数理解析研究所講究録
第141巻 1972年 62-86

コホモロジー類が消滅する2次元の複素多様体について

九大 理　梶原 壤二

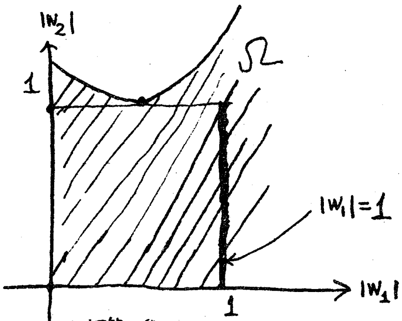
§1. 序

複素Lie群Lに対して，$\mathcal{O}_L$をLに値をもつ正則写像の芽全体の作る群の層とする。Kajiwara [7]はある可換な複素Lie群Lに対して$H^1(\Omega, \mathcal{O}_L)=0$をみたす$\mathbb{C}^2$の領域$\Omega$は正則領域であることを示した。本講演の主な目的は2次元のStein多様体Sの領域Ωが必らずしも可換でないある複素Lie群Lに対して$H^1(\Omega, \mathcal{O}_L)=0$をみたせば$\Omega$はStein多様体であること示すことにある。これは講演者と風間氏との共同研究Kajiwara-Kazama [8]の紹介である。

証明の主要な武器はLie群LとそのLie環$\mathcal{L}$の随伴表現にある。Thullen [12]の領域$\{(z_1, z_2)\in\mathbb{C}^2; |z_1|<1, |z_2|<1\}-\{(0,0)\}$にて様々のコホモロジー集合が消滅しないことを示した後にΩが擬凸であることを示す。するとDocquier-Grauert [4]によりΩはStein多様体となる。

§2. 擬凸領域

本質的でないが，Docquier-Grauert [4] の結果を消化し易いように修正しよう。



φ=恒等写像としたときの絵

$$D=\{(w_1,w_2,\cdots,w_n)\in\mathbb{C}^n;\ |w_1|\leqq 1,\ |w_i|<1\ (i=2,\cdots,n)\}$$

$$\delta D=\{(w_1,w_2,\cdots,w_n)\in\mathbb{C}^n;\ |w_1|=1,\ |w_i|<1\ (i=2,\cdots,n)\}$$

とおく。

つぎの条件をみたす $\mathbb{C}^n$ から $\mathbb{C}^n$ の上への双正則写像 φ は $\mathbb{C}^n$ の開集合 Ω の境界写像とよばれる：

(1) $\varphi(D)$ は Ω の部分集合であるが，相対コンパクトな部分集合でない。

(2) $\varphi(\delta D)$ は Ω の相対コンパクトな部分集合である。

$\mathbb{C}^n$ の開集合 Ω は境界写像をもたないとき，p-凸とよばれる。Ω を $\mathbb{C}^n$ の開集合，v を $\mathbb{C}^n$ の単位ベクトルとしよう。$z\in\mathbb{C}^n$ に対して

$$E(v,z)=\{z+tv\in\mathbb{C}^n;\ t\in\mathbb{C}\}$$

とおく。$d(v,x)$ を Ω の点 x と複素平面 $E(v,x)$ における $E(v,x)\cap\Omega$ の境界との距離としよう。また $d(x)$ を Ω の点 x と $\mathbb{C}^n$ における Ω の境界との距離としよう。分論

$$d(x)=\inf_{v} d(v,x)$$

が成立している。

<u>補題1</u>. $\mathbb{C}^n$ の p-凸領域 Ω に対して，$-\log d(x)$ は Ω で多重劣調和である。

証明. $-\log d(v,x)$ が各 v に対して Ω で多重劣調和であることを示せば十分である。ある v に対して

$$s(x)=-\log d(v,x)$$

が Ω で多重劣調和でないとしよう。v とは異なるある単位ベクトル e と $\mathbb{C}^n$ のある点 z に対して $s(z+te)$ は開集合

$$G=\{t\in\mathbb{C}\,;\ z+te\in\Omega\}$$

にて劣調和でない。Hörmander による劣調和関数の特徴付け（[6]の定理1.6.3）を用いると G 内のある閉円板

$$K=\{t\in\mathbb{C}\,;\ |t-t'|\leqq r\}$$

と t のある多項式 $p(t)$ に対して，∂K では

$$\mathrm{Re}\, p(t)>s(z+te)$$

が K では

$$\operatorname{Re} p(t) \geq \delta(z+te)$$

が K の 1 点 $t^{(0)}$ では

$$\operatorname{Re} p(t^{(0)}) = \delta(z+t^{(0)}e)$$

が成立する。e は零ベクトルではないから $x \in \mathbb{C}^n$ の多項式 $g(x)$ があって

$$p(t) = g(z+te)$$

が成立する.

$$f(x) = \exp(-g(x))$$

は決して零という値をとらぬ整関数である。正数 c, d と $e, v, v_3, \dots, v_n$ が 1 次独立であるようなベクトル $v_3, \dots, v_n$ に対して

$$\varphi_{c,d}(w) = z + (rw_1 + t)e + c f(z+(rw_1+t)e) w_2 v + d w_3 v_3 + \dots + d w_n v_n$$

