonlinear semigroups and evolution equations, J. Math. Soc. Japan 19 (1967), 508-520.
- [5] Y. Kōmura, Nonlinear semi-groups in Hilbert space, J. Math. Soc. Japan 19 (1967), 493-507.
- [6] J. J. Moreau, Proximité et dualité dans un espace hilbertien, Bull. Soc. Math. France 93 (1965), 273-299.
- [7] J. Watanabe, On nonlinear semigroups generated by cyclically dissipative sets, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA, 18 (1971), 127-137.