数理解析研究所講究録
第140巻 1972年 321-335

多値論理の二,三の応用分野について

宮田昌近
日立製作所中央研究所

1、まえがき

多値論理に関する検討は古くから行なわれているが,その流れはつぎの二つに大別できる。一つは二値論理の拡張として,一般的な考察を行なおうとするものであり,他の一つは応用面からのアプローチである.

応用面からみた場合,多値論理素子で構成されたシステム乃至回路は,内部の構成よりも機能が主として興味の対象となる.したがって,オートマトンによる考察が,多くの場合有力であろう.

本稿では,このような観点にたった具体的な検討の例として,第3章で多値フェイルセイフ順序回路について,また第4章で多値平衡符号に対する符号器について述べる.これらはいずれも発表済みの検討を中心としたものであるが,主として検討の背景について述べる.なお,蛇足になると思われるが,第2章で多値論理の応用分野について述べる.

2. 応用面からみた多値論理

多値論理の応用としては，まず一般のディジタル情報処理装置の実現を考えるべきであるが，ここでは省略する。多値論理の特質を活かした，いくつかの特殊な応用分野について以下に述べる．

(1) speed independent logic への応用

B-3 値論理によって，二値論理回路の静的ハザードを検出する方法が，M. Yoeli らによって提案され，[10] E. B. Eichelberger，稲垣らによって検討されている．[11] なお動的ハザードについてはB-3 値論理は無力であり，三根らの考察のような方法が必要になる．[12]

また，二値の自動タイミング非同期論理回路を，二線式で行なう代りに，三値の論理素子で実現する方法が，三根らによって提案されている．[13]

(2) 多値フェイルセイフ論理回路

B-3 値論理的な，N-フェイルセイフ（E型フェイルセイフ）論理系，およびこの特殊な場合であるC型フェイルセイフ論理系については，高岡，浦野，向殿らの検討がある．[15]-[17] 三値から一般の多値への拡張は容易であり，順序回路に関する検討も高岡らによって行なわれている．[18] なお筆者らは，フェイルセイフ性の拡張を試みた．[19]

(3) 多値符号通信への応用

一般に，多値符号に対する符号器，復号器の構成には，多値論理が適していることは云うまでもない．多値符号としては，古くから検討されている線形の誤り訂正符号，最近検討のさかんな多値平衡符号（直流分のない符号）が主なもので，この他に三根らの非同期伝送のための符号[26]，浅部らの狭帯域化を図った符号[27]などがある．

なお多値平衡符号については，種々の具体的な符号の提案と併行して，多値符号器をオートマトンとして扱った，Franaszek，金谷，安田らの一般的な検討がある．[21]-[23] また筆者は符号構成条件に対応するオートマトンを考え，符号構成を検討した．[24]

(4) アナログ信号のディジタル処理への応用

最近，高速フーリエ変換やアダマール変換（ウォルシュ直交展開），あるいはディジタル・フィルタなど，アナログ信号をディジタル的に処理する技術が脚光をあびている．

概して，このような分野では，二値論理よりも多値論理の方が便利であることも多いと思われる．たとえば，画像の帯域圧縮において，榎本らはアダマール変換を改良した多値の直交行列による変換を用いて，圧縮率の向上を図っている．[32] また村上らは，三値の直交行列による波形解析

を提案している.[31]

しかし,(3),(4)項の分野は,一部を除いて,多値論理と関連づけられた議論はほとんど行なわれていない。その最大の理由は,多値論理素子は未だ実用化には至っていないことであると思われる.

3、広義の多値フェイルセイフ論理回路について.

適当な論理系をなす,多値の非対称誤り素子によって,安全側にしか誤らない回路,すなわちフェイルセイフ論理回路を構成できる。このような場合,論理値の集合に対して,誤りの可能性による順序が導入され,フェイルセイフ論理回路の性質を考察するために,一般に順序集合の上で定義されたオートマトンが用いられる.そして,多値の非対称誤り素子で構成されているという条件は,オートマトンに対する制約として,マクロな形でとらえられる.

