

Jump type の 確率積分方程式

東工大 理 士谷 正明

§ 0 序

次の様な integro-differential operator A :

$$Af(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^d b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

$$+ \int_{|u| \leq 1} \left\{ f(x+u) - f(x) - \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) u_i \right\} \frac{\varphi(x, u)}{|u|^{d+\alpha}} du$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{但し, } a = (a_{ij}(x)) : \text{有界可測, 対称, 非負定値} \\ b = (b_i(x)) : \text{有界可測} \\ \varphi(x, u) : \text{非負, 有界可測} \\ 1 \leq \alpha < 2 \end{array} \right.$$

に対し, 次の問題を考えよう.

$$(0) \left\{ \begin{array}{l} \text{operator } A \in \mathfrak{L}, \text{ その semi-group } \{T_t\} \text{ として} \\ T_t f(x) - f(x) = \int_0^t T_s A f(x) ds \quad \forall f \in C_b^2(\mathbb{R}^d)^1 \end{array} \right.$$

をみたす Markov process が唯一つ存在するか？

我々の目的は、 A の主要項が退化しないという条件の下で係数 a, b, φ のナメラカサについては、なるべく弱い仮定で、上の問題を解くことである。上の問題(0)を解くには、解析的な方法と確率積分方程式を使う方法がある。(0)に対応する確率積分方程式は、次の形になる

$$(1) \quad x(t) = x(0) + \int_0^t \sigma(x(s)) d\beta(s) + \int_0^t f(x(s)) ds + \int_0^t \int C(x(s), \xi) \varphi(ds, d\xi)$$

但し、 σ は a の non-negative square root, $\beta(t)$ は d -dim Brown 運動, $\varphi(ds, d\xi)$ は Levy measure $\frac{d\xi}{|\xi|^{d+1}}$ の対称 Cauchy 過程の random measure²⁾, $c(x, \xi)$ は次の関係をみたす写

$$\text{像: } m(x, du) = \int_{\{\xi; c(x, \xi) \in du\}} \frac{d\xi}{|\xi|^{d+1}} \quad \left(\begin{array}{l} x, \xi \in R^d \\ du \subset R^d \\ d\xi \subset R^d \end{array} \right)$$

$$\text{すなわち } m(x, du) = \chi_{(0 < |u| \leq 1)} \frac{\varphi(x, u)}{|u|^{d+\alpha}} du.$$

係数のナメラカサが落ちた時、一意性を示すには、確率積分方程式を使う方法が有効である。それは、確率積分方程式の解の一意性を示せば、そのまま問題(0)の一意性が従うからで、解析的な方法だけでは、一意性を示すのは難しいと思われる。一意性を問題にするのは、operator A が、その Markov process を特徴づけるかどうかに関係するからである。

上に述べた我々の目的と密接に関連すると思われる結果について簡単にふれておく。

(a) Stroock - Varadhan [7]

a ; positive-definite, bounded continuous, b ; bounded measurable, $\varphi = 0$ の case に (1) を使って問題 (0) を解いた。

(b) Tanaka, Tsuchiya, S. Watanabe [cf. [9]]

$a = 0$, $\varphi(x, u) = \varphi(u)$ の case に (1) を扱った。

(c) Komatsu [2]

a ; positive definite, bounded continuous の場合に (1) を扱った。

(d) Motoo (cf. [9]) [5]

$a = 0$ の場合, 解析的な方法により Markov process の存在について結果を出した。

以下, 我々は, (1) の解の一意性について考える。(1) の解の一意性については, 2つの定義がある。(cf. [10]).

その一つは従来から良く調べられてきた pathwise uniqueness で, その十分条件として,

$$\int \left(|\sigma(x) - \sigma(y)|^2 + |b(x) - b(y)|^2 + \int |c(x, \xi) - c(y, \xi)|^2 \frac{d\xi}{|\xi|^{d+1}} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \leq K |x-y|^2 \quad (\text{Lipschitz condition}) \\ |a(x)|^2 + |b(x)|^2 + \int |c(x, \xi)|^2 \frac{d\xi}{|\xi|^{d+1}} \leq K(1+|x|^2) \end{array} \right.$$

が知られている。(K. Ito [1] cf. [6])

Lipschitz condition をおく = ことは、我々の目的にあまり
 そわないし、又、 $c(x, \xi)$ に課された Lipschitz condition は
 operator A の係数 $\varphi(x, u)$ にどんな条件を課したのかが、
 あまり明瞭でない。その点を避けるため、我々は、次下で、
 分布の意味での一意性を考える。即ち、 A を定める量 $a, b,$
 φ にどんな条件を仮定すれば、(1) の分布の意味での一意性
 が言えるかという = ことを考える。その方法は、Stroock -
 Varadhan が diffusion type の確率微分方程式の場合に考
 え出した idea に沿うものである。

又、その結果として、本尾氏が解析的に構成された Markov
 process の一意性がどんな場合に示されるかという = ことにつ
 いても、部分的な解答であるが、与える = ことが ~~できる~~ できる。

§ 1. Martingale formulation と確率積分方程式.

