

VORTEX RINGの運動と安定性

東京電機大 高尾 利治
東大宇宙研 神部 勉

§1. はしがき

渦運動の研究は最初に Helmholtz によって始められたといわれ、また vortex ring に関する実験は Reusch (1860) によって煙の輪を使って行われたことが記されている。

Kelvin が 1867 年に 'vortex atom 論' を提唱すると、vortex filament について、さらに詳しい研究がなされた。

その一連の研究の結果、柱状の渦はかなり一般的な微小攪乱に対して中立安定であり (Kelvin [1])、vortex ring については数種の型の攪乱に対して中立安定であることが示された。また実験もその後 Tait (1876)、Reynolds (1876) 等によって行われている。これらのことに関する文献は Lamb [2] に詳しく載っている。

近年になってからは、流れの中におかれた物体の後流と関連して vortex system の研究が行われた。後節との関連の

ために、そのうちの2つを引用すると、Rosenhead [3] は孤立した直線渦が直線状からわずかに変形したときの運動を議論し、Kelvin [1] と同じ結果を得ている。3次元の物体の後方の流れでは、ある場合には、らせん状の vortex filament が観測されることがある。そこで Levy & Forsdyke [4] は helical vortex の線型安定性を調べ、pitch k (後述) が約 0.3 より大きいとき安定であることを得ている。

以下 §2 では曲線渦 (line vortex) の運動に関する近似式を導き、§3 で典型的な3例について、それが微小変形したときの運動を調べる。§4 は実験の概要とそのまとめで、いろいろな形の vortex ring の運動および2つの ring の相互作用について述べ、§5 では vortex ring の安定性について要約する。

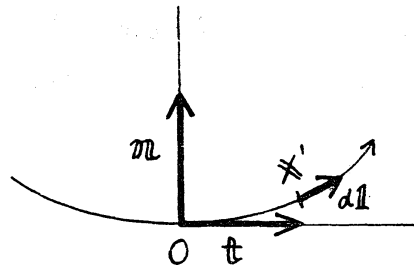
§2. 曲線渦 (line vortex) の運動方程式

無限遠で静止している縮まない流体の中に、強さ κ の渦線があるとき、それによつて点 X に誘起される速度は

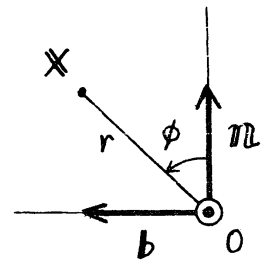
$$u(X) = -\frac{\kappa}{4\pi} \int \frac{y \times d\mathbf{l}(X')}{y^3} \quad (2.1)$$

$$y = X - X'$$

である。 X' は渦線上の点であり、 $d\mathbf{l}$ は渦の線分である (1図)。



1 図



2 図

渦線に十分近いところでは ($r \rightarrow 0$, 2図),

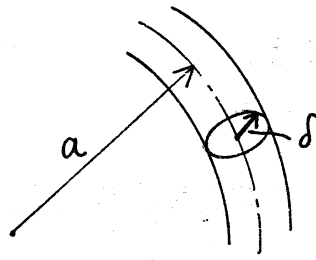
$$u(x) = \frac{\kappa}{2\pi r} (b \cos \phi - n \sin \phi) + b \frac{\kappa}{4\pi} c \log \frac{l}{r} + O(r^0) \quad (2.2)$$

と書ける (Batchelor [5]). ここで c は点 O での渦線の曲率であり, l は曲率半径 ($a = 1/c$) と同程度の長さである. また n および b は各々 O 点での渦線の主法線および陪法線方向の単位ベクトルである.

