数理解析研究所講究録
第150巻 1972年 49-70

逐次解析の統計的構造

大阪市大 大学院 三浦良造

§1. 序と概論

逐次解析を測度論的に議論することを試みた。

ここでは、seqential procedure の sufficiency, dominatedness, completeness を扱った。

$\mathfrak{X}$ を点 x の集合とする。$\mathfrak{A}$ を $\mathfrak{X}$ の部分集合のつくる σ-field とし、$\mathcal{P}$ を $\mathfrak{A}$ 上の確率測度の集合とする。このような ($\mathfrak{X}, \mathfrak{A}, \mathcal{P}$) を統計空間と呼ぶことにする。

逐次解析は、($\mathfrak{X}, \mathfrak{A}, \mathcal{P}$) において次の (i)(ii)(iii) に従って遂行される行為である。

(i) 各 n ($\neq 0$) について、$\mathfrak{A}_n \subseteq \mathfrak{A}_{n+1}$ である $\mathfrak{A}$ の sub σ-field の列 $\{\mathfrak{A}_n\}_{0\le n\le\infty}$。 但し、$\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_\infty = \mathfrak{A}$ とする。

(ii) 各 n について、$\mathcal{B}_n \subseteq \mathfrak{A}_n$ である σ-field の列 $\{\mathcal{B}_n\}_{0\le n\le\infty}$.

(iii) 各 n について、$a_n(x)$ が $\mathfrak{A}_n$-可測である関数の列 $\{a_n(x)\}_{0\le n\le\infty}$.

但し、$a_n(x)$ は $\mathfrak{X}$ から閉区間 $[0, 1]$ 上への関数で

すべての $x \in \mathfrak{X}$ に対して $\sum_{0 \le n \le \infty} a_n(x) = 1$ をみたすものである。これは、stopping rule と呼ばれる。すなわち $x \in \mathfrak{X}$ に対して, $a_n(x)$ は x が n 回目の sampling で stopp する確率である。

この設定は可算個の統計空間 $(\mathfrak{X}^i, \mathfrak{A}^i, \mathcal{P}^i)$, $i = 1, 2, \cdots\cdots$ の（カルテシアン）直積空間を背景としておいている。
すなわち, 下のように対応している。

$$\mathfrak{X} \longleftrightarrow \prod_{1 \le i < \infty} \mathfrak{X}^i, \qquad \mathfrak{A} \longleftrightarrow \prod_{1 \le i < \infty} \mathfrak{A}^i$$

$$\mathcal{P} \longleftrightarrow \prod_{1 \le i < \infty} \mathcal{P}^i, \qquad \mathfrak{A}_n \longleftrightarrow \prod_{1 \le i \le n} \mathfrak{A}^i \times \mathfrak{X}^{n+1} \times \mathfrak{X}^{n+2} \times \cdots\cdots$$

また, $\{\mathcal{B}_n\}_{0 \le n \le \infty}$ は統計量の列 $\{T_n\}_{0 \le n < \infty}$ に対応している。すなわち, 各 n に対して $\mathcal{B}_n$ は T_n によって induce された σ-field に対応している。T_n は $\mathfrak{X}^1 \times \cdots\cdots \times \mathfrak{X}^n$ を定義域としているから $\mathcal{B}_n \subseteq \mathfrak{A}_n$ とおくのは自然である。

さて, ここでは stopping rule が non-randomized である場合だけを考えている。それは各 n について $a_n(x)$ が, すべての $x \in \mathfrak{X}$ に対して $a_n(x) = 0$ 又は 1. をみたしている場合である。このとき各 n に対して, $S_n = \{x \in \mathfrak{X} : a_n(x) = 1\}$ とおけば, すべての $x \in \mathfrak{X}$ に対して, $a_n(x) = \chi_{S_n}(x)$ である。

従って non-randomized stopping rule $\{a_n\}_{0\leq n\leq\infty}$ は，集合の列 $\mathcal{S}=\{S_n\}_{0\leq n\leq\infty}$ でおきかえられる。以後，ここでは stopping rule と言えば non-randomized stopping rule のことであり、それを，$\mathcal{S}=\{S_n\}_{0\leq n\leq\infty}$ で表わすことにする。

なお，$S_0\ (\in\mathcal{S})$ は sampling をしないで決定を行う $x\in\mathfrak{X}$ の全体である。逐次解析を始めるとき，まず，sampling をするかどうかを決めるのだが，少なくとも1回は sampling をするのであれば $S_0=\phi$ であり，そうでなければ，$S_0=\mathfrak{X}$ である。各 $n\ (0<n<\infty)$ に対して S_n は n 回目で sampling を stop する $x\in\mathfrak{X}$ の全体であり，S_∞ はいつまでも sampling をやめない $x\in\mathfrak{X}$ の全体である。

次に σ − field の列 $\{\mathfrak{A}_n\}_{0\leq n\leq\infty}$ 又は $\{\mathcal{B}_n\}_{0\leq n\leq\infty}$ と stopping rule $\mathcal{S}=\{S_n\}_{0\leq n\leq\infty}$ によって、つくられる $\mathfrak{A}$ の sub σ−field $\mathfrak{A}(\mathcal{S})$ 又は $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ を考える。これは各 n について，S_n 上で $\mathfrak{A}_n$ 又は $\mathcal{B}_n$ を考えた σ−field である。

$\mathcal{B}(\mathcal{S})$ は，統計量の列 $\{T_n\}_n$ があるとき $T_n(x_1,\cdots,x_n)$ の値をみて，sampling を stop するかどうかを決め，$T_n(x_1,\cdots,x_n)$ の値を記録する場合、すなわち統計量 (N, T_N) に対応する。但し、N は sampling を stop した番号とする。

