

q -擬凸な複素 Lie 群について

九大理 風間 英明

松島与三と森本明彦[4]は複素 Lie 群が Stein 群になるための必要十分条件を明らかにした。他方 Andreotti and Grauert[1]は擬凸性の拡張概念である, q -擬凸性, さらに q -完備性について, 詳しく研究した。実は Stein 多様体と 0 -完備な多様体とは全く同じである。この講演では, q -擬凸な複素 Lie 群についての性質を若干調べてみたい。

§1. 準備.

この節で述べる結果は, 松島与三と森本明彦[4], さらに森本明彦[5]において, すでに証明された事であるから, 証明なしで述べる。

定義 1.1. 複素 Lie 群が, 複素多様体としてみたときに, Stein 多様体になるとき, Stein 群と云うことにする。

Stein 群になるための必要十分条件は次によって明らかに

とれる。

定理 1.2. 複素 Lie 群 G に対して次の (1) ~ (6) は同値である。

- (1). G は Stein 群である。
- (2). G の中心は Stein 群である。
- (3). G の中心の単位元を含む連結成分は複素 Lie 群として $\mathbb{C}^l \times \mathbb{C}^{*,m}$, $m, l \geq 0$, に同型である。
- (4). G の極大コンパクト部分群 K に対して, その Lie 環を $\mathfrak{k}$ とおくとき, $\mathfrak{k} \cap \sqrt{-1}\mathfrak{k} = \{0\}$ となる。
- (5). G は G の大域的な正則函数によって分離される。すなわち, $x, y \in G$ ($x \neq y$) とするとき $f \in H^0(G, \mathcal{O})$ が存在し, $f(x) \neq f(y)$ を満足する。
- (6). G の各点での局所座標は G 上の大域的な正則函数によって与えられる。すなわち, G の任意の点 x に対して, $F \in H^0(G, \mathcal{O})^n$, $n = \dim_{\mathbb{C}} G$, が存在し, F は x で G の局所座標を与える。

松島与三と森本明彦はこの定理 1.2. を用いて, 「底と fibre が Stein の様体なる fibre bundle は Stein の様体になる」という Serre の与えた問題に肯定的に答えた。この結果は

必要なので次に述べる。

定理 1.3. Serre の問題は次の場合に解ける。

- (1). 構造群が連結のとき。
- (2). 主 fibre bundle のとき。

森本明彦[5]は任意の連結複素 Lie 群 G に対して、 G/G° が Stein 群となるような、最小の閉且つ正規な、複素 Lie 部分群 G° が存在することを示した。さらに森本明彦[5]は、non-compact 複素 Lie 群で、大域的な正則関数が定数しか存在しない例を作った。一方 G° も、大域的な正則関数は定数しか存在しない。したがって部分群 G° は限るすしもコンパクトとは限らない。次の補題 1.4 により、 G° 及び G の性質が明らかになる。詳しい証明は森本明彦[5]にまかせることにして、ここでは簡単な証明を手取るのみで済ます。

補題 1.4. 連結複素 Lie 群 G に対して、

$$G^\circ = \{a \in G : f(a) = f(e) \text{ for all } f \in H^0(G, \mathbb{C})\}$$

と置く、但し e は G の単位元を表わす。このとき G° は次の

(1) から (6) 迄の性質をもつ。

- (1). G° は閉且つ正規な複素 Lie 部分群である。
- (2). G/G° は Stein 群である。
- (3). もし閉且つ正規な複素 Lie 部分群 N で、 G/N が Stein 群とな

るものが存在すれば, $G^0 \subset N$ をみたら。(最小性)

(4). G^0 は連結である。

(5). G^0 は G の中心に含まれる。したがって特に可換である。

(6). G^0 上正則な関数は定数に限る。

証明. (1) $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^0$ をそれぞれ G, G^0 の Lie 環とする。このとき $\mathfrak{g}^0$ が $\mathfrak{g}$ の複素 Lie 部分環であることを示す。今 $X \in \mathfrak{g}^0$ とし $Y = \sqrt{-1}X \in \mathfrak{g}$ とおく。 V を複素平面 $\mathbb{C}$ の原点 0 の十分小さな連結近傍とする。このとき $\varphi: V \rightarrow G$ を