は $\mathbb{C}^n$ から $\mathbb{C}^n$ の上への双正則写像である。あとは Docquier–Grauert [4] の 112 頁における議論の真似すると適当な c, d に対して $\varphi_{c,d}$ は Ω の境界写像となることを示すことができる。これは Ω の p-凸性に反して矛盾である。故に $-\log d(z)$ は Ω で多重劣調和である。

Ωを複素多様体Mの開集合とする。$\partial\Omega$の点xに対して，xの開近傍Uから$\mathbb{C}^n$の多重円板Vの上への双正則写像ψで$\psi(U\cap\Omega)$が$\mathbb{C}^n$の開集合としてp-凸であるようなものがあるとき，Ωは点xでp^*-凸であるという。補題1とOka [11]によれば，このとき$\psi(U\cap\Omega)$は$\mathbb{C}^n$の正則開集合となる。Ωはその各境界点でp^*-凸のとき単にp^*-凸という。MがStein多様体ならば，Mのp^*-凸開集合は上に述べたようにCartan擬凸，即ちDocquier-Grauert [4]の意味でp_7-凸である。よってDocquier-Grauert [4]によりStein多様体である。要約すると

補題2. Stein多様体のp^*-凸領域はStein多様体である。

§3. Thullenの領域の不滅コホモロジー集合

補題3. Dを連結複素多様体Xの空でない開部分集合，Lを複素Lie群，aとbとを$a<b$をみたす正数とする。

$$U=\{(z,x)\in\mathbb{C}\times D\,;\,|z|<b\}\cup\{(z,x)\in\mathbb{C}\times X\,;\,a<|z|<b\}$$

からLの中への正則写像は

$$V=\{(z,x)\in\mathbb{C}\times X\,;\,|z|<b\}$$

からLの中への正則写像へ接続される。

証明　VはUの正則拡大であるから，講究録のこの巻の

吉田守[13]に発表されている結果を用いて連結集合に関する常套手段で示すことができる。

後述の補題4,5,6,9,10は背理法で証明し，そこにでてくるU,Vは

$$U=\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2;\ |z_1|<1,\ 0<|z_2|<1\}$$

$$V=\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2;\ 0<|z_1|<1,\ |z_2|<1\}$$

をあらわすが，いちいち断わらないことにする。

補題4. 複素数$\lambda\neq 0$に対して，$U\cap V$で

$$\frac{\lambda}{z_1z_2}=f(z_1,z_2)-g(z_1,z_2)$$

をみたすUで正則な関数fとVで正則な関数gはない。

証明. 両辺のLaurent展開の$\frac{1}{z_1z_2}$の係数を調べれば$\lambda=0$となり矛盾である。

補題5. Lを可換複素Lie群，$\exp:\mathbb{C}^m\to L$をLのLie環$\mathbb{C}^m$からLの中への指数写像，Xを$\mathbb{C}^m$の零でないベクトルとする。$W=U\cap V$で

$$\exp\left(\frac{X}{z_1z_2}\right)=fg^{-1}$$

をみたすUからLの中への正則写像fとVからLの中への正

則写像gはない。

証明. Lは可換であると考えてよい。

$$U^{\#}=\{(z_1,u_2)\in\mathbb{C}^2;\ |z_1|<1,\ \mathrm{Re}\,u_2<0\},$$

$$V^{\#}=\{(u_1,z_2)\in\mathbb{C}^2;\ \mathrm{Re}\,u_1<0,\ |z_2|<1\},$$

$$W^{\#}=\{(u_1,u_2)\in\mathbb{C}^2;\ \mathrm{Re}\,u_1<0,\ \mathrm{Re}\,u_2<0\}$$

は，それぞれ，U, V, Wの普遍被覆多様体である．$U^{\#}, V^{\#}$の単連結性より，それぞれ$U^{\#}, V^{\#}$で

$$f(z_1,e^{u_2})=\exp F(z_1,u_2),$$

$$g(e^{u_1},z_2)=\exp G(u_1,z_2)$$

が成立するような$F\in H^0(U^{\#},\mathcal{O}^m)$，$G\in H^0(V^{\#},\mathcal{O}^m)$がある。勿論$\mathcal{O}$は正則関数の芽全体の作る層である。$W^{\#}$も連結であるから，$W^{\#}$で

$$\frac{X}{e^{u_1+u_2}}=F(e^{u_1},u_2)-G(u_1,e^{u_2})+b$$

が成立するような$\exp$の核に属するベクトルbがある。これより$F(e^{u_1},u_2)$，$G(u_1,e^{u_2})$は，それぞれ，変数u_2とu_1に関して周