(2.2) 式の第1項は渦線のまわりの回転運動を, 第2項は陪法線方向の並進運動を表わしている. これによれば, 太さゼロの渦線は無限大の速さへ前進する. また渦が直線の場合は, $c=0$ となって静止していることになる. 有限であるが十分小さい断面の渦 (断面の半径 δ) については, 渦の表面上の点に着目すると, その並進速度 u_t は, 近似的に次のように与えられる [6],

$$u_t = b K c, \quad (2.3)$$

$$K = \frac{\kappa}{4\pi} \log \frac{l}{\delta}.$$



断面が円形でないときは、変形が大き

くないとすると、その影響は対数的で

あるから、 δ はたとえば平均半径としてよいだろう。以下では並進速度を考慮するときだけ、渦の断面の大きさを考えるが、それ以外は太さゼロの曲線とみなす。

渦線上の点を $X(s, t)$ で表わそう。 t は時間で、 s は渦線上の基準点からの距離である。点 X での単位接線ベクトルを e とすると

$$e = \frac{\partial X}{\partial s}$$

であり、また $c m = \frac{\partial^2 X}{\partial s^2}$

$$b = e \times m$$

がなりたつから、 $u_t = \partial X / \partial t$ を考慮すると、(2.3) は

$$\frac{\partial X}{\partial t} = K \frac{\partial X}{\partial s} \times \frac{\partial^2 X}{\partial s^2} \quad (2.4)$$

と書ける。 δ_0 を δ の平均値として、 $a \gg \delta_0$ 、 $|\delta/\delta_0 - 1| \ll 1$

がなりたつとすると、前と同じ理由で δ の変化の影響を無視

できる。また長さおよび時間の単位を適当にとると(2.4)は

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial s} \times \frac{\partial^2 X}{\partial s^2} \quad (2.5)$$

となる。

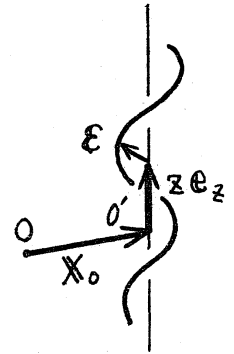
§3. 微小変形に対する渦線の安定性

3-1 直線渦 (rectilinear vortex)

渦が直線状からわずかに変形しているとき、
渦線上の点 X を

$$X(s, t) = X_0(t) + z e_z + \varepsilon(s, t) \quad (3.1)$$

$$(-\infty < z < \infty)$$



4 図

と表わそう。 X_0 は渦線の全体としての運動を表わす項で、
 e_z は z 方向の単位ベクトル、 $\varepsilon = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$ である。
これを (2.5) に代入し、 $|\varepsilon| \ll 1$ として ε について 1 次の
項までとると

$$\dot{X}_0 + \dot{\varepsilon} = e_z \times \varepsilon'' \quad (3.2)$$

を得る。ここで $(\dot{\quad})$ は $\partial/\partial t$ を、 (\prime) は $\partial/\partial s$ を表わす。 ε につ
いて 0 次と 1 次の項を比較すると、

$$\dot{X}_0 = 0,$$

$$\dot{\varepsilon}_x = -\varepsilon_y'', \quad \dot{\varepsilon}_y = \varepsilon_x'', \quad \dot{\varepsilon}_z = 0$$

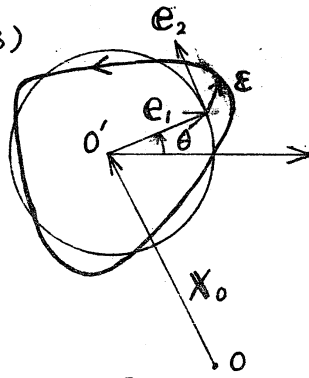
となる。最初の式は直線^(渦)が静止していることを意味し、また
 $(\varepsilon_x, \varepsilon_y) \propto e^{i(kz - \omega t)}$ と仮定すると、 $\omega = \pm k^2$ となり、変
形が中立安定であることがわかる。この結果は Kelvin [1],
Rosenhead [3], Hama [8] と一致している。

3-2 円渦 (circular vortex)

渦が半径1の円からわずかにずれ2いるとして

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0(t) + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.3)$$