$$\varphi(x + \sqrt{-1}y) = \exp x X \exp y Y \quad (x + \sqrt{-1}y) \in V$$

で与えると, φ は正則写像である。そこで $f \in H^0(G, \mathbb{C})$

$$\text{に対して,} \quad f_0(x + \sqrt{-1}y) = f(\exp x X \exp y Y)$$

とみると, f_0 は V 上の正則関数であり, $X \in \mathfrak{g}^0$ より,

$\exp x X \in G^0$ だから $f_0(x) = f_0(0)$, したがって一致の定理によ

り $f_0(z) = f_0(0) \quad z \in V$ を得る。したがって

$$f(\exp y Y) = f(e) \quad \text{for all } f \in H^0(G, \mathbb{C})$$

これは $Y \in \mathfrak{g}^0$ となることを示す。

(2). $\pi: G \rightarrow G/G^0$ を自然な射影とする。 π は, 全射,

$$\pi_*: H^0(G, \mathbb{C}) \rightarrow H^0(G/G^0, \mathbb{C})$$

をひき起す。これより $H^0(G/G^0, \mathbb{C})$ は G/G^0 の点を分離すること

がわかり, 定理 1.2. (5) より G/G^0 は Stein 群となる。

(3). π を G から G/N への自然な射影としておく。もし $a \notin N$

ならば, 仮定より $\hat{f} \in H^0(G/N, G^0/N)$ が存在し,

$$\hat{f}(\hat{\pi}(a)) \neq \hat{f}(\hat{\pi}(e))$$

となる。したがって $f = \hat{f} \circ \pi \in H^0(G, G^0)$ とおくことに
 する。 $a \notin G^0$ となることかわかる。つまり $G^0 \subset N$ 。

(4). G_c^0 を G^0 の単位元を含む連結成分とする。そうすると,
 G/G_c^0 は G/G^0 の被覆群であり, G/G^0 は Stein 群であるから, K. Stein
 [7] の結果から, G/G_c^0 はやはり Stein 群となる。よって (3) より,
 $G^0 = G_c^0$ を得る。

(5). Z を G の中心とする。 G の随伴表現を考えることにより
 G/Z は複素線型 Lie 群となる。したがって 松島-森本 [4] の結果
 より, G/Z は Stein 群となる。よって $G^0 \subset Z$ 。

(6). $(G^0)^0 = \{a \in G^0 : f(a) = f(e) \text{ for all } f \in H^0(G^0, G^0)\}$

とおくと, $(G^0)^0$ は G の閉且, 正規な複素 Lie 部分群となること
 かわかる。又, $G/(G^0)^0$ は底を G/G^0 , 構造群を $G^0/(G^0)^0$ とする, 主
 bundle と考えられる。よって 定理 1.3. (2) より $G/(G^0)^0$ はやはり
 Stein 群となり, $G^0 = (G^0)^0$ となる。

q. e. d.

定理 1.8. ([5]. Th. 2). 補題 1.4. と同じ仮定の下で, 次の (1) ~ (3)
 の条件は同値である。

(1). G は正則凸である。

(2). G^0 はコンパクトである。

(3). k を G の極大コンパクト部分群 K の $\mathcal{L}$ -環とすると、

$$\mathfrak{g}^0 = k \cap \mathcal{L}k$$

但し、 $\mathfrak{g}^0$ は G^0 の $\mathcal{L}$ -環となる。

証明. (1) $\Rightarrow$ (2). G^0 を非コンパクトと仮定する。 G^0 の定義から、 e を G の単位元とすると、コンパクト集合 $\{e\}$ の正則凸被 $\hat{\{e\}}$ は丁度 G^0 となる。したがって G は正則凸でない。

(2) $\Rightarrow$ (1). G は底を G/G^0 , fibre を G^0 とする主 bundle と考えてよい。 G/G^0 は Stein 群であり、仮定より G^0 はコンパクト、よって G は正則凸となる。

(2) $\Rightarrow$ (3). Z を G の中心とする。そして、 $\mathfrak{g}, \mathfrak{z}$ をそれぞれ G, Z の $\mathcal{L}$ -環とする。そして

$$k_0 = k \cap \mathcal{L}k$$

とおき、 K_0 を $\mathcal{L}$ -環 k_0 をもつ G の複素 $\mathcal{L}$ -部分群とする。

そうすると、 $K_0 \subset K$, よって $K_0 \subset Z$ となる。(詳しくは [5])