$s \geq 0, \mathbb{R}^d$; d 次元ユークリッド空間. \mathbb{C}^d ; d 次元複素
 空間とする

$\Omega_s = D([s, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d)$ ($[s, \infty)$ で定義された \mathbb{R}^d -値函数

で、右連続、左極限をもつもの全体), $\Omega_s \ni \omega \mapsto x_t, \omega(t) = x(t, \omega) = x(t)$

$\mathcal{F}_t^s = \sigma(x(u); s \leq u \leq t)$ ($x(u), s \leq u \leq t$ によって生成される σ -field)

$\Omega_0 \ni \Omega$, \mathcal{F}_t^0 を \mathcal{F}_t , \mathcal{F}_∞^0 を \mathcal{F} とおく. $\theta \in \mathbb{C}^d, 0 \leq s \leq t$ に対して

$$X_\theta^s(t) = \exp \left\{ \theta \cdot (x(t) - x(s)) - \int_s^t b(x(\tau)) d\tau - \frac{1}{2} \int_s^t a(x(\tau)) \theta \cdot \theta d\tau - \int_s^t \int_{\mathbb{R}^d} (e^{\theta \cdot u} - 1 - \theta \cdot u) \frac{q(x(\tau), u)}{|u|^{d+\alpha}} du d\tau \right\}$$

と定義し, $X_\theta^0(t) = X_\theta(t)$ とおく. \cdot は \mathbb{R}^d の内積を表す

$$\mathcal{P}_{s,x} = \left\{ P; \begin{array}{l} P \text{ is probability measure on } (\Omega_s, \mathcal{F}_\infty^s), P(x(s)=x)=1 \\ (X_\theta^s(t), \mathcal{F}_t^s, P)_{t \geq s} \text{ is martingale for } \forall \theta \in \mathbb{R}^d \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{P} = \left\{ P; \begin{array}{l} P \text{ is probability measure on } (\Omega, \mathcal{F}) \\ (X_\theta(t), \mathcal{F}_t, P)_{t \geq 0} \text{ is martingale for } \forall \theta \in \mathbb{R}^d \end{array} \right\}$$

とおく. $\mathcal{P}_{0,x}$ を \mathcal{P}_x とおく.

定義 $\forall x \in \mathbb{R}^d$ に対して, \mathcal{P}_x が高々一真集合となるとき

(1) の uniqueness が成立するといふ.

我々の目的は (1) の uniqueness が成立するための条件として, a, b, γ について, \dagger を加えて, \dagger を加えるべく弱条件をさかすことである. まず, formulation からいえることは.

Prop 1.1 (i) $\forall x \in \mathbb{R}^d$ に対して, $\mathcal{P}_x \ni \forall P$ に対して

$P(x(t) \in dx)$ が一意に決まるとき ($\forall t \geq 0$ に対し), (1) の uniqueness が成立.

(ii) 任意の $x \in \mathbb{R}^d$ に対し, " $\mathcal{P}_x \ni P_1, P_2$ である" は絶対連続なものに一致する" ならば " \mathcal{P}_x は高々一要素集合" が成立.

Proof. (i) は, $P \in \mathcal{P}_x$ の \mathcal{F}_s に関する regular conditional probability を $Q_\omega(d\omega')$ とおくと $Q_\omega \in \mathcal{P}_{s, x(s, \omega)}$ P-a.s. ω が言えて, P のマルコフ性が示せ, uniqueness が分る. (ii) は \mathcal{P}_x が convex set より明らか.

次の Proposition が uniqueness を示すのに, 本復的に使われる.

Prop. 2.1 次の仮定 (A) の下で, (1) と (2) は同値.