筆者らは先に,従来のフェイルセイフ性の定義を拡張して広義のフェイルセイフ順序回路を定義し,その性質について検討した。本章では,その検討の背景を述べ,若干の補足を行なう。

原論文では,オートマトンとしてcsm(Mealy型順序

回路)

$$M=(K,\Sigma,\Delta,\sigma,\delta,q_0) \qquad (1)$$

を用い，Mがa($\in N$：論理値の集合)にしか誤らない非対称誤り素子で構成されているものと考えた．K,Σ,ΔはそれぞれNの直積集合の部分集合であって，たとえば，Kについては，$\forall q_1\in K, \forall q_2\le q_1, q_2\in K$であり，$\Sigma,\Delta$も同様の条件を満たすとする．ただし$q_2\le q_1$は，$q_1$が$q_2$に誤りうることを表わし，$K,\Sigma,\Delta,\sigma,\delta,q_0$はそれぞれ内部状態の集合，入力記号の集合，出力記号の集合，状態遷移関数，出力関数，初期状態を意味する．

そして，Mが従来のフェイルセイフ性の条件

$\forall q_1\in K, \forall q_2\in K, \forall x_1\in\Sigma, \forall x_2\in\Sigma,$

「$q_1\le q_2$ かつ $x_1\le x_2$ ならば

$\sigma(q_1,x_1)\le\sigma(q_2,x_2)$ かつ $\delta(q_1,x_1)\le\delta(q_2,x_2)$」

を満足するとき，fsmであるといい，これに対して，

$\forall q_1\in K, \forall q_2\in K, \forall x\in\Sigma,$

「$q_1\le q_2$ ならば

$\sigma(q_1,x)\le\sigma(q_2,x)$ かつ $\delta(q_1,x)\le\delta(q_2,x)$」

を満足するとき，g-fsmとよんだ．

本章では，g-fsmの概念が導入される過程を少し詳しく述べる。フェイルセイフの本来の意味は，安全側にしか誤ら

ないということであるが，これを定式化する段階において，fsm のような定義が採用された．しかし，数えすぎないカウンタ，あるいは数えもれのないカウンタなどは，本来の意味ではフェイルセイフであると考えられるにもかかわらず，fsm ではない．

それでは，数えもれのないカウンタなどは，適当な非対称誤り素子の存在を仮定しても，構成しえないのかという問題が生じる．答えは否であり，これを例で示す．

正常時の動作が，二値の n 進カウンタである，N－フェイルセイフ論理回路

$$M=(K_0 \cup K_1, \{0,1,a\}, K_0 \cup K_1, \sigma, \delta, 0) \quad (2)$$

$$K_0=\{0, 1, \cdots, (n-1)\} \quad (3)$$

を考える．ここで K_0 は正常な状態の集合であり，$q \in K_0$，$x \in \{0,1\}$ に対しては，

$$\sigma(q,x) \equiv q+x, \bmod n \;;\; \delta(q,x)=q \quad (4)$$

であるとする．M が数えもれのないカウンタであるということは，$q \in K_0$ に対して，

$$\sigma(q,a) \equiv q+1, \bmod n \quad (5)$$

となることである．

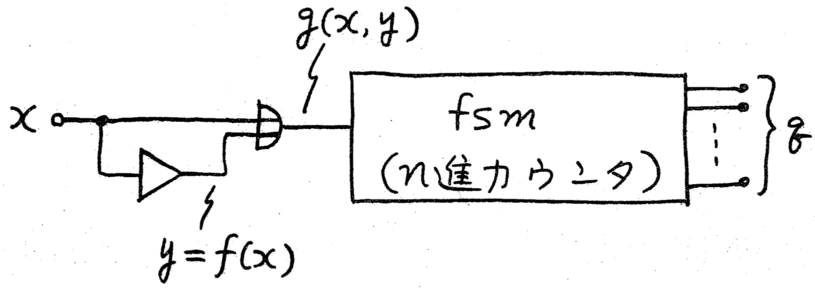
このとき，$\sigma(q,a) \leq \sigma(q,0)$ ではないから，M は fsm ではないが，適当な論理系によって，下図のように実現でき

3．図において，$f(x)$，$g(x,y)$ は

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x=a)\\ a & (x\neq a)\end{cases} \qquad (6)$$

$$g(x,y)=\begin{cases}1 & (x=1 \text{ or } y=1)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases} \qquad (7)$$

であるとする．



この場合，入力端子は一つで，かつ誤り入力に対する状態遷移や出力は，ある正常入力に対するものと一致しているため，構成は極めて簡単になる．しかし，この例においても，従来の fsm の構成理論には見られなかった，構成上の特徴がある．

すなわち，$f(x)$ を出力とする素子は，素子が故障すれば a に誤まることは云うまでもないが，素子が正常で入力が 0 から a に誤った場合，出力は $f(0)=a$ から $f(a)=1$ に誤まることになる．すなわち，局所的にみれば，信号の誤り方は一定していない．なお，二値の場合における，二線論理に

よる構成や，constant weight codeで符号化する構成法でも同様である．

適当な論理系の存在を仮定することによって，一般に任意のg-fsmは実現可能である．g-fsmにおいては，入力の誤りにもとづく状態遷移関数や出力関数への制限は完全に除かれている．なお，状態の誤りにもとづくものはfsmの場合と同じであるが，これは回路内の故障によるものであるから，本質的なものである．