したがって K_0 は連結可換群だから、その普遍被覆群は $\mathbb{C}^m$ とし

てよい。 $\exp: \mathbb{C}^m \rightarrow K_0$ $m = \dim_{\mathbb{C}} K_0$ 。そして任意の $f \in H^0(G, \mathbb{C}^0)$ に対して $f_0 = f|_{K_0}$ とし、 $\tilde{f} = f_0 \circ \exp$ と

すると $\tilde{f} \in H^0(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^0)$ 且つ $K_0 \subset K$ なることより、 f_0 は K_0 上有界、よって $\tilde{f}$ も $\mathbb{C}^m$ 上有界。したがって $\tilde{f}$ は定数、よって f_0

も定数となる。すなわち $K_0 \subset G^0$, つまり $k_0 \subset \mathfrak{g}^0$ を得る。

他方、 G^0 がコンパクトだから、 G の極大コンパクト部分群 K

が存在し, $G^\circ \subset K_1$, すなわち $\zeta^\circ \subset k_1$ をみたす。こゝで K_1 の $\mathcal{L}$ -環を k_1 とおいた。よって $\zeta^\circ \subset k_1 \cap \sqrt{k_1}$ となるが, 前半と同じ理由で, $k_1 \cap \sqrt{k_1} \subset \zeta^\circ \subset \zeta$ となる。よって, $\zeta^\circ = k_1 \cap \sqrt{k_1}$ を得る。一方 K_1 と K の共役性より $k_1 \cap \sqrt{k_1} = k_1 \cap \sqrt{k}$ となる。したがって $\zeta^\circ = k \cap \sqrt{k}$ 。

(3) $\Rightarrow$ (2). $\zeta^\circ = k \cap \sqrt{k}$ と仮定すると, $G^\circ \subset K$ 。一方 G° は G で閉, K はコンパクトだから, G° もコンパクトになる。

g. e. d.

§2. q -擬凸, q -完備性について

定義 2.1. M を複素多様体とし, $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}$ を C^∞ -class の函数とすると, φ が M の開集合 D で強 q -多重劣調和であるとは, D の任意の点 x と x での局所座標 $(z_1, \dots, z_n)$ に対して, φ の x に於ける $\mathcal{L}$ -形式

$$L(\varphi, x) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \zeta^i \bar{\zeta}^j, \quad (\zeta^1, \dots, \zeta^n) \in \mathbb{C}^n$$

が少なくとも $n-q$ の正の固有値をもつことである。

さらに複素多様体 M が q -擬凸であるとは, C^∞ -class の函数 $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}$ と M の compact 集合 K が存在して, φ は $M-K$ で強 q -多重劣調和, 且つ任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して,

$$B_c = \{x \in M : \varphi(x) < c\}$$

は M で相対 compact 集合となることである。

さらに M が g -完備であるとは, g -擬凸であって, $K=\emptyset$ とするのとが出来ることとする。又このとき, 後の便宜のため, M が g -完備であるか, $g-1$ 完備ではないとき, 特に, M は丁度 g -完備であると言うことにする。

次の定理は g -擬凸多様体に関する基本的結果である。

証明については Andreotti and Grauert [1]。

定理 2.2. 複素多様体 M と M 上の任意の解析的連続層子に対して, 次の (1), (2), が成り立つ。

(1) M が g -擬凸なるとき, $H^k(M, \mathcal{F})$ は $k \geq g+1$ のとき有限次元である。

(2) M が g -完備なるとき, $H^k(M, \mathcal{F}) = 0 \quad k \geq g+1$ 。

Levi の問題に対する Narasimhan [6] の結果から次が得られる。

定理 2.3. 複素多様体 M に対して, M が 0-完備であることと, Stein 多様体であることは同値である。

§1. における森本, 松島-森本の結果から, 複素 Lie 群が正則凸のときは, g -完備な複素 Lie 群の性質が簡単に調べられる。そのために複素 Lie 群のよく知られた性質につ