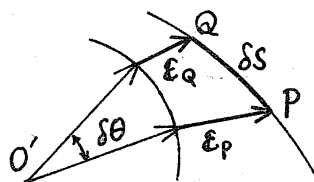
と表わす. ベクトル成分は円柱座標
(r, θ, z)で表わし, その各方向の単位
ベクトルを $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, また $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1,$
 $\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ とし, 渦は θ の増す方向を向い
て2いるとする (5図). 6図の PQ 間
の距離を δs とすると



5図

$$\delta s = |\delta \mathbf{x}|_{t=\text{const.}} = (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2') \delta \theta,$$

ただし $(\prime) = \partial/\partial \theta$. これによつて変数 s
の代りに θ を使う. (3.3) を (2.5) に代
入し, $O(\varepsilon)$ までを残すと次のようになる,



6図

$$\dot{\mathbf{x}}_0 + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = (1 - 3\varepsilon_1 - 3\varepsilon_2') \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1 \times \boldsymbol{\varepsilon}' + \mathbf{e}_2 \times \boldsymbol{\varepsilon}'' \quad (3.4)$$

$O(\varepsilon^0)$ の項からは, $\dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{e}_3$ が得られ, これは円渦が \mathbf{e}_3 方向
に速度1で進むことを意味する. $O(\varepsilon^1)$ の項からは

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= \varepsilon_3'' \\ \dot{\varepsilon}_2 &= -\varepsilon_3' \\ \dot{\varepsilon}_3 &= -\varepsilon_1'' - \varepsilon_1 \end{aligned} \right\} \rightarrow \ddot{\varepsilon}_3 = -\varepsilon_3'''' - \varepsilon_3''$$

となる. $\varepsilon_3 \propto e^{i(n\theta - \omega t)}$ (n は整数) とすると

$$\omega^2 = n^2(n^2 - 1)$$

を得る。 ω は実数となるから、circular vortex は中立安定である。 $n=0, 1$ のときは $\omega=0$ で、単なる並進運動を表わしている。 $n \geq 2$ のとき、次のような standing wave 型の解が得られる、

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \varepsilon_0 \cos n\theta \cos \omega t, \\ \varepsilon_2 = -\frac{1}{n} \varepsilon_0 \sin n\theta \cos \omega t, \\ \varepsilon_3 = \frac{\omega}{n^2} \varepsilon_0 \cos n\theta \sin \omega t. \end{cases}$$

これによると、 $\theta=0$ については $\varepsilon_2=0$ 、 $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_3^2 / (\frac{\omega}{n^2})^2 = \varepsilon_0^2$ となり楕円運動し、 $\theta = \pi/2n$ については $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0$ 、 $\varepsilon_2 = -\frac{\varepsilon_0}{n} \cos \omega t$ となり円周上に往復運動する。この型の運動の特徴を表わした図が、 $n=2, 3$ について、10, 11 図に示されている。

3-3 ら線渦 (helical vortex)

ら線からのわずかな変形を ε とし

$$X = X_0(t) + X_h(\theta, t) + \varepsilon(\theta, t) \quad (3.5)$$

と置く。 X_h はら線の形を表わすもので、pitch を k とすれば

$$X_h = e_1 + k\theta e_3$$

とかける、座標系は 3-2 と同じである。 (3.5) を (2.5) に代入し、 $O(\varepsilon^2)$ を省略すると、次のようになる、

$$\dot{X}_0 + \dot{\varepsilon} = \frac{1-3\lambda}{k^3} (e_3 - k e_2) + \frac{1}{k^3} e_1 \times \varepsilon' + \frac{1}{k^3} (e_2 + k e_3) \times \varepsilon'' \quad (3.6)$$

ただし $k = \sqrt{1+k^2}$, $\lambda = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + k\varepsilon_3)/k^2$. $O(\varepsilon^0)$ の項から
 $X_0 = (e_3 - k e_2)/k^3$ が得られ, \therefore 線渦が $-e_2$ の方向に回転し
 ながら e_3 方向に前進することがわかる.