推定量は、$\mathfrak{X}$ から推定される空間への関数である。統計量

の値を見て，samplingをstopし，推定する場合は推定量が$\mathcal{B}(\mathcal{S})$－可測であることに対応している。

$\mathcal{O}(\mathcal{S})$は，$(x_1, \cdots, x_n)$そのものを見て，決定し，記録する場合に対応する。

以上で述べたことより，逐次解析におけるsufficiency，dominatedness，completenessを$(\mathcal{X}, \mathcal{O}(\mathcal{S}), \mathcal{P})$，$(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{S}), \mathcal{P})$において考えることは自然である。

§2．Sequencial ProcesureのSufficiency．

$(\mathcal{X}, \mathcal{O}, \mathcal{P})$において§1で述べた$\mathcal{O}$のsub σ-fieldの列$\{\mathcal{O}_n\}_n$と$\{\mathcal{B}_n\}_n$が与えられているとする。但し，$\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_\infty = \mathcal{O}$とする。

［定義2.1］$\mathcal{X}$の部分集合の列$\mathcal{S} = \{S_n\}_{0 \leq n \leq \infty}$が次の(i)(ii)(iii)をみたすとき$\mathcal{S}$がstopping ruleであるという。

(i) 各nに対して　$S_n \in \mathcal{O}_n$

(ii) $\bigcup_{0 \leq n \leq \infty} S_n = \mathcal{X}$

(iii) 各m，n $(m \neq n)$に対して，$S_m \cap S_n = \phi$．

［定義2.2］stopping rule $\mathcal{S} = \{S_n\}_n$がclosedであるとはすべての$p \in \mathcal{P}$に対して　$p(\bigcup_{0 \leq n < \infty} S_n) = 1$，すなわち$p(S_\infty) = 0$をみたすことである。

$(\mathcal{X}, \mathcal{O}, \mathcal{P}, \{\mathcal{O}_n\}_n, \{\mathcal{B}_n\}_n, \mathcal{S})$をsequential procedureと

呼ぶ。

以後、次の仮定をおく。

仮定[I]. $S_0 = \phi$.

仮定[II] stopping rule は closed.

[補題 2.1] $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ において $\{\mathcal{B}_n\}_{1\le n\le\infty}$ を $\mathcal{A}$ の sub σ-field の任意列とする。$\mathcal{S} = \{S_n\}_{1\le n\le\infty}$ を $\mathcal{A}$-可測集合の列で次の(i)(ii)をみたすものとする。

(i) $\bigcup_{1\le n\le\infty} S_n = \mathcal{X}$,　　(ii) $S_n \cap S_m = \phi$,　$(n \neq m)$.

このとき、$\mathcal{B}(\mathcal{S}) = \{\bigcup_{1\le n\le\infty} (S_n \cap B_n)\ ;\ B_n \in \mathcal{B}_n,\ 1 \le n \le \infty\}$ とおけば、$\mathcal{B}(\mathcal{S})$ は $\mathcal{A}$ の sub σ-field である。

[補題 2.2] $\{\mathcal{B}_n\}_n$ と $\mathcal{S}$ は補題 2.1 と同じものとする。f を $\mathcal{A}$-$\mathcal{P}$-可積分関数とするとき、任意の $p \in \mathcal{P}$ について次の等式が成り立つ。

$$E_p[f \mid \mathcal{B}(\mathcal{S})] = \sum_{1\le n\le\infty} \frac{E_p[f\chi_{S_n} \mid \mathcal{B}_n]}{E_p[\chi_{S_n} \mid \mathcal{B}_n]} \chi_{S_n}, \quad [\mathcal{A}, p]$$

但し、各 n について、$E_p[\chi_{S_n} \mid \mathcal{B}_n](x) = 0$ となる x に対しては、$\dfrac{E_p[f\chi_{S_n} \mid \mathcal{B}_n](x)}{E_p[\chi_{S_n} \mid \mathcal{B}_n](x)} = 0$ と定義する。

証明) 任意の n と任意の $B_n \in \mathcal{B}_n$ に対して

$$\int_{S_n \cap B_n} \sum_{1\le n\le\infty} \frac{E_p[f\chi_{S_n} \mid \mathcal{B}_n]}{E_p[\chi_{S_n} \mid \mathcal{B}_n]} \chi_{S_n}\, dp$$

$$= \int_{\mathcal{X}} \frac{E_p[f\chi_{S_n} \mid \mathcal{B}_n]}{E_p[\chi_{S_n} \mid \mathcal{B}_n]} \chi_{S_n} \cdot \chi_{B_n}\, dp$$

$$= \int_{\mathfrak{X}} \frac{E_p[f\chi_{S_n}|\mathcal{B}_n]}{E_p[\chi_{S_n}|\mathcal{B}_n]} E_p[\chi_{S_n}|\mathcal{B}_n]\cdot \chi_{B_n} dp$$
$$= \int_{\mathfrak{X}} E_p[f\cdot\chi_{S_n}\cdot\chi_{B_n}|\mathcal{B}_n]\, dp$$
$$= \int_{S_n\cap B_n} f\, dp .$$

故に$\mathcal{B}(\mathcal{S})$の任意の元$B=\bigcup_{1\leq m\leq\infty}(S_m\cap B_m)$に対して，

$$\int_{\bigcup_m (B_m\cap S_m)} \sum_n \frac{E_p[f\chi_{S_n}|\mathcal{B}_n]}{E_p[\chi_{S_n}|\mathcal{B}_n]}\chi_{S_n} dp = \int_{\bigcup_m (S_m\cap B_m)} f\, dp.$$ (証終)