仮定 (A):

- $a(x)$: 有界可測, $\exists A_1, A_2 > 0$ 定数
- $A_1 |0|^2 \leq a(x) \cdot 0 \cdot 0 \leq A_2 |0|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, 0 \in \mathbb{R}^d$
- また $a(x) \equiv 0$
- $b(x)$: 有界可測
- $\exists B_1, B_2 > 0$ 定数 $B_1 \leq \varphi(x, u) \leq B_2 \quad \forall x, u$
- $\varphi(x, u)$: 可測.

(1) $P \in \mathcal{P}$

(2) P は probability measure on (Ω, \mathcal{F}) で次の性質を持つ: P に関する Brown 運動 $\beta(t)$ と P に関する対称な

Cauchy過程 $l(t)$ が存在して, $x(t)$ は, その $\beta(t), l(t)$ に関する (1) をみたす.

但し, P に関する Brown 運動 $\beta(t)$ とは, $\beta(t)$ は continuous path をもち (\mathcal{F}_t) -adapted である

$$E(e^{i\theta \cdot (\beta(t) - \beta(s))} | \mathcal{F}_s) = e^{-\frac{1}{2}(t-s)|\theta|^2}, \quad (t > s, \theta \in \mathbb{R}^d)$$

をみたすもので, $l(t)$ が P に関する対称な Cauchy 過程とは, 右連続, 左極限を持つ path からなり, 確率連続で, (\mathcal{F}_t) -adapted である,

$$E(e^{i\theta \cdot (l(t) - l(s))} | \mathcal{F}_s) = e^{(t-s) \int (e^{i\theta \cdot \xi} - 1 - \frac{i\theta \cdot \xi}{1+|\xi|^2}) \frac{d\xi}{|\xi|^{d+1}}}$$

($t > s, \theta \in \mathbb{R}^d$)

をみたすものである.

(注) $A_1 = 0$ かつ $B_1 = 0$ のときは, (1) を仮定して (2) の表現を得る = これは適当に確率空間を拡張すれば可能である.

Prop 1.2 の証明の outline

(1) \Rightarrow (2) のときを示す, 簡単のため, $d=1$ とする.

$$\eta(t) = x(t) - x(0) - \int_0^t b(x(s)) ds$$

とみると, 仮定 (A) の上半分の不等式より, $\forall K > 0, \forall t > 0$ にはついで

$$E \left(e^{K|\eta(t)|} \right) < +\infty$$

が云えて、 $A \in \mathcal{F}_t$, $t \geq 0$ のとき、 $E(X_0(t) : A)$ は、0 の正則函数で、

$$(4) \quad \frac{d^k}{d\theta^k} E(X_0(t) : A) = E\left(\frac{d^k}{d\theta^k} X_0(t) : A\right) \quad k=1, 2, \dots$$

が示さける。 $(X_0(t), \mathcal{F}_t, P)$ が $\forall \theta \in \mathbb{R}^d \Rightarrow \dots$ 2. martingale より (4) で、 $k=1, 2$ のときを考えて、 $\theta=0$ とおくと、 $\eta(t)$ は 2 乗可積分 martingale で、

$$\langle \eta \rangle_t = \frac{1}{2} \int_0^t a(x(s)) ds + \int_0^t \int_{|u| \leq 1} u^2 \frac{\varphi(x(s), u)}{|u|^{1+\alpha}} du ds$$

となり、 $\langle \eta \rangle$ は連続な increasing process であるから、 $\eta(t)$ は quasi-left continuous である。従って、 $\eta(t)$ は

$$\eta(t) = \eta_1(t) + \eta_2(t)$$

但し、 $\eta_1(t)$ は連続な 2 乗可積分 martingale で、 $\eta_2(t)$ は compensated sum of jumps of $\eta(t)$ と一意的に分解される。³⁾ 従って、 $\eta_2(t)$ の具体的な表現を次の様に与えることが出来る。 $\Delta \eta(s) = \eta(s) - \eta(s-)$, とおき、 $t \geq 0, E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$$P^{\eta}(t, E) = \sum_{\substack{s \leq t \\ \Delta \eta(s) \neq 0}} \chi(\Delta \eta(s) \in E)$$

と 次の様な kernel $N(s, \omega, du)$ が存在する. (s. w) 12. 11. 2
 は very-well 可測性, $du = \nu$ は positive measure である,

$$\widetilde{P}^{\eta}(t, E) = \int_0^t N(s, E) ds.$$

但し \sim は $P^{\eta}(t, E)$ の naturalization を表す. Symbolical

$$= \int_0^t g^{\eta}(t, du) = P^{\eta}(t, du) - N(t, du) ds$$

と g^{η} を定義する. (正確な定義は [3] 参照) となり

$$\eta_2(t) = \int_0^t \int u g^{\eta}(ds, du)$$

となり = とを示せば, $\eta_2(t)$ は 2 乗可積分性 = とに注意すれば,

は, [3] の Th. 6.1 の証明より $N(s, du) = \eta(x(s), du)$ が分

り, $\langle \eta_1, \eta_2 \rangle_t = \int_0^t a(x(s)) ds$, となり. 従って, $\eta_2(t)$ は (\mathcal{F}_t)