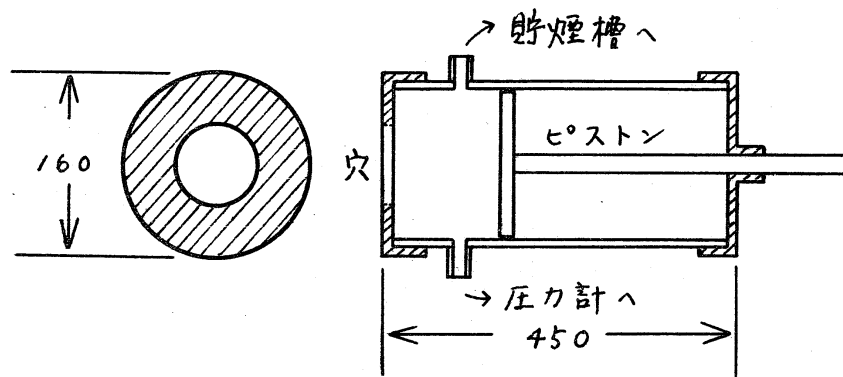
$O(\varepsilon^1)$ の項についての式は Levy & Forsdyke [4] の得た線
 型方程式と比較されよう. その違いは彼らの式では係数が積
 分形で与えられていること, また (3.6) では空間微分がまだ
 残されていることである. もし $\delta \rightarrow 0$ とし, $\varepsilon \propto e^{i(n\theta + \omega t)}$
 と仮定すると, 両者は一致する. このとき

$$\omega^3 + P\omega^2 + Q\omega + R = 0 \quad (3.7)$$

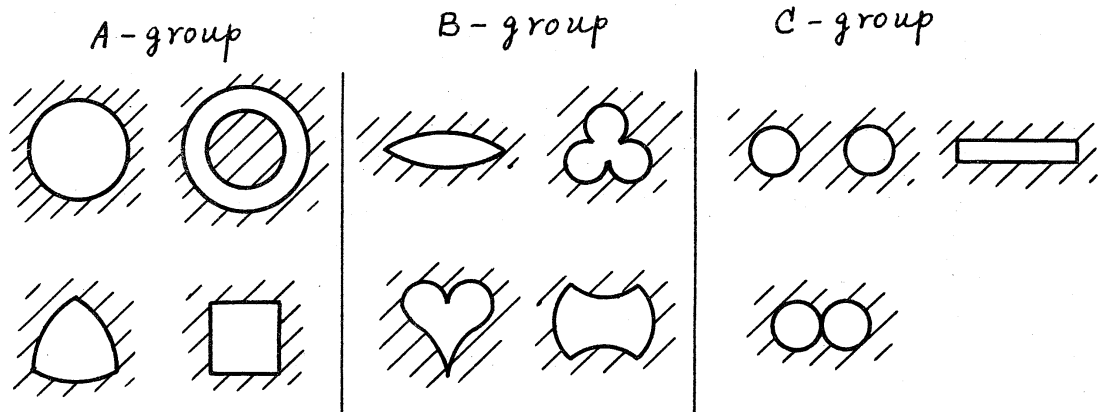
の形の分散式が得られる, ただし P, Q, R は n および k の関
 数である. $\Delta = P^2Q^2 + 18PQR - 27R^2 - 4Q^3 - 4P^3R$ とおくと,
 すべての n, k に対して, $\Delta \geq 0$ が数値的に得られる. したが
 って (3.7) のすべての根が実数であることになり, 中立安
 定ということになる. この結論は Levy & Forsdyke のと少し
 違うが, その理由は (2.2) 式を導くときの近似に起因するも
 のと思われる.

§4. 実験

静止大気中にタバコの煙を衝撃的に噴出させて vortex ring を作り, その運動を観測した. 実験装置の概略を7図に示す. 右端のピストンに衝撃を加え, 左端の穴から噴出



7 図



8 図

する. このような方法で作られた smoke ring は, およそ vortex ring と同じ運動をすると考えられる.

