

有限単純群の低いランクの
極大部分群について.

東大 理 坂内 英一

群 G の部分群 H による両側剰余類の個数 $|H \backslash G / H|$ を H の G におけるランクと呼ぶ。これは G を剰余類 G/H の上に働らく置換群とみたときの置換群のランクに等しい。

既知の有限単純群に対して、その低いランクの極大部分群としてどのようなものが存在するか？

ということを以下で考えます。特にランクが2の部分群の決定は、2重可移な置換表現の決定ということと同じことです。なお、この問題も考えるようになった動機は、才4回代数学シンポジウム報告集(箱根1963) pp. 26-31 の都筑え生による報告にあるので、それも参照して下さい。

まず、既知の単純群で2重可移表現を持つものは、現在までの所、次のものしか知られていません。都筑え生の報告, *ibid.*, の list (及び数学辞典2版の Yugengun の項に出ている list) より少し増えていることに注意して下さい。

A_n (交代群)

M_n (Mathieu群)

$PSL(n, q)$ (特殊一次変換群 = $A_{n-1}(q)$)

$PSU(3, q^2)$ (3次ユニタリ群 = ${}^2A_2(q)$)

$S_3(q)$ (鈴木群 = ${}^2B_2(q)$)

$Ree(q)$ (Ree群 = ${}^2G_2(q)$)

$Sp(2n, 2)$ (GF(2)上の斜交群)

Higman-Sims (次数176)

Conway's group of the smallest order (次数276)

さて、交代群、Mathieu群のランク2部分群は古くから既に決定されています。交代群のランクの低い極大部分群に関連して、次の結果が得られました。

結果1. 交代群 A_n (および対称群 S_n) のランク5以下の極大部分群を決定した。

すなわち、それは、自然なもので、 $i.e., \cong A_n \cap (S_i \times S_{n-i})$, ($\cong (S_i \times S_{n-i})$ 対称群の場合), $i=1, 2, 3, 4$, を除けば、 $n \leq 18$ の場合に限り存在し、 $n \leq 18$ の場合も、それらを完全に list up することが出来る。(詳しくは文献 [1] を参照して下さい。)

以下目標を Lie 型単純群 の低いランク (特にランク 2) の極大部分群の決定におきます。

このやり方の限り、以下 G を Lie 型単純群、 $p \in G$ を定義する有限体 $GF(q)$ の標数とします。

次の定理はこの問題を考え始めるにあたっての出発点となっています。

定理 (J. Tits, T. Tsuzuku) H が G の極大部分群で、 H の (G における) 指数が p と互いに素であれば、 H は G の極大な parabolic 部分群である。更に H のランクが 2 (従って極大) であれば、 G は次のいずれかである。

$$1) \quad G = \text{PSL}(n, q) \quad (= A_{n-1}(q))$$

$$2) \quad G = \text{PSU}(3, q^2) \quad (= {}^2A_2(q^2))$$

$$3) \quad G = S_3(q) \quad (= {}^2B_2(q))$$

$$4) \quad G = \text{Ree}(q) \quad (= {}^2G_2(q)).$$

全ての Lie 型単純群のランク 2 部分群の決定、がこれからやるうとしている当面の目標ですが、現在の所、計算の困難さ等があり、まだそこまでは到達していません。それでもいくつかの type の群に対してはそれが完成しているので、これらの結果について記すことにします。そこでの証明の方法は、原理的には、他の type の Lie 型単純群に対しても、

適用可能であると考えています。

結果 2. 単純群 $G = \text{PSL}(n, q)$ の $r = 7$ 2 部分群を決定した。

すなわち、それは自然なものの (i.e., $\text{PSL}(n, q)$ を射影空間の点又は超平面の集合の上に働かせた時の 1 "点" の stabilizer と共役になるもの) を除けば、次の場合にのみ存在する。

- 1) $(n, q) = (2, 5)$, of index 5
 - 2) $(n, q) = (2, 7)$, " 7.
 - 3) $(n, q) = (2, 9)$, " 6
 - 4) $(n, q) = (2, 11)$, " 11
 - 5) $(n, q) = (3, 2)$, " 8
 - 6) $(n, q) = (4, 2)$, " 8.
- (詳しくは、文献 [2] を参照して下さい。)

結果 3. 単純群 $G = \text{Sp}(2n, 2)$, $n \geq 3$, の $r = 7$ 2 部分群は次のいずれかと同型

- 1) $O(2n, 2, +1)$, of index $2^{n-1}(2^n + 1)$.
 - 2) $O(2n, 2, -1)$, " $2^{n-1}(2^n - 1)$.
- (文献 [3] 参照.)

(Cf. J. McLaughlin, Some subgroups of $SL_n(\mathbb{F}_2)$, Ill. J. Math. 13 (1969) 108-115.)

結果 4. 単純群 $G = Sp(4, 2^r)$, $r > 1$, の $r=2$ の 2 部分群は存在しない。
(文献 [4] 参照.)

以下、一般の斜交群 $PSp(2n, q)$. 他の Lie 型単純群に関して考察中です。

上の結果の証明の方針は、各 type の群により、それぞれ異なりますが、大雑把にいえば、

- 1) H の指数が (任意の元 $x \in G$ に対する中心化群 $C_G(x)$ の指数) + 1 でおさえられるという Maillet の Lemma (Cf. [2], Lemma 3)
- 2) $(1_H)^G = 1_G + \chi$ なる G の既約指標 χ がかなり制限されること. (Cf. [2], Lemma 7, [3], Lemma 4, etc.) が一番重要な点で、具体的には χ を制限するために幾何学的方法 (Piper の結果, $PSL(n, q)$ の場合). Lie 型の群の通常表現論に関する深い結果 (Green の $GL(n, q)$ の character の構成, $PSL(n, q)$ の場合; Curtis-Iwahori-Kilmoyer (to

appear in Publ. I.H.E.S) $Sp(n, q)$ の場合) 等を用います。詳しくは直接に次の文献を参照して下さい。

References

- [1] E. Bannai, Maximal subgroups of low rank of finite symmetric and alternating groups (submitted to the J. of Fac. of Sci. Univ. Tokyo.)
- [2] ———, Doubly transitive permutation representations of the projective special linear groups $PSL(n, q)$, (to appear in the Osaka J. of Math.)
- [3] ———, On some subgroups of $Sp(2n, 2)$, (to appear)
- [4] ———, Some simple groups having no multiply transitive permutation representations, (preprint, unpublished.)

参考文献

J. A. Green, On the Steinberg characters of finite Chevalley groups. Math. Z. (1970). Wielandt 記念号.