いて以下において調べよう。

G を次元 n の複素 Lie 群とする。さらに H を G の閉且つ正規な、次元 q の複素 Lie 部分群とする。 G の標準座標の性質より、次のようなことを云える。 U を G の単位元 e の近傍、 $(z_1, \dots, z_n)$ を U における標準座標とする。このとき、

$$U_1 = \{x \in U : z_1(x) = \dots = z_q(x) = 0\}$$

$$U_2 = \{x \in U : z_{q+1}(x) = \dots = z_n(x) = 0\}$$

とあくと、 $U = U_1 \cdot U_2$, $U \cap H = U_2$, $U_1 \cap U_2 = \{e\}$, $U \cdot H = U \cdot H$ 且つ $U_1 \cdot U_1 \cap H = \{e\}$ を満たす。 $\pi: G \rightarrow G/H$ を自然な射影とする。そうすると G の点列 $\{a_\nu\}$ に対して $\{\pi(a_\nu U_1)\}$ は G/H の local finite な開被覆となる。このとき、任意の $\pi(g) \in \pi(a_\nu U_1)$ に対し、一意的に $x \in U_1$ が存在し、 $\pi(g) = \pi(a_\nu x)$ となる。さらに、 $\pi(g) = \pi(a_\nu x_\nu) = \pi(a_\mu x_\mu)$, $x_\nu, x_\mu \in U_1$ のとき、 $\Phi_{\nu\mu}(\pi(g)) = (a_\nu x_\nu)^{-1} (a_\mu x_\mu)$ とあくと、

$$\Phi_{\nu\mu}: \pi(a_\nu U_1) \cap \pi(a_\mu U_1) \rightarrow H$$

なる正則写像を作られる。さらに、

$$\{\Phi_{\nu\mu}\} \in Z'(\{\pi(a_\nu U_1)\}, \mathcal{O}_H)$$

となる。つまり $\mathcal{O}_H$ は H の正則写像芽の作る、 G/H 上の層を表わす。さらに 1-cocycle $(\{\pi(a_\nu U_1)\}, \{\Phi_{\nu\mu}\})$ によって、一意的に定められる、主 bundle over G/H を $P(G/H, H, \pi)$ と表わすと、全空間 P は G に解析的に

同型となる。全く同様に、 G が実数 Lie 群 $\wedge$ と $\mathbb{R}$ は、 G/H を底、構造群を H とする主 bundle に C^∞ -class 同型となる。

上の事実には注意すると次がすぐにわかる。

命題 2.4. G を正則凸な次元 n の複素 Lie 群とする。このとき、 $G^\circ = \{a \in G : f(a) = f(e) \text{ for all } f \in H^0(G, G\theta)\}$ とすると、次の (1) ~ (3) は同値である。

(1). G は丁度 q -完備である。

(2). $\dim G^\circ = q$

(3). G の極大コンパクト部分群を K とする。さらに K の Lie 環とすると、 $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{k} \cap \mathfrak{H} \mathfrak{k} = q$ 。

証明. 森本の結果定理 1.8. より、(2) $\iff$ (3) はすぐにわかる。又 $G \cong P(G/G^\circ, G^\circ, \pi)$ であることと G° がコンパクトであること、さらに G/G° が Stein 群、つまり 0 -完備であることに注意して、強 q -多重劣調函数に対しても最大値の原理がなり立つので、証明は明らかとなる。詳しく証明は略す。

q.e.d.

§3. Stein 多様体上の主 fibre bundle について

この節の目的は次の定理を示すことである。

定理 3.1. X を Stein 多様体、 G を連結な複素 Lie 群とする。さらに $P(X, G, \pi)$ を X 上の構造群 G をもつ任意の主 fibre bundle とする。このとき $\dim_{\mathbb{C}} G^\circ = q$ であれば、全空

同 P は g -完備となる。

証明. $\dim_{\mathbb{C}} G = n$, $\dim_{\mathbb{C}} X = m$, $\dim_{\mathbb{C}} G^0 = g$ とする。

今 $P(X, G, \pi) = (\{W_\alpha\}, \{F_{\alpha\beta}\})$, 但し, $\{W_\alpha\}$ は X の局所有限な開被覆, $\{F_{\alpha\beta}\} \in Z^1(\{W_\alpha\}, \mathcal{O}_G)$ とする。さらに G を, 底 G/G^0 , 構造群 G^0 とする主 bundle にみたとし T_1 とし,
 $G(G/G^0, G^0, \pi_0) = (\{\pi_0(a_\nu U_i)\}, \{\Phi_{\nu\mu}\})$ とする, この記号は §2 と同じものとする。底 X , 構造群 G/G^0 の主 bundle,
 $P_1(X, G/G^0, \pi_1) = (\{W_\alpha\}, \{\pi_0 \circ F_{\alpha\beta}\})$, さらにこの P_1 を底,
 G^0 を構造群とする主 bundle.

$$P_2(P_1, G^0, \pi_2) = (\{O_{(\alpha, \nu)}\}, \{\Psi_{(\alpha, \nu)(\beta, \mu)}\})$$