いろいろな形の穴（8図）について実験を行なった結果、発生した vortex ring の運動の mode から、それらはつぎのように分類される。

A - group : 並進運動,

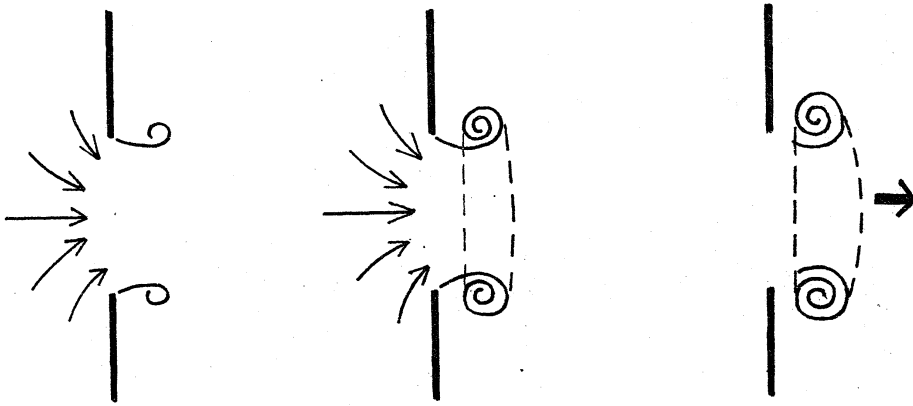
B - group : 並進運動 + ねじれ回転,

C - group : 融合と分裂.

4-1. A - group

円形および円からの変


形がわずかにあるような形の穴から発生する vortex ring は、きれいな円環状となり、図に示すように vorticity の極性から定まる方向に並進運動する。穴は直径 6.0 cm の

