

PL多様体の Gauss map と 全曲率について

横濱市大 文理 本間 龍雄

§1 序

n 次元ユークリッド空間 R^n の中に埋め込まれた PL 多様体に対し、全曲率を定義し、その全曲率と多様体の位相構造との関係、あるいは埋め込みのようすを調べようとする試みである。

全曲率は普通の全曲率と絶対全曲率の二種類に分けることができるが、両者とも多次元の角の和として、定義される。

普通の全曲率は Gauss map の写像度に関連し、結局その多様体のオイラーの標数で表現される。絶対全曲率は臨界点を用いて、定義するのが自然と思われるが、その多様体の凸性あるいは unknottedness と関連してくるものと予想される。

§2. 角の和について

M を R^n の n 次元 PL 多様体、 K を M の一つの単体分割とす

る。 Σ が K の任意の単体であるとき, Σ の M に関する角 $\angle(\Sigma, M)$ をつぎのように定義する。 Σ の頂点を p とし,

$S(p, r)$ は p を中心とし, 半径 r の球面で,

$$S(p, r) \cap \text{cl}(M - \text{Int}(\Sigma, K)) = \emptyset$$

であるとき,

$$\angle(\Sigma, M) = \omega(S(p, r) \cap M) / r^{n-1}$$

と置く。ただし ω は面積を表わす。もちろん, $\angle(\Sigma, M)$ の定義は p や r の選ぶ方に無関係である。特に M が n -次元単体 η^n であるときは, つぎの定理が成立つ。

定理 1.
$$\sum_{\Sigma \in \eta^n} (-1)^i \angle(\Sigma^i, \eta^n) = 0$$

この定理は, 三角形の内角の和が二直角であるという初等幾何の定理の拡張である。

$N = \text{cl}(R^n - M)$ で, Σ は K の境界 K の単体であれば, $\angle(\Sigma, M)$ の定義と同様にして, $\angle(\Sigma, N)$ が定義されるが, M がコンパクトな n -次元 PL 多様体であるとき, 定理 1 を用いて, つぎの定理を得る。

定理 2.
$$\sum_{\Sigma^i \in K} (-1)^i \angle(\Sigma^i, N) = \chi(M) \omega(S).$$

ただし, $\chi(M)$ は M のオイラーの標数, S は $n-1$ 次元単位球面である。

§3. Gauss map について

η^n が \mathbb{R}^n の n 次元単体で, Σ^i を η^n の i 次元面, $\hat{\Sigma}^{n-1}$ を Σ^i の対面とすると, η は Σ^i と $\hat{\Sigma}^i$ のジョイント $\eta = \Sigma^i \hat{\Sigma}^i$ と書ける。

$p \in \Sigma^i$, $q \in \hat{\Sigma}^i$ ならば, 単位ベクトル $\frac{\vec{pq}}{|\vec{pq}|}$ を単位球面上の一点と見なして,

$$\hat{\Delta}(\Sigma^i, \eta^n) = \omega \left\{ \frac{\vec{pq}}{|\vec{pq}|} \mid p \in \Sigma^i, q \in \hat{\Sigma}^i \right\}.$$

とよくと

$$\hat{\Delta}(\Sigma^i, \eta^n) = \hat{\Delta}(\hat{\Sigma}^{n-1}, \eta^n)$$

は明らかであるが, さらに下記の定理が成立する。

定理 3 $(-1)^i \hat{\Delta}(\Sigma^i, \eta^n) = \sum_{\Sigma^j < \Sigma^i} (-1)^j \Delta(\Sigma^j, \eta^n)$

$P \in \mathbb{R}^n$ のコンパクト多面体, $H \supset K$ は $\mathbb{R}^n \supset P$ の単体分割で, K は H のフルな部分多面体とする。 $f: H \rightarrow [0, 1]$ は線型写像 (H の各単体上で線型) で, $\Sigma \in K$ ならば $f(\Sigma) = 0$, $\Sigma \in H$, $\Sigma \cap K = \emptyset$ ならば, $f(\Sigma) = 1$ とする。いま, $f^{-1}([0, \frac{1}{2}]) = M$ とすると, M は P の正則近傍であり,

$f^{-1}(\frac{1}{2})$ は M の境界 M であって, それぞれ n -次元, $n+1$ -次元多様体である。

M の各点 x に対し, x を含む M の単体を η とすると, K はフルであるから, $\eta \cap P = \Sigma$ は η の面である。この面を Σ とする。 Σ 上の点 p と Σ 上の点 q が x に対し一意に定まり, x は pq の中点となる。したがって, x に対して, 単位ベクトル $\frac{\vec{pq}}{pq}$ が一意に定まったことにちなから, $f(x) = \frac{\vec{pq}}{pq}$ とおくと,

$$f: M \rightarrow S$$

は正則近傍 M の境界 M から単位球面 S への写像となる。 f の写像度を $\deg(f)$ で表わすと, 定理3を用いて, つぎの定理が証明される。

定理4 $\deg(f) = \chi(P) = \chi(M)$.

§4 絶対全曲率について

$M \subset \mathbb{R}^n$ の中に埋め込まれた *locally flat* な m -次元 P -用多様体とする。 v を \mathbb{R}^n の単位ベクトル, $p \in M$ の点とする。 p を通るかに垂直な $n-1$ -次元超平面 E^{n-1} と M の交わり

M の E^{m-1} が, p にはおいて $m-1$ 次元 PL 球を近傍として
 かつとき, p は v 方向に対し 臨界点 であるという。

$$\widehat{\chi}(p, M) = \frac{1}{2} \omega \{ v \mid v \in S, p \text{ は } v \text{ 方向に対し 臨界点} \}$$

とおくと, p が M の単体分割 K の頂点である場合は, $\widehat{\chi}(p, M) = 0$ である。

$$\underline{\chi}(M) = \sum \{ \widehat{\chi}(p, M) \mid p \text{ は } K \text{ の } \top \text{ 頂点} \}$$

とおくと, $\chi(M)$ は K の選定方によらない。これを M の 絶対全曲率 と呼ぶことにある。この定理は明らかである。

$$\underline{\text{定理 5}} \quad \chi(M) \geq \omega(S)$$

さらにつぎの予想がたえられる。

予想 1. $\chi(M) = \omega(S)$ ならば, M は $m+1$ 次元凸
 体の境界である。

予想 2. $\chi(M) < 2\omega(S)$ ならば, M は m 次元 PL
 球で, unknotted である。