期$2\pi i$をもつ。したがって$(z_1, z_2) \in U$または$\in V$に対して，それぞれ，$z_2 = e^{u_2}$　$z_1 = e^{u_1}$をみたすu_2, u_1を用いて

$$H(z_1, z_2) = F(z_1, u_2) + b \ , \ K(z_1, z_2) = G(u_1, z_2)$$

とおくと，$H \in H^0(U, \mathcal{O}^m)$と$K \in H^0(V, \mathcal{O}^m)$はうまく定義されている。
$U \cap V$で

$$\frac{X}{z_1 z_2} = H(z_1, z_2) - K(z_1, z_2)$$

が成立するから補題4に反し矛盾である。

補題6.　Bを零でない固有値をもつ(m, m)行列とする。
$U \cap V$で

$$\exp\left(\frac{B}{z_1 z_2}\right) = FG^{-1}$$

をみたす$F \in H^0(U, \mathfrak{a}_{GL(m, \mathbb{C})})$と$G \in H^0(V, \mathfrak{a}_{GL(m, \mathbb{C})})$はない。

証明.　Bの固有値を$\lambda_1 (\neq 0), \lambda_2, \cdots, \lambda_m$としよう。行列式が0でない$(m, m)$行列$P$で$\Lambda = PBP^{-1}$が上三角行列

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{bmatrix}$$

となるようなものがある。これより$U \cap V$で

$$(PF)(PG)^{-1}=\begin{bmatrix}\exp\left(\frac{\lambda_1}{z_1z_2}\right) & & & * \\ & \exp\left(\frac{\lambda_2}{z_1z_2}\right) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \exp\left(\frac{\lambda_n}{z_1z_2}\right)\end{bmatrix}$$

をえる。fとgとを，それぞれ，$(PF)^{-1}$と$(PG)^{-1}$の第1列とすれば，$U\cap V$で

$$\exp\left(\frac{\lambda_1}{z_1z_2}\right)f(z_1,z_2)=g(z_1,z_2)$$

が成立する。行列式が0でない行列の各列は零ベクトルではないので，あるjに対してfの第j成分$f_j(z_1,z_2)$はある点で零でないようにとれる。このときf_jとg_jとは恒等的に零ではない。Thullen [12] より $U\cup V$ ですべての乗法的Cousin分布は解をもつから，$U\cup V$での乗法的Cousin分布$\{(U,f_j),(V,g_j)\}$は解hをもつ。即ち$U\cup V$での正則関数hに対して$h'=\frac{f_j}{h}$と$h''=\frac{g_j}{h}$は，それぞれ，UとVで値零をとらない正則関数である。乗法群$\mathbb{C}^*=\mathbb{C}-\{0\}$に値をもつような正則関数の芽全体の作る層を$\mathcal{O}^*$とすれば，$h'\in H^0(U,\mathcal{O}^*)$と$h''\in H^0(V,\mathcal{O}^*)$は$U\cap V$で

$$\exp\left(\frac{\lambda_1}{z_1z_2}\right)h'(z_1,z_2)=h''(z_1,z_2)$$

をみたすので $L=\mathbb{C}^*$ のときの補題5に反し，矛盾である。

上の方法では B の固有値がすべて零のときは補題6は証明できない。この場合は少しややこしくなるが，以下に述べるようにどうにか切り抜けられる。

補題7. $H(x,y)$ を閉正方形 $[0,1]\times[0,1]$ で連続な関数とする。

$$H_{00}(x,y)=H(x,y)$$

$$H_{p+1\,q}(x,y)=\int_0^x H_{pq}(s,y)\,ds \qquad (p,q\geqq 0)$$

$$H_{p\,q+1}(x,y)=\int_0^y H_{pq}(x,t)\,dt \qquad (p,q\geqq 0)$$

で $[0,1]\times[0,1]$ での連続関数列 $\{H_{pq}(x,y);\ p,q\geqq 0\}$ を定義する。各 $p,q\geqq 1$ に対して

$$H_{pq}(1,1)=0$$

が成立するならば，$H(x,y)$ は $[0,1]\times[0,1]$ で恒等的に零である。

証明. 微積分学の有名な演習問題より $[0,1]\times[0,1]$ で各 $p,q\geqq 1$ に対して

$$H_{pq}(x,y)=\int_0^x\int_0^y \frac{(x-s)^{p-1}(y-t)^{q-1}}{(p-1)!\,(q-1)!}H(s,t)\,ds\,dt$$

をえる。各 $p,q\geqq 1$ に対して $H_{pq}(1,1)=0$ であるから

$$\int_0^1\int_0^1 (1-s)^{p-1}(1-t)^{q-1} H(s,t)\,ds\,dt = 0$$

をえる。$L^2([0,1]\times[0,1])$ で $\{(1-s)^{p-1}(1-t)^{q-1};\ p,q\geqq 1\}$ の張る部分空間は稠密であるから，$H(s,t)$ は $[0,1]\times[0,1]$ で恒等的に零である。

補題8. $\{a_{ij};\ i,j\geqq 0\}$ を正数列 M, r に対して

$$|a_{ij}|\leqq Mr^{i+j} \quad (i,j\geqq 0)$$

をみたす数列とする。各 $p,q\geqq 1$ に対して

$$\sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{a_{ij}}{(p+i)!\,(q+j)!}=0$$