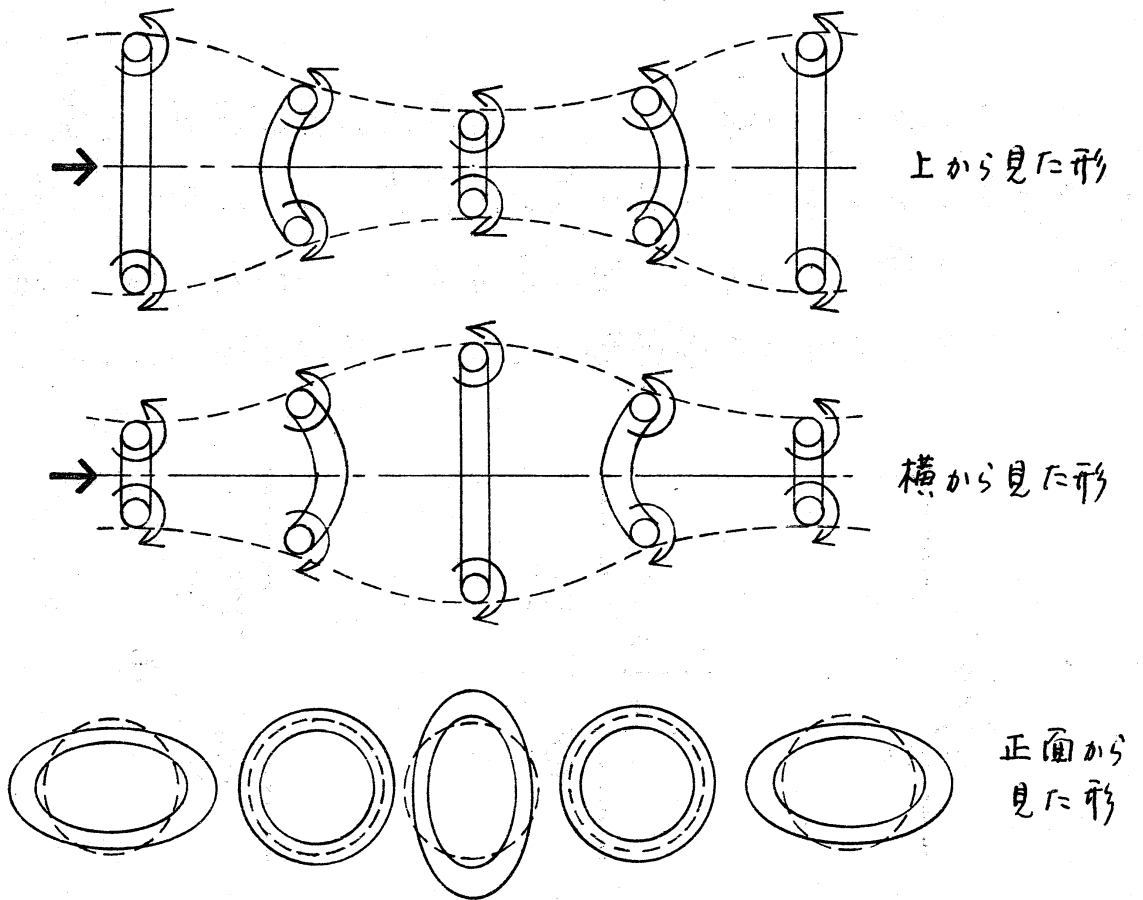


9 図

ものを標準とし、他の形の穴については、その面積がこれと同じになるようにした。円形の穴のばあい、ピストンに与

える衝撃の強さがかなり広範囲に変っても vortex ring は発生するが、穴の形が円形から変形するにつれ、ring を発生させるのに必要な衝撃の強さの範囲が狭くなっていく。

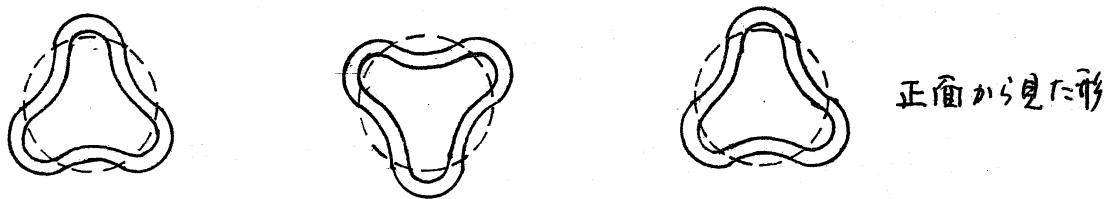
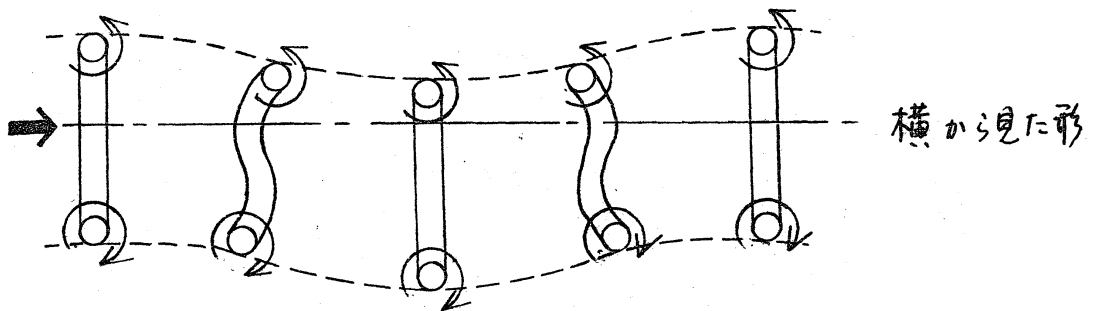
4-2. B-group 角振動数が最も低く、観測がしやすい点から、主として  形の穴について実験を行った。この形の穴から発生した vortex ring は複雑



10 図 $n=2$

な三次元的運動を行ない、その一周期の様子は10図のようになる。さらに角振動数がこれより1つだけ高い \odot 形の穴から発生させた vortex ring の運動の様子は11図のようになる。