- adapted, 従って $\eta_1(t) \in (\mathcal{F}_t)$ -adapted である.

$$\xi = \eta \quad \beta(t) = \int_0^t \sigma^{-1}(x(s)) d\eta_1(s)$$

$$l(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} l_N(t) \quad \text{但し}$$

$$l_N(t) = \int_0^t \int_{|u| \leq 1} c^{-1}(x(s-), u) \cdot X_N(c^{-1}(x(s-), u)) g^{\eta}(ds, du)$$

とあけは" 結論を得る. 但し $\bar{c}(x, u)$ は, 仮定(A) の F で"
 $c(x, \xi)$ は ξ の函数として, $|\bar{c}| \leq 1$ なるから, その逆函数
を \bar{c} とし, $\chi_N(x) = 1$ (if $|x| \leq N$), $= 0$ (if $|x| > N$) とする.

§3. 解析的評価, 一意性についてこの結果.

Prop. 1.1 から分る様に, (1) の uniqueness を示すには

$\mathcal{P}_x \ni \forall P \in \mathcal{P}(L)$, $\mu_\lambda(f) = E \left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(x(t)) dt \right]$ なら, $\forall f \in C_b(\mathbb{R}^d)^{(4)}$
に對し, 一意に決まることを云へばよい. μ_λ は resolvent
に相当するものだから, perturbation の方法により既知の
resolvent と結びつけて一意性を示す. $a > 0$ のとき (I) $a > 0$
(i.e. uniformly elliptic) のときは $\frac{1}{2}\Delta$ を main term に考
え, (II) $a = 0$ のときは α 次の対称安定過程の generator を
main term に考える. どちらも大体同様にやれるが, (II) の
場合について以下説明する. (評価は(I) の場合の方が簡単
である) operator $B^{(\alpha)}$ $B \cup \tilde{B}^{(\alpha)}$ を次の様に定義する

$$B^{(\alpha)} f(x) = \int_{|u| \leq 1} \left\{ f(x+u) - f(x) - \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot u_i \right\} \frac{\varphi(u)}{|u|^{d+\alpha}} du$$

$$\tilde{B}^{(\alpha)} f(x) = \int_{|u| \leq 1} \left\{ f(x+u) - f(x) - \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) u_i \right\} \frac{\varphi(u)}{|u|^{d+\alpha}} + \sum_{i=1}^d c_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

但し, $\varphi(u)$ は可測で, $B_1 \leq \varphi(u) \leq B_2$, $\forall u$, B_1, B_2 は
仮定(A) での定数. $c = (c_1, \dots, c_d)$ は定数ベクトル.

$B^{(\alpha)}$ に対応する加法過程の resolvent を $G_\lambda^{(\alpha)}$, $\tilde{B}^{(\alpha)}$ に対応する加法過程の semigroup を $\tilde{T}_t^{(\alpha)}$ とする. 以下の評価が成り立つ.

Prop. 3.1 $1 \leq \alpha < 2$, $1 < p < \infty$

(i) 定数 $C = C(p, \alpha)$ が存在し (C_1 は α に依存, C_2 は p に依存)

$$\|\tilde{T}_t^{(\alpha)} f\| \leq C \frac{1}{t^{\frac{1}{p}} \lambda^{\frac{d}{p}}} \|f\|_p \quad \text{for } \forall f \in L^p(\mathbb{R}^d), t > 0. \quad (6)$$

(ii) $p > \frac{\alpha}{d}$ ならば

$$\|G_\lambda^{(\alpha)} f\| \leq C \lambda^{-(1 - \frac{d}{\alpha p})} \|f\|_p \quad \text{for } \forall f \in L^p(\mathbb{R}^d), \lambda > 0$$

(iii) (1) $1 < \alpha < 2$ ならば, $1 < p < \infty$ ならば,

定数 $C = C(p, \alpha)$ が存在して,

$$\|\frac{\partial}{\partial x_i} G_\lambda^{(\alpha)} f\|_p \leq C \lambda^{-(1 - \frac{1}{\alpha})} \|f\|_p \quad \text{for } f \in C_K^\infty(\mathbb{R}^d) \quad (5)$$