ここで, $O_{(\alpha, \nu)} = W_\alpha \times \pi_0(a_\nu U_i) \subset \pi_1^{-1}(W_\alpha)$, 且 $\Psi_{(\alpha, \nu)(\beta, \mu)} = (a_\nu x_\nu)^{-1} \circ F_{\alpha\beta} \circ (a_\mu x_\mu)$ とする, を考えると, 自然に

$P(X, G, \pi)$ は $P_2(P_1, G^0, \pi_2)$ に両正則的に同型となる。
 一方, 補題 1.4. より, G^0 は連結可換であるから, $2g$ 次元の実 Lie 群とみなしたとき, $\mathbb{T}^l \times \mathbb{R}^s$ ($l+s=2g$), $\mathbb{T}$ は実 1 次元 torus, と実 Lie 群として同型である。したがって, $P_2(P_1, G^0, \pi_2)$ は C^∞ -class 主 bundle として $P_3(P_4, \mathbb{R}^s, \pi_3)$ と同型である, 但し $P_4 = P_4(P_1, \mathbb{T}^l, \pi_4)$ は $P_2(P_1, G^0, \pi_2)$ の ν 束起とされる。底 P_1 , 構造群 $\mathbb{T}^l$ の C^∞ -class 主 bundle とする。
 $\mathbb{R}^s$ を構造群とする bundle は常に trivial である。すなわち

$$\Psi_{(\alpha, \nu)(\beta, \mu)} = (\Omega_{(\alpha, \nu)(\beta, \mu)}, \Lambda_{(\alpha, \nu)(\beta, \mu)})$$

$$\Omega_{(\alpha, \nu)}(\beta, \mu) : O_{(\alpha, \nu)} \cap O_{(\beta, \mu)} \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}^d$$

$$\Lambda_{(\alpha, \nu)}(\beta, \mu) : O_{(\alpha, \nu)} \cap O_{(\beta, \mu)} \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}^s$$

と存在し、 $\Lambda_{(\alpha, \nu)} : O_{(\alpha, \nu)} \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}^s$ が存在し、

$\Lambda_{(\alpha, \nu)}(\beta, \mu) = \Lambda_{(\beta, \mu)} - \Lambda_{(\alpha, \nu)}$ on $O_{(\alpha, \nu)} \cap O_{(\beta, \mu)}$ が成り立つ。この $\{\Lambda_{(\alpha, \nu)}\}$ を用いて、 C^∞ -class $\pm$ bundle の同型 $\iota : P_3(P_4, \mathbb{R}^s, \pi_3) \longrightarrow P_4 \times \mathbb{R}^s$ を作れる。 $\iota = \tau$ 。 $\mathbb{R}$ 上の C^∞ -class 函数 $\lambda(x)$ を、 $[-a, a]$ 上で 1、 $\mathbb{R} - (-a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ で 0 とおき $0 \leq \lambda \leq 1$ と考へる。但し $a, \varepsilon > 0$ 。 ι を

$$\gamma(x) = |x|(1 - \lambda(x))$$

とあくと、 $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R})$ 。且、 $\gamma(x) = |x|$: x が十分大のとき、 γ は γ 。 $\iota = \tau$ 。 $P_4 \times \mathbb{R}^s$ 上の C^∞ -class の写像を $\gamma_s(p_4, (x^1, \dots, x^s)) = \sum_{k=1}^s \gamma(x^k)$ ($p_4, (x^1, \dots, x^s) \in P_4 \times \mathbb{R}^s$) と定義する。これにより C^∞ -class の写像

$$\gamma_s \circ \iota : P_2(P_1, G^0, \pi_2) \longrightarrow [0, \infty)$$

を作れる。必要ならば P_1 の被覆 $\{O_{(\alpha, \nu)}\}$ を細分する。これにより、 $O_{(\alpha, \nu)}$ で局所座標 $(z_1^{(\alpha, \nu)}, \dots, z_{m+n-q}^{(\alpha, \nu)})$ が存在し、

$$\sup_{\substack{p_2 \in \pi^{-1}(O_{(\alpha, \nu)}) \\ 1 \leq i, j \leq m+n-q}} \left| \frac{\partial^2 (\gamma_s \circ \iota)}{\partial z_i^{(\alpha, \nu)} \partial z_j^{(\alpha, \nu)}}(p_2) \right| < C_{(\alpha, \nu)} < +\infty$$