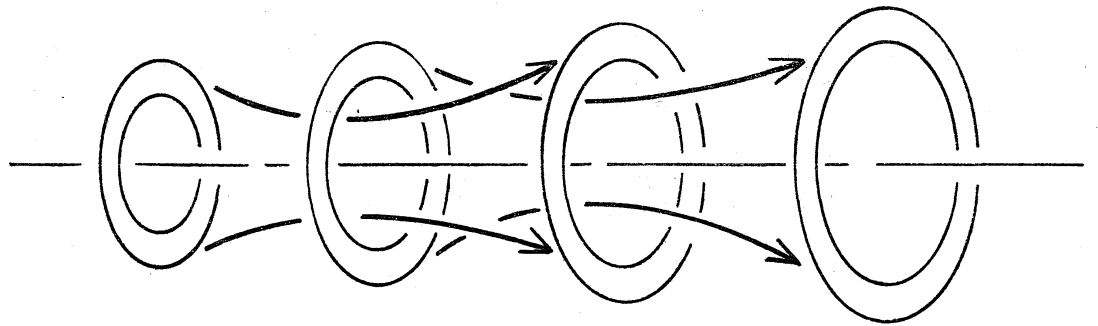
これらの運動は前述のように、vorticity の集中した環の、



11 図 $n=3$

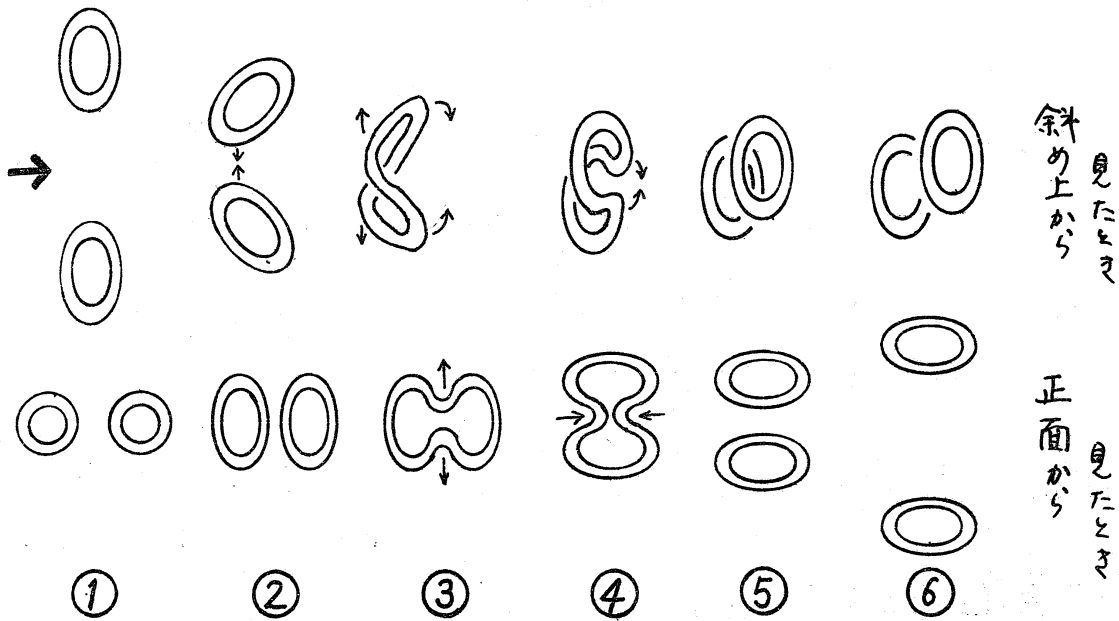
並進運動とねじ回転とが合成されたものである。このような運動を示す vortex ring を発生させるために必要なピストンへの衝撃の強さの範囲は狭く、この範囲外では噴き出された煙は ring にならない。与える衝撃と ring の運動について十分な定量的観測を行ない、2ないが、1例として ring の並進速度は約 60 cm/sec 、振動周期は約 0.3 sec である。

4-3. C-group 2個以上の vortex ring
 が同時に存在すると、相互に影響をおよぼし合い、その運動
 が変化する。一直線上に前後に並んで進行する2個の vortex
 ring が交互に中をくぐり抜けて、追越しをする例はよく知
 られ213 (12図)。