が成立すれば，各 $i,j\geqq 0$ に対して $a_{ij}=0$ をえる。

証明. 次式で定義される整関数列 $\{H_{pq}(z_1,z_2);\ p,q\geqq 0\}$ は次々に積分したものになっている。

$$H_{pq}(z_1,z_2)=\sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{a_{ij}}{(p+i)!\,(q+j)!}z_1^{p+i}z_2^{q+j}$$

仮定より各 $p,q\geqq 1$ に対して $H_{pq}(1,1)=0$ が成立しているから，補題7と一致の定理より $H(z_1,z_2)$ は恒等的に零である。

補題9. 複素数 $\lambda\neq 0$ に対して，$U\cap V$ で

$$h(z_1,z_2)\exp\left(\frac{\lambda}{z_1}+\frac{\lambda}{z_2}\right)=f(z_1,z_2)-g(z_1,z_2)$$

をみたす $U\cup V$ で正則な恒等的に零でない関数 h, U で正則な関数 f, V で正則な関数 g はない。

証明. h は $\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2 ; |z_1|<1, |z_2|<1\}$ で正則になるから，その Taylor 展開

$$h(z_1,z_2)=\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} z_1^i z_2^j$$

を上式に代入し，上式の両辺を Laurent 展開し $\frac{1}{z_1^p z_2^q}$ の係数を調べると，各 $p,q\geqq 1$ に対して

$$\sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{a_{ij}\lambda^{i+j}}{(p+i)!\,(q+j)!}=0$$

をえる。補題8より h は恒等的に零となり矛盾である。

補題10. B を零行列でない (m,m) 行列で，その固有値はすべて零であるとする。$U\cap V$ で

$$\exp\left(h(z_1,z_2)\exp\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right)B\right)=FG^{-1}$$

をみたすような $U\cup V$ で正則な恒等的に零ではない正則関数 h, $F\in H^0(U,\mathcal{O}_{GL(m,\mathbb{C})})$, $G\in H^0(V,\mathcal{O}_{GL(m,\mathbb{C})})$ はない。

証明. $U\cap V$ で

$$k(z_1,z_2)=h(z_1,z_2)\exp\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right)$$

とおく。行列式が零でない (m,m) 行列 P を適当にとり $\Lambda=PBP^{-1}$

をJordanの標準形

$$\Lambda=\begin{bmatrix} 0 & \rho_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \rho_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_3 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \rho_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

に直し，対角線の一つ上の斜線の要素 $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_{m-1}$ のみが零でない可能性をもつようにし，しかも $\rho_1=1$ で各 ρ_i は 0 または 1 であるようにできる。この Λ の性質を用いて，直接整級数展開を計算して

$$\exp(t\Lambda)=\begin{bmatrix} 1 & t\rho_1 & \dfrac{t^2\rho_1\rho_2}{2!} & \cdots & \dfrac{t^{m-1}\rho_1\rho_2\cdots\rho_{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & t\rho_2 & \cdots & \dfrac{t^{m-2}\rho_2\rho_3\cdots\rho_{m-1}}{(m-2)!} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t\rho_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

という上三角行列をえるが，我々が必要なのは第1列と第2列だけである。$U\cap V$ で

$$\exp(\hbar\Lambda)=(PF)(PG)^{-1}$$

が成立している。$(PF)^{-1}$ と $(PG)^{-1}$ の (i,j) 成分を，それぞれ，f_{ij} と g_{ij} とおくと，これらは U と V で正則な関数である。U の定点で $(PF)^{-1}$ なる行列の第1列は零ベクトルでないから，ある p に対してその第 p 成分は零でない。即ち f_{p1} は恒等的に零ではない。$U\cap V$ で

$$f_{p1}=g_{p1}\ ,\ f_{p1}\hbar+f_{p2}=g_{p2}$$

をえる。これより

$$h=\begin{cases} f_{p1}\ , & U\text{では} \\ g_{p1}\ , & V\text{では} \end{cases}$$

で h を定義すると，h は $U\cup V$ でうまく定義された恒等的に零でない正則関数であり $g_{p2}\in H^0(V,\mathcal{O})$, $f_{p2}\in H^0(U,\mathcal{O})$ に対して $U\cap V$ で

$$h\hbar=g_{p2}-f_{p2}$$

が成立し，補題9に反し矛盾である．

§4. Stein 多様体の領域

B を零行列でない (m,m) 行列とする。複素多様体 M は次の条

件をみたすときB－正規という：

Mの任意の開被覆$\mathfrak{U}=\{U_i; i\in I\}$と任意の$\{f_{ij}\}\in Z^1(\mathfrak{U},\mathcal{O})$に対して，$\{G_i\}\in C^0(\mathfrak{U}, GL(m,\mathbb{C}))$があって$\{\exp(f_{ij}B)\}\in Z^1(\mathfrak{U}, GL(m,\mathbb{C}))$は$\{G_i\}$のコバウンダリーである。