と出来る。これは γ_s の作りより、明らかである。一方 $P_1 = P_1(X, G/G^0, \pi_1)$ は定理 1.3.(2) 及び補題 1.4.(2) より

り Stein 多様体で, 定理 2.3. より 0 -完備である。したがって, 強 0 -多重調和函数 $\varphi: P_1 \rightarrow [0, \infty)$ で $\{\varphi < c\}$ が P_1 で相対コンパクト ($c \in [0, \infty)$) となるものがある。そこで $\chi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ を C^∞ -class の凸増加函数とし, $\Phi: P \rightarrow [0, \infty)$ に $\Phi = \chi(\varphi \circ \pi_2) + \sigma \circ \tau$ で定義すると, $\chi'(x)$ が十分大きくなるように取っておくと $\chi(\Phi, x)$ は P の各点 x で $m+n-g$ 個の正の固有値をもつように出来る。さらに, 任意の $c \in [0, \infty)$ に対し,

$$B_c = \{\Phi < c\}$$

が相対コンパクトなことも明らかである。よってこの Φ により $P = P_2(P_1, G^\circ, \pi_2)$ が g -完備となる。

g. c. d.

この定理によりすぐに次のことが得られる。

系 3.2. G を複素 Lie 群とすると, もし $\dim_{\mathbb{C}} G^\circ = g$ ならば, G は g -完備である。

証明. 定理 3.1. において $X = 1$ 点とすればよい。

§4. 複素 Lie 群の g -擬凸性について

Grauert ([3] p.347) は「第 II 可算公理を満足する, 次元 n の複素空間は, 常に $(n-1)$ -擬凸になるであろう。」と予想しているが, 複素 Lie 群に対してこの予想が正しいこ

とこの節で明らかにする。

定理 4.1. 次元 n の任意の複素 Lie 群 G は $(n-1)$ -擬凸である。特に G が非コンパクトならば $(n-1)$ -完備である。

証明. G がコンパクトならば、0-擬凸だから、 $(n-1)$ -擬凸となる。したがって G が非コンパクトのとき $(n-1)$ -完備であることを証明する。 G の各連結成分は両正則的に同型だから、 G は連結として証明してよい。もし $G^\circ \subsetneq G$ ならば、 $\dim_{\mathbb{C}} G^\circ \leq n-1$ となるから、系 3.2. より G は $(n-1)$ -完備となる。したがって $G = G^\circ$ のとき $(n-1)$ -完備となることを示せばよい。このとき G の極大コンパクト部分群を K 、その Lie 環を $\mathfrak{k}$ とすると、 G が非コンパクトなることから、 $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{k} \cap \mathfrak{F} \mathfrak{k} < n$ となる。さらに G が連結可換であることから G は複素 Lie 群として $\mathbb{C}^n/\Gamma$ 、但し Γ は $\mathbb{C}^n$ の discrete 部分群、に同型となる。したがって、この事実と $G = G^\circ$ から、実は G° は $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{k} \cap \mathfrak{F} \mathfrak{k}$ -完備となることを云えるのである。くわしい証明はこゝではしない。

系 4.2. 次元 n の任意の複素 Lie 群 G と、 G 上の解析的連続層 $\mathcal{F}$ に対して、 $\dim H^n(G, \mathcal{F}) < +\infty$ 、特に G が非コンパクトならば、 $H^n(G, \mathcal{F}) = 0$ が成り立つ。

引用文献

- [1] A. Andreotti and H. Grauert, Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes, Bull. Soc. Math. France 90(1962), 193-259.
- [2] H. Grauert, Une notion de dimension cohomologique dans la theorie des espaces complexes, Bull. Soc. Math. France 87(1959), 341-350.
- [3] H. Kazama, q -Complete complex Lie groups and holomorphic fibre bundles over a Stein manifold, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. 26-1(1971), 131-147.
- [4] Y. Matsushima and A. Morimoto, Sur certains espaces fibrés holomorphes sur une variété de Stein, Bull. Soc. Math. France, 88(1960), 137-155.
- [5] A. Morimoto, Non-compact complex Lie groups without non-constant holomorphic functions, Proc. Conf. Complex Analysis, Minneapolis, 1965, 256-272.
- [6] R. Narsimhan, The Levi problem for complex spaces, Math. Ann. 142(1961), 355-365.
- [7] K. Stein, Überlagerungen holomorphvollständiger komplexen Räume, Arch. Math., 7(1956), 354-361.