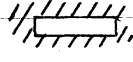
12 図

ここでは、13図に示すように同一平面内に、2個の内径の穴
 をその直径だけ離してあけて、そこから同時に2個の vortex
 ring を発生させ、その運動を観測した。図中で vortex
 ring は水平に並んでおり、左から右に進行している。発生
 時に①の状態にあった2個の vortex ring は進行につれ、
 干渉の結果、互いに接近する(①から②)。ring が接触す
 ると ring 状の2本の vortex line に切りちがいが生じ、
 ③で示されるような形の1個のゆがんだ vortex ring が形
 成される(融合)。一般に曲率のある vortex line は陰法



13 図

線の方に曲率に比例する速度で前進する(2.3式)。したがってこの切りちがいを行なった部分は左右の部分よりも相対的に遅れ、それと共に上下に急速に離れる(③→④)。更に相対的に前進した左右の部分が接触し(④)、ここでも切りちがいが生じ、ringは2個に分れ(分裂)、⑤に示されるように上下方向に進行する。これらの進行方向のなす角は約 30° である。分裂が起る場合はピストンに与える衝撃の強さの範囲は極めて狭い。衝撃の強さによつては、融合したvortex ringが2個に分裂することなく、B-groupが示すmodeと同じ種類の振動を示すばあがある。

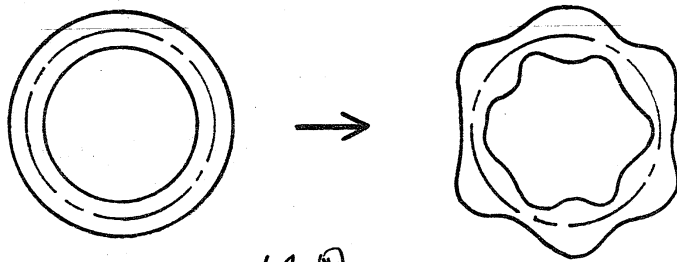
長辺を水平にした  形の穴の場合、適当な衝撃を与えると著しくゆがんだ vortex ring が発生するが、その後は、B-group と同じ種類の運動をすることができると、13 図に示す場合のように直ちに 2 コに分裂することができると、また直ちに 3 コに分裂するときの 3 つの場合がある。この最後のばあい、上下に分裂する 2 コについてはこれらが vortex ring として進行してゆく様子が観測されたが、まん中に発生する残りの 1 コについては、vortex ring になっているかどうか観測できなかった。このばあい上下の 2 コが進行してゆく方向のなす角度は約 50° である。

§5. 安定性

このような vortex ring の運動に対し、種々の mode の攪乱が考えられるが、代表的なものとして次の 3 つをあげることかふきよう。

1. fluted type
2. beaded type (sausage type)
3. twisted type

1 はプラズマ柱の安定性の研究でもよく知られてくるように環の側面に沿うた 2 みぞ型の攪乱で、Dyson [7] により中立安定であることが示されてくる。2 はドーナツ状の smoke



14図

ring が進行するにつれ、環の表面に起伏が生じ、14図に示すように数珠型の環に変化するものゝ、この種の変化が実際に観測されている。3はすゝに10図と11図に示したような環の中心線のねじれ回転に対応するものゝ、これは§3-2で述べたように中立的安定である。2と3についてはJ. J. Thomsonも手がけたといわれるが、明らかでない。

参考文献

- [1] Kelvin (W. Thomson), *Phil. Mag.* 10 155 (1880).
- [2] H. Lamb, *Hydrodynamics*, Ch. VI, Cambridge Univ. Press.
- [3] L. Rosenhead, *Proc. Roy. Soc. (London)*, A127, 590 (1930).
- [4] H. Levy and A. G. Forsdyke, *Proc. Roy. Soc. (London)*,
A120, 670 (1928).
- [5] G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*,
§7.1, Cambridge Univ. Press, 1967.
- [6] F. R. Hama, *Phys. Fluids* 5 1156 (1962).
- [7] F. W. Dyson, *Phil. Trans. A*, clxxxiv. 1041 (1893).
- [8] F. R. Hama, *Phys. Fluids* 6 526 (1963).