補題11．　次の条件(1)，(2)，(3)のどれか一つをみたす2次元のStein多様体Sの領域ΩはP^*－凸である：

(1)　零行列でないある(m,m)行列Bに対して，ΩはB－正規である。

(2)　ある可換複素Lie群に対して$H^1(\Omega,\mathcal{O}_L)=0$が成立する。

(3)　Ωでのすべての加法的Cousin分布は解をもつ。

証明．　背理法による。Ωがそのある境界点x_0でP^*－凸でないとしよう。x_0での局所座標はSでの大域的正則関数f_1，f_2であたえられる。即ち(f_1,f_2)はある正数Aに対して

$$\{x\in S;\ |f_1(x)|<3A,\ |f_2(x)|<3A\}$$

のx_0を含む連結成分U'で座標系をなす。写像Ψを

$$\Psi(x)=(z_1,z_2)=(f_1(x),f_2(x))$$

で定義すると，ΨはU'を多重円板

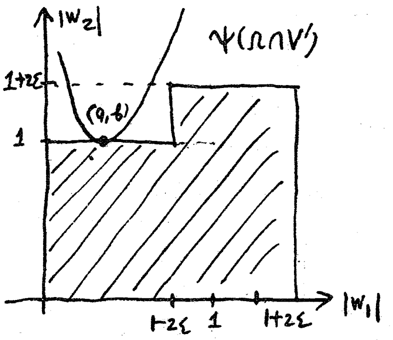
$$U=\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2;\ |z_1|<3A,\ |z_2|<3A\}$$

の上に双正則にうつす。

$$V'=\{x\in U';\ |f_1(x)|<A,\ |f_2(x)|<A\}$$

$$V=\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2;\ |z_1|<A,\ |z_2|<A\}$$

とおく。Ωはその境界点x_0でp-凸でないから，$\mathbb{C}^2$の開集合$\psi(\Omega\cap V')$は$\mathbb{C}^2$のp-凸領域ではない。定義より次の条件をみたす$\mathbb{C}^2$から$\mathbb{C}^2$の上への双正則写像φがある：



φ=恒等写像としたときの絵
実際は　が少しまがるが本質的には同じなのがp-凸性のよさ

(a)
$$D=\{(w_1,w_2)\in\mathbb{C}^2;\ |w_1|<1+2\varepsilon,\ |w_2|<1\}$$
$$\cup\{(w_1,w_2)\in\mathbb{C}^2;\ 1-2\varepsilon<|w_1|<1+2\varepsilon,\ |w_2|<1+2\varepsilon\}$$

に対して$\varphi(D)\subset\psi(\Omega\cap V')$が成立する。

ただし$0<\varepsilon<\frac{1}{2}$。

(b)
$$E=\{(w_1,w_2)\in\mathbb{C}^2;\ |w_1|<1+2\varepsilon,\ |w_2|<1+2\varepsilon\}$$

に対して$\varphi(E)\subset V$が成立する。

(c)
$$z^{(0)}=(a,b)\in\partial(\psi(\Omega\cap V'))\ ,\ |a|\leqq 1-2\varepsilon\ ,\ |b|=1$$

をみたす$(a,b)\in\mathbb{C}^2$がある。

φは$\mathbb{C}^2$から$\mathbb{C}^2$の上への双正則写像であるから，

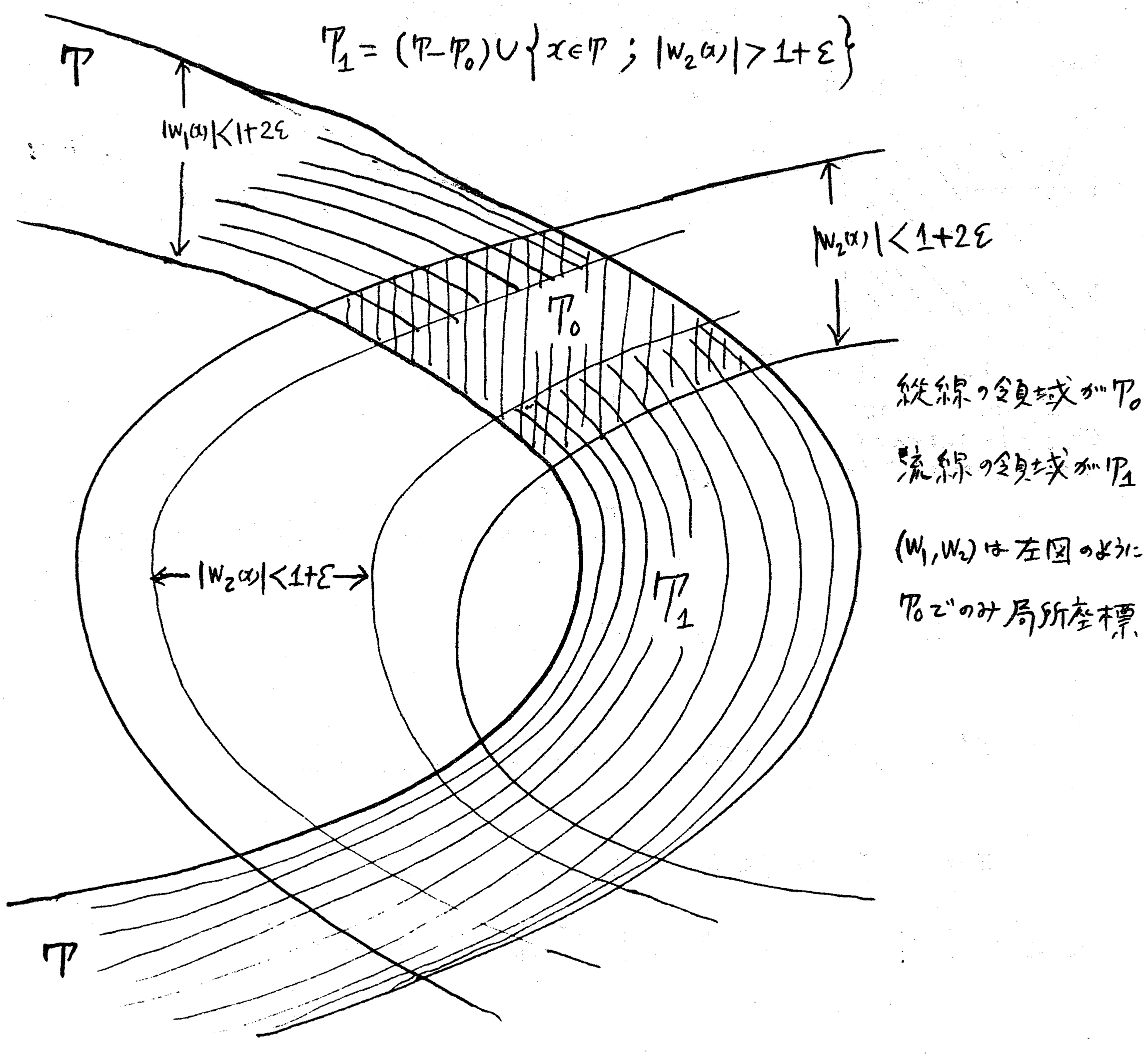
$$(w_1(x), w_2(x)) = \varphi^{-1}(f_1(x), f_2(x))$$