。 $\forall \alpha' < \alpha$ ならば 定数 $C = C(p, \alpha, \alpha')$ が存在して

$$\begin{aligned} & \|\frac{\partial}{\partial x_i} G_\lambda^{(\alpha)} f(\cdot + u) - \frac{\partial}{\partial x_i} G_\lambda^{(\alpha)} f(\cdot)\|_p \\ & \leq C |u|^{\alpha'(1 - \frac{1}{\alpha})} \lambda^{-(1 - \frac{1}{\alpha})(1 - \frac{\alpha'}{\alpha})} \|f\|_p \quad \text{for } f \in C_K^\infty(\mathbb{R}^d) \end{aligned}$$

(2) $\alpha = 1$ のとき $1 < p < \infty$ ならば 定数 $C = C(p)$ が存在し

$$\|\frac{\partial}{\partial x_i} G_\lambda^{(1)} f\|_p \leq C \|f\|_p \quad \text{for } \forall f \in C_K^\infty(\mathbb{R}^d), \forall \lambda > 0$$

Proof. transition probability $\tilde{T}_t^{(\alpha)}(dy)$ の Fourier 変換に対し, 次の評価が成り立つことが分る.

$$\widehat{T}_t^{(a)}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{iy \cdot \xi} \widetilde{T}_t^{(a)}(dy) \quad \text{とおく} \quad \exists K > 0, \exists C > 0 \text{ 定数}$$

$$|\widehat{T}_t^{(a)}(\xi)| \leq K e^{-Ct|\xi|^\alpha} \quad \forall t > 0, \xi \in \mathbb{R}^d,$$

従って $\widetilde{T}_t^{(a)}(dy)$ は Lebesgue 測度に関する density $p^{(a)}(t, y)$ を持ち、

$$\|p^{(a)}(t, \cdot)\|_q \leq \text{const.} \left(\|\widehat{T}_t^{(a)}\|_1 \right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{を使えば、後は}$$

Young の不等式より明らか、 $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$ 。(ii) は (i) より従う。(iii) (i) は本尾氏が [5] で sup norm の時行々の方法が適用できる。(iii) (ii) は [8] 参照。

以後仮定 (A) は常に仮定し、 $a=0$ の場合を考える。

$T_\lambda^{(a)} = (A - B^{(a)})G_\lambda^{(a)}$ とおく。方程式 (1) より、Ito の公式を使って、 $P \in \mathcal{P}_x$ (x : 任意に fix, P も任意に fix) に対し定義された μ_λ について、次式を得る。

$$\mu_\lambda (I - T_\lambda^{(a)})h = G_\lambda^{(a)} h(x) \quad \forall h \in C_K^\infty$$

従って、 μ_λ が $L^p(\mathbb{R}^d)$ 上の bounded linear functional で、 $\|T_\lambda\|_p < 1$ と "う" = "か"。適当な p に対し証明できれば、 μ_λ が一意に定まり、(1) の uniqueness が示される。
($1 < p < \infty$)

そのため

$$\phi_n(s) = \frac{k}{2^n} \quad \text{if } \frac{k}{2^n} \leq s < \frac{k+1}{2^n}, \quad \begin{matrix} n=1, 2, \dots \\ k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{matrix}$$

とあるとき, $\exists \{n'\} \subset \{n\}$, $\exists s_0 \in [0, 1]$:

$$(*) \quad x_{n'}(t) = x(0) + \int_0^t b(x(\phi_{n'}(s-s_0) + s_0)) ds \\ + \int_0^t \int c(x(\phi_{n'}(s-s_0) + s_0), \xi) g(ds, d\xi)$$

と定義すれば, $x_{n'}(t) \rightarrow x(t)$ in Prob. for $\forall t$ as $n' \rightarrow \infty$.
が [8] と同様の方法で示される。

$$\mu_\lambda^{(n')} f = E \left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(x_{n'}(t)) dt \right] \quad f \in L^p(\mathbb{R}^d)$$

とあるとき $\mu_\lambda^{(n')}$ は仮定 (A) の F で "bounded linear functional on $L^p(\mathbb{R}^d)$ " となる。実際, 次の様に表示される。簡単のため $s_0 = 0$, $n' = n$ とする。

$$\left| E \left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(x_n(t)) dt \right] \right| \leq \sum_{k=1}^\infty \left| E \left[\int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} e^{-\lambda t} f(x_n(t)) dt \right] \right|$$