［補題2.3］ $(\mathfrak{X},\mathcal{A},\mathcal{P})$において，$\mathcal{A}_1$，$\mathcal{A}_2$を$\mathcal{A}$の任意のsub σ-fieldの組とし，$\mathcal{S}=\{S_1,S_2\}$を$\mathcal{A}$-可測集合の組で，$S_1\cap S_2=\phi$，$S_1\cup S_2=\mathfrak{X}$をみたすものとする。

$$\mathcal{A}(\mathcal{S})=\{(S_1\cap A_1)\cup(S_2\cup A_2)\ ;\ A_i\in\mathcal{A}_i,\ i=1,2\}$$

とおけば次の(i) (ii)が成り立つ。

(i) 任意の$\mathcal{A}_i$-可測関数fに対して$f\chi_{S_i}$は$\mathcal{A}(\mathcal{S})$-可測である。$(i=1,2)$

(ii) S_iが$\mathcal{A}_i$-可測集合であるとき，任意の$\mathcal{A}(\mathcal{S})$-可測関数gに対して，$g\chi_{S_i}$は，$\mathcal{A}_i$-可測関数である。$(i=1,2)$

［定義2.3］ sequential procedure $(\mathfrak{X},\mathcal{A},\mathcal{P},\{\mathcal{A}_n\}_n,\{\mathcal{B}_n\}_n,\mathcal{D})$がsufficientであるとは，$(\mathfrak{X},\mathcal{A}(\mathcal{S}),\mathcal{P})$において，$\mathcal{B}(\mathcal{S})$が$\mathcal{A}(\mathcal{S})$に対してsufficientであること。

但し，$\mathcal{A}(\mathcal{S})$，$\mathcal{B}(\mathcal{S})$の定義は，補題2.1で与えたものである。

$\mathcal{A}(\mathcal{S})\supseteq\mathcal{B}(\mathcal{S})$は明らかである。

[定義 2.4] $\{\mathcal{B}_n\}_{1\leq n\leq\infty}$ が sufficient sequence であるとは、各 n について、$\mathcal{B}_n$: suff. for $\mathcal{O}_n$ であること。

(注). $\mathcal{O}_\infty = \mathcal{B}_\infty = \mathcal{O}$ とおいているから、常に $\mathcal{B}_\infty$: suff. for $\mathcal{O}_\infty$.

[定理 2.1] 任意の stopping rule $\mathcal{S} = \{S_n\}_{1\leq n\leq\infty}$ に対して、sequential procedure $(\mathcal{X}, \mathcal{O}, \mathcal{P}, \{\mathcal{O}_n\}_n, \{\mathcal{B}_n\}_n, \mathcal{S})$ が、sufficient であるための必要十分条件は $\{\mathcal{B}_n\}_n$ が sufficient sequence であること。

証明)

(十分) 任意の $\mathcal{O}(\mathcal{S})$-可測集合 A に対して、その定義関数の $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ に関する条件付期待値が $p\in\mathcal{P}$ に無関係であることを示す。

$A = \bigcup_{1\leq n\leq\infty}(S_n \cap A_n)$;　$A_n \in \mathcal{O}_n$, $(1\leq n\leq\infty)$ と表わされる。各 n について、$A\cap S_n = S_n \cap A$ である。そして $S_n \cap A_n \in \mathcal{O}_n$,　$S_n \in \mathcal{O}_n$ だから、$\mathcal{B}_n$: suff. for $\mathcal{O}_n$ より、$\chi_{S_n}\cdot\chi_{A_n}$,　χ_{S_n} の $\mathcal{B}_n$ に関する条件付期待値は p に無関係である。補題 2.2 より、任意の $p\in\mathcal{P}$ に対して、

$$E_p[\chi_A \mid \mathcal{B}(\mathcal{S})] = \sum_{1\leq n\leq\infty} \frac{E_p[\chi_A\cdot\chi_{S_n} \mid \mathcal{B}_n]}{E_p[\chi_{S_n}\mid\mathcal{B}_n]}\chi_{S_n}, \quad [\mathcal{O}, p]$$

$$= \sum_{1\leq n\leq\infty} \frac{E[\chi_A\cdot\chi_{S_n} \mid \mathcal{B}_n]}{E[\chi_{S_n}\mid\mathcal{B}_n]}\chi_{S_n}.$$

故に左辺は p に無関係である。

(必要) 任意の n を固定して、$S_n = \mathcal{X}$, $S_m = \phi$ $(m\neq n)$ である stopping rule $\mathcal{S}$ を与えると $\mathcal{B}(\mathcal{S}) = \mathcal{B}_n$, $\mathcal{O}(\mathcal{S}) = \mathcal{O}_n$ で

ある。仮定より、$\mathcal{B}_n$: suff. for $\mathfrak{A}_n$ となる。nは任意であったから、$\{\mathcal{B}_n\}_n$ は sufficient sequence である。（証終）

[定理 2.2]

任意の stopping rule $\mathcal{S}=\{S_n\}_{1\le n\le\infty}$ に対して、$(\mathcal{X}, \mathfrak{A}(\mathcal{S}), \mathcal{P})$ が dominated であるための必要十分条件は、各nについて$(n\neq\infty)$、$(\mathcal{X}, \mathfrak{A}_n, \mathcal{P})$ が dominated であること。

証明)