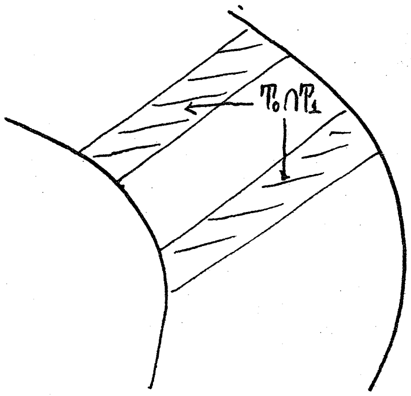
で S 上の正則関数 $w_1(x)$ と $w_2(x)$ を定義する。次のようにおこう。

$$\mathcal{P} = \{x \in S\,;\ |w_1(x)| < 1+2\varepsilon\},$$

$$\mathcal{P}_0 = \{x \in V'\,;\ |w_1(x)| < 1+2\varepsilon,\ |w_2(x)| < 1+2\varepsilon\},$$

$$\mathcal{P}_1 = (\mathcal{P} - \mathcal{P}_0) \cup \{x \in \mathcal{P}\,;\ |w_2(x)| > 1+\varepsilon\}$$





$$u(x)=\frac{1}{w_2(x)-b}$$

は$\mathcal{P}_0\cap\mathcal{P}_1$で正則である。$\mathfrak{U}=\{\mathcal{P}_0,\mathcal{P}_1\}$は$\mathcal{P}$で開被覆で$u$は$Z^1(\mathfrak{U},\mathcal{O})$の元をあたえる。$\mathcal{P}$はStein多様体であるから$Z^1(\mathfrak{U},\mathcal{O})=B^1(\mathfrak{U},\mathcal{O})$が成立している。したがって$\mathcal{P}_0\cap\mathcal{P}_1$で

$$u(x)=p(x)-h(x)$$

をみたすような$h\in H^0(\mathcal{P}_0,\mathcal{O})$と$p\in H^0(\mathcal{P}_1,\mathcal{O})$がある。

$$v(x)=\begin{cases} p(x), & x\in\mathcal{P}_1 \text{ のとき} \\ \dfrac{1}{w_2(x)-b}+h(x), & x\in\mathcal{P}_0 \text{ のとき} \end{cases}$$

でvを定義すると、vは$\mathcal{P}$でうまく定義された有理型関数となる。

$$\Omega_0=\{x\in\Omega\cap\mathcal{P}_0\,;\,w_2(x)\neq b\}\cup(\Omega\cap(\mathcal{P}-\mathcal{P}_0))$$

$$\Omega_1=\{x\in\Omega\,;\,w_1(x)\neq a\}$$

とおくと，$\mathcal{V}=\{\Omega_0 \cap \Omega_1\}$ は Ω の開被覆である。

$$D_0=\{(w_1,w_2)\in D\,;\, w_2\neq b\},\ D_1=\{(w_1,w_2)\in D\,;\, w_1\neq a\}$$

$$E_0=\{(w_1,w_2)\in E\,;\, w_2\neq b\},\ E_1=\{(w_1,w_2)\in E\,;\, w_1\neq b\}$$