まず,

$$|I_k| = \left| E \left[\int_0^{\frac{k}{2^n}} e^{-\lambda t} f(x_n(t)) dt \right] \right|$$

$$= \left| \int_0^{\frac{k}{2^n}} e^{-\lambda t} dt E \left[f(x + b(x) \cdot t + \int_0^t \int c(x, \xi) g(ds, d\xi)) \right] \right|$$

とあるとき, $x + b(x) \cdot t + \int_0^t \int c(x, \xi) g(ds, d\xi)$ は Lévy
measure $\delta^{(u)} \chi_{(0 < |u| \leq 1)} \varphi(x, u) / |u|^{d+\alpha} du$ (x : fixed) の

加法過程より Prop 3.1 (i) から

$$|I_1| \leq C \int_0^{\frac{1}{2^n}} e^{-\lambda t} \frac{1}{t^{\frac{d}{2p}}} \|f\|_p dt \leq C(n, 1) \|f\|_p \quad \text{if } p > \frac{d}{2}$$

以後 $p > \frac{d}{2}$ なる $1 < p < \infty$ を固定する。

$$\begin{aligned} I_2 &= E \left[\int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} e^{-\lambda t} f(x_n(t)) dt \right] \\ &= \int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} e^{-\lambda t} dt E \left[f \left(x + b(x) \frac{1}{2^n} + b \left(x \left(\frac{1}{2^n} \right) \right) \left(t - \frac{1}{2^n} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^{\frac{1}{2^n}} c(x, \xi) g(ds, d\xi) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{\frac{1}{2^n}}^t c \left(x \left(\frac{1}{2^n} \right) \right) g(ds, d\xi) \right] \end{aligned}$$

$$\therefore \therefore E[\dots] = E[E[\dots | \mathcal{F}_{\frac{1}{2^n}}]] \quad \text{to } \dots = \dots$$

$$g(ds, d\xi) \perp \mathcal{F}_{\frac{1}{2^n}} \quad \text{if } ds \subset \left(\frac{1}{2^n}, t \right]$$

を使うと

$$E[\dots] = \int_{\Omega} P(dw') \int_{\Omega} P(dw'') f \left[Y_t(w') + \int_{\frac{1}{2^n}}^t c \left(x \left(\frac{1}{2^n} \right) \right) g(ds, d\xi, w'') \right]$$

$$\begin{aligned} \text{by } \dots, Y_t(w') &= x + b(x) \frac{1}{2^n} + b \left(x \left(\frac{1}{2^n} \right) \right) \left(t - \frac{1}{2^n} \right) \\ &\quad + \int_0^{\frac{1}{2^n}} c(x, \xi) g(ds, d\xi, w') \end{aligned}$$

となり、やはり Prop 3.1 (i) より

$$\left| \int_{\Omega} P(dw'') f\left(\gamma_t(\omega') + \int_{\frac{1}{2^n}}^t C\left(x\left(\frac{1}{2^n}, \omega'\right), \xi\right) \otimes (ds, d\xi, \omega'')\right) \right|$$

$$\leq \text{Const.} \frac{1}{\left(t - \frac{1}{2^n}\right)^{\frac{d}{p}}} \|f\|_p.$$

従って,

$$|I_2| \leq C(n, 2) \|f\|_p$$

以下同様に評価でき, $(n \in \sum_{k=1}^{\infty} C(n, k) < +\infty$ に注意すれば).

$$|\mu_{\lambda}^{(n)} f| \leq C(n) \|f\|_p \quad (\text{if } \infty > p > \frac{d}{\alpha})$$

を得る.

$\alpha = 2$. $C(n)$ が n に independent になる様子を確かめればよいが, 一般に, 仮定(A)の下で云えるかどうか. また証明できないうち, 後で更に仮定を置かねばならぬ, その事情をみずため, $\alpha > 1$ の場合に計算を行ってみよう.

(*) の式に Ito の公式を適用して, 次の式を得る.