(十分) 条件より、各nについて$(n\neq\infty)$、$\mathfrak{A}_n$上のσ-有界測度μ_nが存在して、μ_n は $(\mathcal{X}, \mathfrak{A}_n, \mathcal{P})$ を dominate する。

任意の$\mathfrak{A}(\mathcal{S})$-可測集合 $A=\bigcup_{1\le n\le\infty}(S_n\cap A_n)$ に対して、

$$\mu(A)=\sum_{1\le n<\infty}\mu_n(S_n\cap A_n)+p(S_\infty\cap A_\infty).$$

(但し、pは任意固定 $\in\mathcal{P}$) と定義すればμは$\mathfrak{A}(\mathcal{S})$上の$\sigma$-有界測度である。($\mathcal{S}$がclosedであるから $p(S_\infty\cap A_\infty)=0$ である。)

また、μは$\mathfrak{A}(\mathcal{S})$上の$\mathcal{P}$をdominateする。

∵ $\mathfrak{A}(\mathcal{S})\ni A=\bigcup_{1\le n\le\infty}(S_n\cap A_n)$ に対して

$\mu(A)=0$ ならば、各n $(1\le n<\infty)$について $\mu_n(S_n\cap A_n)=0$

故に、任意の$p\in\mathcal{P}$に対して $p(S_n\cap A_n)=0$.

従って、任意の$p\in\mathcal{P}$に対して、

$$p(A)=\sum_{1\le n<\infty}p(S_n\cap A_n)=0.$$

(必要) 任意の n を固定して, $S_n=\mathcal{X}$, $S_m=\phi$ $(n\neq m)$ である stopping rule s を与えれば, $\mathfrak{A}(s)=\mathfrak{A}_n$ となり, 条件より $(\mathcal{X},\mathfrak{A}_n,\mathcal{P})$ は dominated である。n は任意であった。(証終)

任意の σ-field $\mathcal{B}$ と任意の部分集合 A に対して

$$\mathcal{B}\cap A=\{B\cap A : B\in\mathcal{B}\}$$

と定義する。

Bahadur の定理を用いて, dominatedness より得られる $(\mathcal{X},\mathfrak{A}(s),\mathcal{P})$, $(\mathcal{X},\mathfrak{A}_n,\mathcal{P})$, $(1\leq n<\infty)$ の最小の sufficient sub σ-field を $\mathcal{B}^*$, $\mathcal{B}_n^*$, $(1\leq n<\infty)$ とすれば, $\mathcal{B}^*\cap S_n\subseteq\mathcal{B}_n^*\cap S_n$, $[\mathfrak{A},\mathcal{P}]$, $(1\leq n<\infty)$ である。なぜなら

$$\mathcal{B}^*(s)=\{\bigcup_{1\leq n\leq\infty}(S_n\cap B_n^*) : B_n^*\in\mathcal{B}_n^*\ 1\leq n<\infty,\ B_\infty^*\in\mathfrak{A}\}$$

とおけば, 定理2.1より, $\mathcal{B}^*(s)$: suff. for $\mathcal{P}$ $\mathfrak{A}(s)$ である。

$\mathcal{B}^*$ の最小性より, $\mathcal{B}^*\subseteq\mathcal{B}^*(s)$, $[\mathfrak{A},\mathcal{P}]$ であるから, 各 n $(1\leq n<\infty)$ に対して, $\mathcal{B}^*\cap S_n\subseteq\mathcal{B}^*(s)\cap S_n=\mathcal{B}_n^*\cap S_n$, $[\mathfrak{A},\mathcal{P}]$ である。

しかし, この逆は, 成り立たない。

でも, 各 n $(1\leq n<\infty)$ について $S_n\in\mathcal{B}_n^*$ という条件を付加すれば, $\mathcal{B}^*\cap S_n=\mathcal{B}_n^*\cap S_n$ $[\mathfrak{A},\mathcal{P}]$ が成り立つ。それを示すために, $\mathcal{B}^*\cap S_n\subsetneqq\mathcal{B}_n^*\cap S_n$, $[\mathfrak{A},\mathcal{P}]$ と仮定して矛盾を導こう。

$$\mathcal{B}_n^{*\prime}=\{(S_n\cap B)\cup(S_n^c\cap B_n) ; B\in\mathcal{B}^*,\ B_n\in\mathcal{B}_n^*\}$$

とおく。

(i) $\mathcal{B}_n^{*\prime} \subsetneq \mathcal{B}_n^*$, $[\mathcal{O}, \mathcal{P}]$

∵ $S_n \cap \mathcal{B}_n^{*\prime} = S_n \cap \mathcal{B}^* \subsetneq S_n \cap \mathcal{B}_n^* \subset \mathcal{B}_n^*$. $[\mathcal{O}, \mathcal{P}]$

$S_n^c \cap \mathcal{B}_n^{*\prime} = S_n^c \cap \mathcal{B}_n^* \subset \mathcal{B}_n^*$

∴ $\mathcal{B}_n^{*\prime} \subsetneq \mathcal{B}_n^*$ $[\mathcal{O}, \mathcal{P}]$.

(ii) $\mathcal{B}_n^{*\prime}$; suff. for $\mathcal{O}_n$.

∵ f を $\mathcal{O}_n$－$\mathcal{P}$－可測積分関数とすれば

$$E_p[f \mid \mathcal{B}_n^{*\prime}] = \frac{E[f\chi_{S_n} \mid \mathcal{B}^*]}{E[\chi_{S_n} \mid \mathcal{B}^*]}\chi_{S_n} + \frac{E[f\chi_{S_n^c} \mid \mathcal{B}_n^*]}{E[\chi_{S_n^c} \mid \mathcal{B}_n^*]}\chi_{S_n^c}$$

$[\mathcal{O}, \mathcal{P}]$.