フェイルセイフ・システムを構成する際，適当にサブシステムに分割して構成し，これらを結合するという方針がとられるものと思われる．サブシステムの数が多くなれば，この内で故障が生じる確率よりも，誤り入力が印加される確率の方がかなり大きくなることが予想される．このような場合，サブシステムをg-fsmとして構成することにより，fsmで構成する場合に比べて，概して入力情報の損失がかなり少なくなる．詳細は先の報告によられたい．

g-fsmに関する基本的な性質，たとえば出力記号系列の集合や，状態割当てに必要な記憶素子数等については，先の報告で述べたが，残された検討項目も多い．たとえば，

（1） g-fsmの最簡形式

（2） g-fsmにおける情報損失（fsmの場合に比べて

かなり複雑になる）

（3） g-fsm の相互接続および分解

等が挙げられる．また，論理値の集合 A_i（$\subseteq N$）にしか誤らない素子（$i=1, 2, \cdots, m$）によるフェイルセイフ論理回路の構成法等の問題も考えられる．

4．多値平衡符号に対する符号器

ベースバンドのPCM通信では，現在＋1，0，－1 の3値を用いているが，伝送路の有効利用を図るため，多値PCM方式が注目されている．この際，伝送上の制約から，伝送されるパルス系列は，直流分をもたないこと（平衡条件），タイミング抽出，AGC等が容易なこと，語同期の特性が良好なこと（ブロック符号の場合）等の条件を満たす必要がある．

伝送速度を上げようとする場合，とくに対策を要するのは平衡条件であり，これを満足する符号を平衡符号という．これまでに多くの平衡符号が提案され，これとともに多値符号器をオートマトンとして扱った一般的な考察も二，三行なわれている．

任意の2値パルス系列を，適当な符号構成条件を満足する多値パルス系列に変換する多値符号器を設計する際，符号構

成条件は多値のパルス系列に対する制限条件であるから，パルスの多値数に等しい多値論理系が存在すれば，これを用いることによって設計が容易になることは明らかである．このことは，$GF(q^m)$上の巡回符号や，radix q の AN 符号の符号器，復号器の構成には，q 値論理系が適していることと同様である．

多値符号器をオートマトンとして扱った場合，これが多値論理素子で構成されているか否かということは，前章で述べたフェイルセイフ論理回路の場合等とは異なり，オートマトンの性質にまで影響することはない．しかし，一方，このようなオートマトンにおいては，記号の集合は距離空間をなしている等の特徴があり，これらの特徴を利用した多値論理素子による簡単な構成法等の検討項目が存在する．本章では，多値平衡符号の符号器の概要を紹介し，多値論理の分野に対して二，三の問題提起を行なう．

以下，$2l+1$ 値のパルスの相対振幅の集合を

$$\Sigma_l = \{0, \pm 1, ---, \pm l\} \tag{8}$$

とし，パルスは相対振幅で考える．パルスの系列 $\{x_i\}$ $(-\infty < i < \infty)$ が平衡条件を満足するということは，適当な定数 m（整数とする）が存在して，

$$\forall k, \ \left|\sum_{i=-\infty}^{k} x_i\right| \leq m \tag{9}$$

となることと等価である．なお，mの値はなるべく小さい方が望ましい．

ここで，適当な整数αが存在して，

$$\forall k<\alpha,\ x_k=0 \qquad (10)$$

であるとすると，(9)式の条件は，$x_\alpha x_{\alpha+1}\cdots x_i\cdots$ が，finite-state acceptor

$$A=(K_m\cup\{r\},\ \Sigma_l,\ \sigma,\ 0,\ K_m) \qquad (11)$$

によって受理されるということに等しい．ただし，

$$K_m=\{0,\pm1,\cdots,\pm m\} \qquad (12)$$

$$\sigma(q,x)=\begin{cases} q+x & (q\neq r \text{ かつ } |q+x|\leq m) \\ r & (\text{その他}) \end{cases} \qquad (13)$$

であるとする．なお，$K_m\cup\{r\}$，Σ_l，$\sigma: K_m\cup\{r\}\times\Sigma_l\to K_m\cup\{r\}$，$0$，$K_m$ はそれぞれ状態の集合，入力記号の集合，状態遷移関数，初期状態，最終状態の集合を表わす．K_m，Σ_l を距離空間として考えることにより，状態遷移関数σが(13)式のように極めて簡単な式で定められることに注目されたい．

また，タイミング抽出に関する条件，AGCに関する条件として，それぞれ長さn_tの語*は必ず0以外の記号を含むこと，および長さn_aの語*は必ず記号lあるいは$-l$を含むこと等が考えられる．(* 上記の$x_\alpha x_{\alpha+1}\cdots x_i\cdots$の任意のsubword)