とおく。

(1)の1。零でない固有値をもつ行列 B に対して，Ω が B−正規のとき。

$$k(x)=\frac{v(x)}{w_1(x)-a}$$

は $\Omega_0\cap\Omega_1$ で正則な$\mathcal{T}$で有理型な函数である。したがって k は $Z^1(\mathcal{V},\mathcal{O})$ の元をあたえる。仮定より Ω は B−正規であるから，$\Omega_0\cap\Omega_1$ で

$$\exp(k(x)B)=G_0G_1^{-1}$$

をみたすような $G_0\in H^0(\Omega_0,\mathcal{O}_{GL(m,\mathbb{C})})$ と $G_1\in H^0(\Omega_1,\mathcal{O}_{GL(m,\mathbb{C})})$ がある。それぞれ D_0 と D_1 で

$$g_0(w_1,w_2)=G_0\circ(\psi|V)^{-1}\circ\varphi$$

$$g_1(w_1,w_2)=\exp\left(\frac{h\circ(\psi|V)\circ\varphi}{w_1-a}B\right)\left(G_1\circ(\psi|V)^{-1}\circ\varphi\right)$$

とおくと，$g_0 \in H^0(D_0, \mathcal{O}_{GL(m,\mathbb{C})})$ と $g_1 \in H^0(D_1, \mathcal{O}_{GL(m,\mathbb{C})})$ は $D_0 \cap D_1$ で

$$\exp\left(\frac{B}{(w_1-a)(w_2-b)}\right) = g_0 g_1^{-1}$$

をみたす。

$$g_0(w_1, w_2) = \exp\left(\frac{B}{(w_1-a)(w_2-b)}\right) g_1(w_1, w_2)\ .$$

の左辺と右辺の定義域の合併で g_0 は正則であるから，g_0 は

$$\{(w_1,w_2) \in \mathbb{C}^2;\ |w_1| < 1+2\varepsilon,\ |w_2| < 1\}$$
$$\cup \{(w_1,w_2) \in \mathbb{C}^2;\ 1 < |w_1| < 1+2\varepsilon,\ |w_2| < 1+2\varepsilon,\ w_2 \neq b\}$$

で正則である。したがって補題3より g_0 は $H^0(E_0, \mathcal{O}_{GL(m,\mathbb{C})})$ の元へ接続される。同様にして g_1 も $H^0(E_1, \mathcal{O}_{GL(m,\mathbb{C})})$ の元へ接続される。E は点 (a,b) の近傍で $E_0 \cup E_1 = E - \{(a,b)\}$ であるから，これは補題6に反し矛盾である。

(1)の2。　固有値がすべて零である行列 B に対して Ω が B-正規のとき。

$$h(x) = \exp\left(\frac{1}{w_1(x)-a} + v(x)\right)$$

に対して，(1)の1と同様の議論をすれば，補題10に反する矛盾に達する。

(2) 可換複素 Lie 群 L に対して $H^1(\Omega, \mathcal{O}_L)=0$ のとき。

指数写像 $\exp: \mathbb{C}^m \to L$ と $\mathbb{C}^m$ の零でないベクトル X に対して (1) の 1 で定義した $h(x)$ を用いて

$$\exp(h(x)X) = G_0 G_1^{-1}$$

なる $G_0 \in H^0(\Omega_0, \mathcal{O}_L)$ と $G_1 \in H^0(\Omega_1, \mathcal{O}_L)$ を考える。あとは (1) の 1 と同様の議論をすると補題 5 に反する矛盾に達する。

(3) Ω ですべての加法的 Cousin 分布が解をもつとき。

(1) の 1 の h に対して加法的 Cousin 分布 $\{(\Omega_0, h_1(x)), (\Omega_1, 0)\}$ の解 $G_1(x)$ は Ω で有理型で，Ω_1 では正則で，Ω_0 では $G(x)=h(x)-G_1(x)$ が正則である。あとは (1) の 1 と同様の議論をくり返すと補題 4 に反する矛盾に達する。

§5. 主定理

M を複素多様体，L を複素 Lie 群とする。$H^1(M, \mathcal{O}_L)$ が単純な元しかもたぬとき，いいかえれば，M 上の L を構造群とするすべての解析的主ファイバー・バンドルが解析的に単純のとき，$H^1(M, \mathcal{O}_L)=0$ とかく。

<u>補題 12</u>. X を連結複素多様体，L を複素 Lie 群，L_1 を L の単位元を含む連結成分のなす複素 Lie 群とする。$H^1(X, \mathcal{O}_L)=0$ ならば $H^1(X, \mathcal{O}_{L_1})=0$ である。

証明. $\mathcal{T}$ の連結性を用いて常套手段で証明できる。

定理. Ω を2次元の Stein 多様体の領域，L を複素 Lie 群とする。$H^1(\Omega, \mathcal{O}_L)=0$ ならば，Ω は Stein 多様体である。