右辺の第１項が P に無関係であるのは，$f\chi_{S_n}$，χ_{S_n} が $\mathcal{O}(\mathcal{S})$－可測関数だからである。

故に $\mathcal{B}_n^{*\prime}$: suff. for $\mathcal{O}_n$.

(i)と(ii)を合わせると，$\mathcal{B}_n^*$ が $\mathcal{O}_n$ の最小の sufficient sub σ-field であることに矛盾する。 故に $\mathcal{B}^* \cap S_n = \mathcal{B}_n^* \cap S_n$, $[\mathcal{O}, \mathcal{P}]$.

このことは，各 n $(1 \leq n < \infty)$ について成り立つ。

§3. Sequential Procedure の Completeness.

[定義 3.1] Sequential Procedure $(\mathcal{X}, \mathcal{O}, \mathcal{P}, \{\mathcal{O}_n\}_n, \{\mathcal{B}_n\}_n, \mathcal{S})$ が complete であるとは $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{S}), \mathcal{P})$ が complete であること。

(注) 任意の stopping rule に対して Seq. proc. が complete ならば各 n $(1 \leq n < \infty)$ について $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_n, \mathcal{P})$ が complete であること，又，その逆は成り立たないことは，共に明らかである。

[定理3.1] $\{\mathcal{B}_n\}_n$ を sufficient sequence とする。

2つの seq. proc. $(\mathcal{X}; \mathcal{O}, P, \{\mathcal{O}_n\}_n, \{\mathcal{B}_n\}_n, \mathcal{S}_i)$ $i=1,2$, が

それぞれ complete ならば、$\mathcal{S}_1=\{S_n^1\}_n$, $\mathcal{S}_2=\{S_n^2\}_n$, を合成

した $\mathcal{S}=\{S_n\}_n$ を与えた seq. proc. $(\mathcal{X}, \mathcal{O}, P, \{\mathcal{O}_n\}_n, \{\mathcal{B}_n\}_n, \mathcal{S})$

は complete である。

但し、合成した stopping rule $\mathcal{S}$ とは、$\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ のどちらかが stop せよと命じたとき stop する stopping rule のことである。$\mathcal{S} \ni S_n$ は、$S_n = S_n^1 \cup S_n^2 - \bigcup_{i=1}^{n-1}(S_i^1 \cup S_i^2)$

と表わせばよい。

定理の証明の前に補題を示す。

[補題3.1]

$\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}$ を定理3.1で述べたものとする。このとき、$\mathcal{S}$ は

stopping rule であり、$\mathcal{O}(\mathcal{S}_i) \geq \mathcal{O}(\mathcal{S})$, $i=1,2$, である。

証明)

$\mathcal{O}(\mathcal{S}_1) \geq \mathcal{O}(\mathcal{S})$ を示す。

$\mathcal{O}(\mathcal{S})$ の任意の元 $A = \bigcup_{1\leq n\leq\infty}(S_n \cap A_n)$ に対し、

任意の m に対して、

$$A \cap S_m^1 = \Big(S_m^1 \cap \bigcup_{1\leq n\leq m}(S_n \cap A_n)\Big) \cup \Big(S_m^1 \cap \bigcup_{m<n\leq\infty}(S_n \cap A_n)\Big)$$

第1項は $\mathcal{O}_m$ に属する。

① 各集合は $\mathcal{O}_n$ $(n \leq m)$ に属し、$\mathcal{O}_n \subseteq \mathcal{O}_m$ である。

第2項は空である。

$$\text{①第2項} = \bigcup_{m+1 \le n \le \infty} (S_m^1 \cap S_n \cap A_n)$$

（S_nの定義より $n \geq m+1$ ならば $S_m^1 \cap S_n = \phi$）

$$= \phi$$

故に $A \cap S_m^1 \in \mathfrak{A}_m$.

よって $A = \bigcup_{1 \le m < \infty} (A \cap S_m^1) \in \mathfrak{A}(\mathcal{S}_1)$.

$\mathfrak{A}(\mathcal{S}_2) \supseteq \mathfrak{A}(\mathcal{S})$も同様にして示される。他は明らか。（証終）

[補題3.2]

$\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}$を定理3.1で述べたものとする。$A = \bigcup_{1 \le n \le \infty} (S_n \cap S_n^1)$

とおく。 $A_1 \subseteq A$, $A_2 \subseteq A$, $A_i \in \mathfrak{A}$, $i=1,2$, に対して.

$\mathcal{B}(\mathcal{S}_i)' = \{(A_i \cap B_1) \cup (A_i^c \cap B_2) : B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{S}_i)\}$とおく。

このとき、任意の$\mathcal{B}(\mathcal{S})$－可測関数fに対して、$f\chi_{A_i}$は

$\mathcal{B}(\mathcal{S}_i)'$－可測である。($i=1,2$.)

証明）

まず、次のことをたしかめておく。

$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$を任意のsub σ-fieldとし、Aを任意の部分集合とする。$\mathfrak{A}_1 \cap A = \mathfrak{A}_2 \cap A$ならば任意の$\mathfrak{A}_1$－可測関数$f$に対して、$f\chi_A$は$\mathfrak{A}(A)$－可測である。

但し、$\mathfrak{A}(A) = \{(A \cap A_1) \cup (A^c \cap A_2) : A_i \in \mathfrak{A}_i, i=1,2\}$.