$h \in C_{\text{loc}}^{\infty}(R^d)$ に対し (簡単のため $s_0 = 0, n = n$ とする)

$$\mu_{\lambda}^{(n)}(h) = G_{\lambda}^{(\alpha)} h(x) + E \left[\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} b(x(\phi_n(t))) \cdot \nabla G_{\lambda}^{(\alpha)} h(x_n(t)) dt \right]$$

$$+ E \left[\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt \sum_{|u| \leq 1} \left\{ G_{\lambda}^{(\alpha)} h(x_n(t) + u) - G_{\lambda}^{(\alpha)} h(x_n(t)) - \nabla G_{\lambda}^{(\alpha)} h(x_n(t)) \cdot u \right\} \right]$$

$$x \left\{ \varphi(x(\phi_m(t)), u) - \varphi(0, 0) \right\} \frac{du}{|u|^{d+\alpha}} \Big] = I_1 + I_2 + I_3$$

$$|I_1| \leq C(p, \alpha) \lambda^{-(1-\frac{d}{dp})} \|f\|_p$$

$$|I_2| \leq \|b\| \mu_\lambda^{(n)} (|\nabla G_\lambda^{(a)} h|) \leq \|b\| \|\mu_\lambda^{(n)}\|_p C(p, \alpha) \lambda^{-(1-\frac{1}{\alpha})} \|h\|_p$$

$$I_3 = E \left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} dt \left\{ \int_{|u| \leq 1} \frac{\varphi(x(\phi_m(t)), u) - \varphi(x(\phi_m(t)), 0)}{|u|^{d+\alpha}} du \right\} \right]$$

$$+ E \left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} dt \left\{ \int_{|u| \leq 1} \frac{\varphi(x(\phi_m(t)), 0) - \varphi(0, 0)}{|u|^{d+\alpha}} du \right\} \right]$$

$$= I_3^1 + I_3^2 \quad \text{とある.}$$

$|I_3^1|, |I_3^2|$ を評価するために次の仮定を置く:

$$\begin{cases} |\varphi(x, u) - \varphi(x, 0)| \leq C |u|^\delta \quad \text{for some } \delta > 0 \\ |\varphi(x, 0) - \varphi(0, 0)| < \frac{B_1}{2} \\ \forall x, \forall u \quad |x|, |u| \leq \bar{x}. \end{cases}$$

とあると

$$|I_3^1| \leq \int_{|u| \leq 1} \frac{C du}{|u|^{d+\alpha-\delta}} E \left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} dt \left| G_\lambda^{(a)} h(x_m(t)+u) - G_\lambda^{(a)} h(x_m(t)) - \nabla G_\lambda^{(a)} h(x_m(t)) \cdot u \right| \right]$$

$$= \int_{|u| \leq 1} \frac{C du}{|u|^{d+\alpha-\delta}} \mu_\lambda^{(n)} \left(\left| G_\lambda^{(a)} h(\cdot+u) - G_\lambda^{(a)} h(\cdot) - \nabla G_\lambda^{(a)} h(\cdot) \cdot u \right| \right)$$

$$\leq \int_{|u| \leq 1} \frac{2c \, du}{|u|^{d+\alpha-\delta-\alpha''}} \|\mu_\lambda^{(n)}\|_p \|h\|_p \lambda^{-(1-\frac{1}{\alpha})(1-\frac{\alpha'}{\alpha})} \quad (\text{Prop. 3.1 (iii) (i)})$$

但し, $\alpha'' = 1 + \alpha'(1 - \frac{1}{\alpha})$.

$\delta > 0$ を任意に取れば, $d + \alpha - \delta - \alpha'' < 1$ となり, $\lambda \rightarrow \infty$ として $\alpha' \rightarrow \alpha$ とし, $\alpha = \alpha' < \alpha$ とし (①) $\alpha'' \uparrow \alpha$ as $\alpha' \uparrow \alpha$)

$$\begin{aligned} \text{又. } |I_3^2| &\leq \frac{1}{\varphi(0,0)} E \left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} dt \left| \varphi(x(\phi_m^{(t)}), 0) - \varphi(0,0) \right| \left| B^{(\alpha)} \Gamma_\lambda^{(\alpha)} h(x_m(t)) \right| \right] \\ &\leq \frac{\sup_x |\varphi(x,0) - \varphi(0,0)|}{\varphi(0,0)} \mu_\lambda^{(n)} (|B^{(\alpha)} \Gamma_\lambda^{(\alpha)} h|) \\ &\leq \varepsilon \|\mu_\lambda^{(n)}\|_p \|h\|_p \end{aligned}$$

但し, $\varepsilon \equiv \frac{2 \cdot \sup_x |\varphi(x,0) - \varphi(0,0)|}{B_1} < 1$.