証明. 補題12より L は連結であると仮定してよい。また補題2より Ω が擬凸であることを示せばよい。L が可換なときは補題11の(2)より Ω は擬凸であるから，L は可換でないと仮定してよい。L の次元を m とし，$gl(m, \mathbb{C})$ と $\mathcal{L}$ とを，それぞれ，$GL(m, \mathbb{C})$ と L の Lie 環とする。また $\exp: gl(m, \mathbb{C}) \to GL(m, \mathbb{C})$ と $\exp: \mathcal{L} \to L$ を指数写像，$ad: \mathcal{L} \to gl(m, \mathbb{C})$, $Ad: L \to GL(m, \mathbb{C})$ を随伴表現とする。任意の $t \in \mathbb{C}$ と $X \in \mathcal{L}$ に対して

$$Ad \exp(tX) = \exp(t\, ad X)$$

が成立している。L は可換でないから，$B = ad X$ が零行列でないような $X \in \mathcal{L}$ がある。$\mathfrak{U}$ を Ω の開被覆，$\{f_{ij}\}$ を $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ の元とする。$H^1(\Omega, \mathcal{O}_L)=0$ であるから，$\{\exp(f_{ij}X)\} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_L)$ は $C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_L)$ の元 $\{F_i\}$ のコバウンダリである。すると $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{GL(m,\mathbb{C})})$ の元 $\{\exp(f_{ij}B)\}$ は $C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{GL(m,\mathbb{C})})$ の元 $\{Ad F_i\}$ のコバウンダリである。よって Ω は B-正規となり，補題11の(1)より Ω は擬凸である。

系1. Ω を2次元 Stein 多様体の領域とする。Ω でのすべての加法的 Cousin 分布が解をもつための必要十分条件は Ω が

Stein多様体であることである。

系2. Ωを2次元のStein多様体の領域とし，Lを連結可換複素Lie群，ΓをLの基本群とする。$H^1(\Omega, \mathfrak{O}_L)=0$が成立するための必要十分条件は$\Omega$が$H^2(\Omega, \mathfrak{O}_L)=0$をみたすStein多様体であることである。

証明 完全列

$$\cdots \to H^1(\Omega, \mathcal{O}^m) \to H^1(\Omega, \mathfrak{O}_L) \to H^2(\Omega, \Gamma) \to H^2(\Omega, \mathcal{O}^m) \to \cdots$$

と定理を眺めればよい。

複素Lie群Lに値をもつ連続写像の芽全体の作る層を$\mathcal{C}_L$とかくと，定理とGrauert [5]による岡の原理の肯定的解答より

系3. Ωを2次元のStein多様体の領域，Lを複素Lie群とする。$H^1(\Omega, \mathfrak{O}_L)=0$が成立するための必要十分条件は$\Omega$が$H^1(\Omega, \mathcal{C}_L)=0$をみたすStein多様体であることである。

16頁のDは位相的に1点に縮めることができる$\mathbb{C}^2$の領域であるから$H^1(D, \mathcal{C}_L)=0$が任意の複素Lie群Lに対して成立する。もしも$H^1(D, \mathfrak{O}_L)=0$となれば，定理よりDは正則領域となり矛盾である。したがって任意の複素Lie群Lに対して$H^1(\Omega, \mathfrak{O}_L) \neq 0$が成立する。よって標準写像$H^1(\Omega, \mathfrak{O}_L) \to H^1(\Omega, \mathcal{C}_L)$は単射でないので，岡の原理は成立しない。Grauert [5]にて底空間がSteinであるという条件は除くことができない。

引用文献

1. H. Behnke und K. Stein, Analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen zur vorgegebenen Null-und Pollstellenflächen, Jber. Deut. Math. Verein. 47(1937), 177-192.

2. H. Cartan, Sur les domaines d'existence des fonctions de plusieurs variables complexes, Bull. Soc. Math. France 59(1931), 46-69.

3. H. Cartan, Les problèmes de Poincaré et de Cousin pour les fonctions de plusieurs variables complexes, C. R. Paris 199(1934), 1284-1287.

4. F. Docquier und H. Grauert, Levisches Problem und Rungescher Satz für Teilgebiets Steinscher Mannigfaltigkeit, Math. Ann. 140(1960), 94-123.

5. H. Grauert, Analytische Faserungen über holomorph-vollständigen Räumen, Math. Ann. 68(1958), 263-273.

6. L. Hörmander, An introduction to complex analysis in several variables, D. Van Nostrand Company, 1966.

7. J. Kajiwara, Some extension of Cartan-Behnke-Stein's theorem, Pub. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ. 2(1966), 133-156.

8. J. Kajiwara and H. Kazama, Two dimensional complex manifolds with vanishing cohomology sets (to appear).

9. K. Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables II ; Domain d'holomorphie, J. Sci. Hiroshima Univ. 7(1937), 115-130.

10. K. Oka, ———— III ; Deuxième problème de Cousin, J. Sci. Hiroshima Univ. 19(1938), 7-19.

11. K. Oka, ———— IX ; Domaines finis sans point critique intérieur, Jap. J. Math. 23(1953), 97-155.

12. P. Thullen, Sur les deuxieme probleme de Cousin, C. R. Paris 200(1935), 720-721.

13. 吉田守, 正則写像の接続について, 数理解析研究所講究録, Cousinの問題 (1972).