さて、$\mathcal{B}(\mathcal{S}) \cap A_i = \mathcal{B}(\mathcal{S}_i)' \cap A_i$を示せばよいのだが、これは、$\mathcal{S}$と$A$の定義、$A_i$の性質、$\mathcal{B}(\mathcal{S}_i)'$の定義を考え合わせると明らかである。（証終）

[補題 3.3] $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}$ を定理 3.1 で述べたものとする。

$A = \bigcup_{1\leq i\leq\infty} (S_i^1 \cap S_i)$ とおく。このとき，任意の $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ - $\mathcal{P}$ - 可積分関数 f に対して，次の (i)(ii) が成り立つ。

(i) $A \supseteq A_1$, $A_1 \in \Omega$ ならば，すべての $p \in \mathcal{P}$ に対して

$$E_p[f\chi_{A_1} \mid \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)]\chi_{A_1} = E_p[\chi_{A_1} \mid \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)]\cdot f\cdot \chi_{A_1}, \ [\Omega, p].$$

(ii) $A^c \supseteq A_2$, $A_2 \in \Omega$ ならば，すべての $p \in \mathcal{P}$ に対して

$$E_p[f\chi_{A_2} \mid \mathcal{B}(\mathcal{S}_2)]\chi_{A_2} = E_p[\chi_{A_2} \mid \mathcal{B}(\mathcal{S}_2)]\cdot f\cdot \chi_{A_2}, \ [\Omega, p].$$

証明)

(i), (ii) を同時に証明する。

$$\mathcal{B}(\mathcal{S}_i)' = \{ (A_i \cap B_1) \cup (A_i^c \cap B_2) ; B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{S}_i) \}$$

とおく。

$$E_p[f\chi_{A_i} \mid \mathcal{B}(\mathcal{S}_i)']$$
$$= \frac{E_p[f\chi_{A_i} \mid \mathcal{B}(\mathcal{S}_i)]}{E_p[\chi_{A_i} \mid \mathcal{B}(\mathcal{S}_i)]}\chi_{A_i} + \frac{E_p[f\chi_{A_i}\cdot\chi_{A_i^c} \mid \mathcal{B}(\mathcal{S}_i)]}{E_p[\chi_{A_i^c} \mid \mathcal{B}(\mathcal{S}_i)]}\chi_{A_i^c}, \ [\Omega, p].$$
$$= \frac{E_p[f\chi_{A_i} \mid \mathcal{B}(\mathcal{S}_i)]}{E_p[\chi_{A_i} \mid \mathcal{B}(\mathcal{S}_i)]}\chi_{A_i}.$$

$f\chi_{A_i}$ は $\mathcal{B}(\mathcal{S}_i)'$ - 可測である。

故に $E_p[f\chi_{A_i} \mid \mathcal{B}(\mathcal{S}_i)'] = f\chi_{A_i}, \ [\Omega, p].$

よって $f\chi_{A_i} = \dfrac{E_p[f\chi_{A_i} \mid \mathcal{B}(\mathcal{S}_i)]}{E_p[\chi_{A_i} \mid \mathcal{B}(\mathcal{S}_i)]}\chi_{A_i}$

A_i 上で $E_p[\chi_{A_i} \mid \mathcal{B}(\mathcal{S}_i)] > 0. \ [\Omega, p]$

だから $E_p[f\chi_{A_i} \mid \mathcal{B}(\mathcal{S}_i)]\chi_{A_i} = E_p[\chi_{A_i} \mid \mathcal{B}(\mathcal{S}_i)]\cdot f\cdot\chi_{A_i}.$

（証終）

（定理 3.1 の証明）

$\mathcal{B}(\mathcal{S})$－$\mathcal{P}$－可積分関数 f がすべての $p \in \mathcal{P}$ に対して $\int_{\mathfrak{X}} f\,dp = 0$ ならば $f = 0$，$[\mathcal{O}, \mathcal{P}]$ を示す。

$\mathcal{B}(\mathcal{S}_1)$：suff. for $\mathcal{O}(\mathcal{S}_1)$，$\mathcal{O}(\mathcal{S}_1) \supseteq \mathcal{O}(\mathcal{S}) \supseteq \mathcal{B}(\mathcal{S})$ だから，f を $\mathcal{O}(\mathcal{S}_1)$－可測関数とみなせば，$f$ の $\mathcal{B}(\mathcal{S}_1)$ に関する条件付期待値は p に無関係である。故に $E[f \mid \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)](x)$ と表わす。

仮定より $\int_{\mathfrak{X}} E[f \mid \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)]\,dp = \int_{\mathfrak{X}} f\,dp = 0$．

これがすべての $p \in \mathcal{P}$ について成り立つので，

$(\mathfrak{X}, \mathcal{B}(\mathcal{S}_1), \mathcal{P})$ の completeness より

$$E[f \mid \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)](x) = 0 \quad [\mathcal{O}, \mathcal{P}].$$

同様にして，

$$E[f \mid \mathcal{B}(\mathcal{S}_2)](x) = 0 \quad [\mathcal{O}, \mathcal{P}].$$

$A = \bigcup_{1 \le i \le \infty} (S_i \cap S_i^!)$ とおく。

$$\begin{aligned}
0 &= E[f \mid \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)](x) \quad [\mathcal{O}, \mathcal{P}] \\
&= E[f\chi_A \mid \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)](x) + E[f\chi_{A^c} \mid \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)](x) \\
&= E[f\chi_A \mid \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)](x)\cdot\chi_A(x) + E[f\chi_A \mid \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)](x)\cdot\chi_{A^c}(x) \\
&\quad + E[f\chi_{A^c} \mid \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)](x)
\end{aligned}$$