従って, $|\mu_\lambda^{(n)} h| \leq |I_1| + |I_2| + |I_3^1| + |I_3^2|$ より

λ_0 を十分大きくとれば, $\forall \lambda \geq \lambda_0$ に対し, $(\lambda_0 = \lambda_0(p, d, \alpha, \delta))$

$$\|\mu_\lambda^{(n)}\|_p \leq \frac{C(p, \alpha) \lambda^{-(1-\frac{d}{2p})}}{1 - \left\{ \|b\| C(p, \alpha) \lambda^{-(1-\frac{1}{\alpha})} + \int_{|u| \leq 1} \frac{2c \, du}{|u|^{d+\alpha-\delta-\alpha''}} \cdot \lambda^{-(1-\frac{1}{\alpha})(1-\frac{\alpha'}{\alpha})} + \varepsilon \right\}}$$

$\mu_\lambda^{(n)} \rightarrow \mu_\lambda \quad (n \rightarrow \infty) \text{ weakly}$

とすれば, $\|\mu_\lambda^{(n)}\|_p$ をおさえれば, 同様に μ_λ の $\|\mu_\lambda\|_p$

もあきえられる。

$\varphi(x, u)$ は φ の全く同じ仮定の下で, 上と同様タマリ
方で, $\lambda \geq \lambda_0$ のとき $\|T_\lambda\|_p < 1$ が示される

以上まとめ定理を述べる前に, 仮定をき, ちり述べる。

仮定 (B, α): ① $1 < \alpha < 2$ のとき

$$\bullet \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ |u| \leq 1}} \frac{|\varphi(x, u) - \varphi(x, 0)|}{|u|^\alpha} < +\infty \text{ for some } \delta > 0$$

$$\bullet \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\varphi(x, 0) - \varphi(0, 0)| < \frac{B_1}{2}$$

② $\alpha = 1$ のとき 適当な ~~###~~ $p > d$ に対し

$$\varepsilon_1 = \|b\|_{C(p)}, \quad \varepsilon_2 = \frac{2}{B_1} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\varphi(x, 0) - \varphi(0, 0)|$$

$$\varepsilon_3 = \int_{|u| \leq 1} \frac{2C(p)}{|u|^{d-\delta}} du, \quad \varepsilon = \varepsilon(\delta) = \frac{1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{\varepsilon_3} \quad \text{とあきとき}$$

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < 1 \quad \text{かつ}$$

$$\sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ |u| \leq 1}} \frac{|\varphi(x, u) - \varphi(x, 0)|}{|u|^\alpha} < \varepsilon(\delta) \text{ for some } \delta > 0$$

但し, $C(p)$ は Prop. 3.1 (iii) の④で定まる定数。

このとき, 次の定理が成立する。

Theorem (I) $a > 0$ (i.e. unif. elliptic) のとき、仮定 (A) 及び a が連続ならば、(1) の uniqueness が成立。
 (II) $a = 0$ のとき、仮定 (A) 及び仮定 (B, α) の下で (1) の uniqueness が成立。

[注]

- 1) $C_b^2(\mathbb{R}^d)$ は、 \mathbb{R}^d で定義された 2 階迄の微係数があり、有界連続な函数の全体を表す。
- 2) 定義については、[1] 又は [6] 参照。
- 3) 定義及び詳細は [4] 参照。
- 4) $C_b(\mathbb{R}^d)$ は、 \mathbb{R}^d で定義された有界連続な函数全体を表す。
- 5) $C_K^\infty(\mathbb{R}^d)$ は、 \mathbb{R}^d で定義された無限回連続微分可能で、compact support をもつ函数全体。
- 6) $\|\cdot\|$ は sup norm, $\|\cdot\|_p$ は Lebesgue measure による L^p -norm を表す。

文 献

- [1] K. Ito : Mem. Amer. Math. Soc. 4 (1954)
- [2] T. Komatsu : 確率論セミナー - 四月シボジウムにおける Short-Communication (1971)
- [3] H. Kunita - S. Watanabe : Nagoya Math. Jour.

30 (1967)

[4] P. A. Meyer : Probability and Potentials

Blaisdell Publ. Co. (1966)

[5] M. Motoo : PSG サマセミナ一講演 (1969)

[6] A. V. Skorohod : Studies in the theory of random processes (英訳, Addison Wesley 1965)

[7] D. W. Stroock - S. R. S. Varadhan : Comm. Pure Appl. Math.

XXII (1969)

[8] M. Tsuchiya : Jour. Math. Kyoto Univ. 10 (1970)

[9] ——— : 教理研 講究録 112 (1971)

[10] T. Yamada - S. Watanabe : Jour. Math. Kyoto Univ.

11 (1971)