符号語の集合Wに対して，state-independently decodable な，長さnの多値等長ブロック符号に符号化する多値符号器を，csm

$$M=(K, W, \Sigma_\ell^n, \xi, \eta, g_0) \qquad (14)$$

で表わす．仮定により，

$$\eta(g_1, w_1)=\eta(g_2, w_2) \quad ならば \quad w_1=w_2 \qquad (15)$$

である．(9)式の条件のみしか考慮しない場合は，$K=K_m$ $g_0=0$ とし，$\eta(g, w)=x_1x_2\cdots x_n$ に対してξを

$$\xi(g, w)=g+\sum_{i=1}^{n}x_i \qquad (16)$$

と定めればよい．ただしη は(9)式を満足するに適当に定められているものとする．

情報伝送速度を上げようとすると，(9)式の条件のみしか考慮しない場合でも，出力関数ηはかなり複雑になる．(ξは線形であるが，ηは一般に非線形)．なお，nが比較的小さい場合について，伝送速度が最大となるようなηの定め方を先に報告した．[24] タイミング抽出，AGCに対する最も簡単な考慮は，前記の条件において，$n_t=n_a=n$ として，ηを定めることである．しかし通常は$n_a \gg n$ でよく，伝送速度が必要以上に低下する．

上記のような検討に関連して，多値論理の分野に対するつぎのような問題提起を行なう．

（1）多値の信号空間（距離空間）をなすいくつかの集合の正規集合族間の写像を実現するオートマトンの簡単な構成法．

（2）オートマトンの直積分解．とくに線形のものと非線形のものを分離する方法等，信号処理に関係の深いもの．

（3）多値の信号空間上で定義されたいくつかの finite-state acceptor のいずれにも受理されるような語に変換するオートマトンの最簡形式

5．むすび

多値論理を応用面からみる際は，オートマトンによる考察が便利であるが，多値論理素子によって構成されている特徴を，適確に反映する必要がある．

本稿では，二値の場合も含めて，従来のフェイルセイフ論理回路の構成理論では排除されていた点，すなわち局所的にみれば信号の誤まり方が定まっていないような構成を許容することによって，フェイルセイフ性の定義を拡張し，その有用性について述べた．また，多値符号通信への応用として，よく知られているGF(p)上の符号等の他にも，多値論理の応用が期待されることを具体例で示した．

なお，上記の検討に関連して生ずる，いくつかの未検討の項目を挙げた．これらについては，機会をみて検討してみたいと思っている．

文献

(1) 三根，他：信学論，51-C，p.573 (1969)
(2) 三根，島田：信学論，53-C，p.166 (1970)
(3) 三根，長谷川，島田：信学論，54-C，p.66 (1971)
(4) 丸岡，本多：信学研資，$\overset{\mathrm{A}}{\mathrm{IT}}$70-5 (1970-04)
(5) Z.G. Varanesic, et al.：IEEE Trans., C-19, p.964 (1970)
(6) 羽賀，阿部，福村：信学研資，$\overset{\mathrm{A}}{\mathrm{IT}}$70-6 (1970-04)
(10) M. Yoeli and S. Rinon：J. ACM, 11, p.84 (1964)
(11) 杉野，稲垣，福村：信学誌，50，p.997 (1967)
(12) 三根，古賀：信学研資，A67-　(1967-05)
(13) 三根，長谷川，島田：信学論，53-C，p.652 (1970)
(14) 向殿：信学研資，A70-73 (1970-12)
(15) 平山，渡辺，浦野：信学論，52-C，p.33 (1969)
(16) 向殿：信学論，52-C，p.812 (1969)
(17) 高岡：信学論，54-C，p.41 (1971)

(18) 高岡，茨木：信学研資，A IT70-87 71 (1971-1)
(19) 宮田，藤岡：信学論，54-C，p.101 (1971)
(20) 荒谷：信学論，51-A，p.103 (1968)
(21) P.A.Franaszek：BSTJ，47，p.143 (1968)
(22) 金谷：昭43連大，2030
(23) 安田，猪瀬：信学研資，CS70-82 (1970-11)
(24) 宮田：信学研資，IT70-73 (1971-03)
(25) 金谷：信学論，52-A，p.492 (1969)
(26) 三根，長谷川，古賀：信学誌，50，p.2369 (1967)
(27) 浅部，他：信学研資，CS69-41 (1969-09)
(30) 加藤：信学研資，NLP70-14 (1970-11)
(31) 村上，他：昭46信学全大，99.
(32) 榎本，芝田：テレビジョン，24，p.99 (1970)