［補題3.3］，
$$\begin{aligned}
&= E[\chi_A \mid \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)]\cdot f\cdot\chi_A + E[f\chi_A \mid \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)]\,\chi_{A^c} \\
&\quad + E[f\chi_{A^c} \mid \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)] \quad [\mathcal{O}, \mathcal{P}].
\end{aligned}$$

また，同様にして，

$$0 = E[f\chi_A \mid \mathcal{B}(\mathcal{S}_2)] + E[f\chi_{A^c} \mid \mathcal{B}(\mathcal{S}_2)]\,\chi_A + f\chi_{A^c}\cdot E[\chi_{A^c} \mid \mathcal{B}(\mathcal{S}_2)] \quad [\mathcal{O}, \mathcal{P}]$$

これだけの準備をしておいて，n に関する帰納法を用いて．各 n について $p\{\{x: f(x)\neq 0\}\cap\bigcup_{i=0}^{n} S_i\}=0$ がすべての $p\in\mathcal{P}$ について成り立つことを示す。（帰納法をきれいに行うために．ここでは，S_0 をもちだすことにする。）

(i) $n=0$ のとき　$S_0=\phi$（仮定[I]）だから

$p\{\{x: f(x)\neq 0\}\cap S_0\}=0$ がすべての $p\in\mathcal{P}$ に対して成り立つ。

(ii) $n=m$ のとき成り立つならば．$n=m+1$ のとき成り立つことを示す。

$M=\{x: f(x)\neq 0\}$ とおく。

$(M\cap\bigcup_{i=0}^{m+1} S_i)$ を $(M\cap\bigcup_{i=0}^{m+1} S_i\cap A)$ と $(M\cap\bigcup_{i=0}^{m+1} S_i\cap A^c)$ に分け、それぞれについて．すべての $p\in\mathcal{P}$ に対して．測度がゼロであることを示す。

A は最初に定義したものである。

任意の $p\in\mathcal{P}$ に対して

$$
\begin{aligned}
&p\{M\cap\bigcup_{i=0}^{m+1} S_i\cap A\}\\
&=p\{M\cap\bigcup_{i=0}^{m} S_i\cap A\}+p\{M\cap S_{m+1}\cap A\}\\
&=p\{M\cap S_{m+1}\cap A\}\\
\circledast\ &\leq p\{\{x: E[\chi_A|\mathcal{B}(\mathcal{S}_1)](x)=0\}\cap S_{m+1}\cap A\}\\
&=0 \qquad \because\ A\text{上では}.\ E_p[\chi_A|\mathcal{B}(\mathcal{S}_1)]>0.\ [\Omega, p]
\end{aligned}
$$

$\circledast$ は．$M\cap S_{m+1}\cap A\subseteq\{x: E[\chi_A|\mathcal{B}(\mathcal{S}_1)]=0\}\cap S_{m+1}\cap A$ による。
$[\Omega. p]$

∵ 前に得た等式

$$0 = E[\chi_A \mid \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)]\cdot f\cdot \chi_A + E[f\chi_A \mid \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)]\chi_{A^c} + E[f\chi_{A^c} \mid \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)],\ [\Omega, \mathcal{P}]$$

から，$S_{m+1} \cap A$ 上で $E[f\chi_{A^c} \mid \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)](x) = 0.\ [\Omega, \mathcal{P}]$ を示せばよい。

示されれば，A 上で $E[\chi_A \mid \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)]\chi_{A^c} = 0$，だから

$$0 = E[\chi_A \mid \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)]\cdot f\cdot \chi_A\ ,\quad [\Omega, \mathcal{P}]$$

を得る。故に $f(x) \neq 0$ ならば A 上では，$E[\chi_A \mid \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)](x) = 0$ ならざるを得ない。すなわち上の包含関係が成り立つ。

$S_{m+1} \cap A$ 上で $E[f\chi_{A^c} \mid \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)] = 0.\ [\Omega, \mathcal{P}]$.

∵ A の定義より $S_{m+1} \cap A = S^1_{m+1} \cap A$，だから，

$S^1_{m+1}\ (\in \mathcal{B}(\mathcal{S}_1))$ 上で示せば十分。

任意の $p \in \mathcal{P}$ と任意の $B \in \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)$ に対して，

$$\int_{B \cap S^1_{m+1}} E[f\chi_{A^c} \mid \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)]\, dp$$

$$= \int_{*} \chi_B \cdot \chi_{S^1_{m+1}} \cdot f \cdot \chi_{A^c} \cdot dp$$

$$= 0.\ \left(∵\ S^1_{m+1} \cap A^c \subset \bigcup_{i=0}^{m} S_i\right)$$

さて，一方，すべての $p \in \mathcal{P}$ に対して

$$p\{M \cap \bigcup_{i=0}^{m+1} S_i \cap A^c\}$$

$$= p\{M \cap S_{m+1} \cap A^c\}$$

$$\leqq p\{\{x : E[\chi_{A^c} \mid \mathcal{B}(\mathcal{S}_2)] = 0\} \cap S_{m+1} \cap A^c\}$$

$$= 0$$

は，前に得た等式

$$0 = E[f\chi_A|\mathcal{B}(\mathcal{S}_2)] + E[f\chi_{A^c}|\mathcal{B}(\mathcal{S}_2)]\chi_A + f\cdot\chi_{A^c}\cdot E[\chi_{A^c}|\mathcal{B}(\mathcal{S}_2)]$$

を用いて，全く同様に示される。

これで，すべての $p\in\mathcal{P}$ に対して，$p\{M\cap\bigcup_{i=0}^{m+1}S_i\}=0$ が示された。

以上によって，各 n $(0\leq n<\infty)$ に対して，すべての $p\in\mathcal{P}$ に対して，$p\{M\cap\bigcup_{i=0}^{n}S_i\}=0$.

なお，仮定[II]より，すべての $p\in\mathcal{P}$ に対して，$p\{S_\infty\}=0$.

従って，$p\{M\cap\bigcup_{0\leq i\leq\infty}S_i\} = p\{M\cap\bigcup_{1\leq i<\infty}S_i\} = \lim_{n\to\infty} p\{M\cap\bigcup_{i=1}^{n}S_i\}=0$.

これが，すべての $p\in\mathcal{P}$ について成り立つ。

すなわち，$f(x)=0$ $[\mathfrak{A},\mathcal{P}]$．（証終）

[定義 3.2] seq. proc. $(\mathcal{X},\mathfrak{A},\mathcal{P},\{\mathfrak{A}_n\}_n,\{\mathcal{B}_n\}_n,\mathcal{S})$ を番号 n で truncate するとは，$\mathcal{S}\ni S_n$ を，$S_n'=(\bigcup_{i=1}^{n-1}S_i)^c$ でおきかえること。（但し $n\neq\infty$）

[系 3.1]

各 n $(1\leq n<\infty)$ に対して，$(\mathcal{X},\mathcal{B}_n,\mathcal{P})$ が complete であるとき，complete seq. proc. $(\mathcal{X},\mathfrak{A},\mathcal{P},\{\mathfrak{A}_n\}_n,\{\mathcal{B}_n\}_n,\mathcal{S})$ を任意の番号で truncate して得られる seq. proc. は，complete である。但し，$\{\mathcal{B}_n\}_n$ は sufficient seq. とする。

証明)

任意の n を fix する。

$S_n = \mathcal{X}$ である stopping rule を δ と書くと、$\mathcal{B}(\delta_n) = \mathcal{B}_n$ であるから seq. proc. $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{P}, \{\mathcal{A}_n\}_n, \{\mathcal{B}_n\}_n, \delta_n)$ は complete である。δ と δ_n を合成して得られる stopping rule を与えたものが truncated seq. proc. であるから、定理3.1より、それは complete である。（証終）

［定義3.3］ $S_n = \mathcal{X}$ である stopping rule を与えた procedure を fixed sample size の procedure という。

［定理3.2］ seq. proc. $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{P}, \{\mathcal{A}_n\}_n, \{\mathcal{B}_n\}_n, \delta)$ が complete ならば、任意の $p \in \mathcal{P}$ と m, n に対して、$\mathcal{B}_m$ ー可積分関数 $h(x)$ が、$E_p[h\chi_{S_m} | \mathcal{B}_n](x) = 0$, $[\mathcal{A}, p]$ をみたすとき、$h(x)\chi_{S_m}(x) = 0$, $[\mathcal{A}, p]$ が成り立つ。

証明）

対偶を示す。$m = n$ のときは明らかだから $m \neq n$ としておく。

ある $p \in \mathcal{P}$ と、m, n が存在し、かつ、ある $\mathcal{B}_m$ ー可積分関数 $h(x)$ と、$p(N) > 0$ である $N \in \mathcal{B}_m$ が存在して、

$$E_p[h\chi_{S_m} | \mathcal{B}_n](x) = 0, \quad [\mathcal{A}, p].$$

$$h(x)\chi_{S_m}(x) \neq 0, \quad x \in N.$$

をみたすとせよ。

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in S_i \quad (i \neq m) \\ h(x), & x \in S_m \end{cases}$$

と定義すれば F は $\mathcal{B}(\mathcal{S})$－可積分関数で

すべての $p \in \mathcal{P}$ に対して.

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{X}} F\,dp &= \int_{\mathcal{X}} E_p[F \mid \mathcal{B}_n]\,dp \\ &= \int_{\mathcal{X}} E_p[F\chi_{S_m} \mid \mathcal{B}_n]\,dp + \int_{\mathcal{X}} E_p[F\chi_{S_m^c} \mid \mathcal{B}_n]\,dp \\ &= 0 \end{aligned}$$

しかし. $p\{x : F(x) \neq 0\} = p(N) > 0$.

これは. $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{S}), \mathcal{P})$ の completeness に矛盾する。(証終)

[定理 3.3] 各 n $(1 \leq n < \infty)$ に対して, $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_n, \mathcal{P})$ が complete であり. seq. proc. $(\mathcal{X}, \Omega, \mathcal{P}, \{\mathcal{O}_n\}_n, \{\mathcal{B}_n\}_n, \mathcal{S})$ が sufficient. かつ complete であるとする。このとき.

任意の $p \in \mathcal{P}$ に対して.

命題 (A). $\left(\begin{array}{l} p(S_{n-1}) > 0, \quad p(S_n) > 0 \text{ であり.} \\ \mathcal{O}_{n-1} \ni A, \quad \mathcal{B}_n \ni B \text{ に対して} \\ p(A) > 0, \quad p(B) > 0 \\ \text{ならば } p(A \cap B) > 0 \end{array}\right.$

が成り立つ n $(\neq \infty)$ は. 存在しない。

証明)

対偶を示す。

あるp_0に対して、このようなn_0があったとせよ。

n_0でtruncateしたprocedureがcompleteでないことを示せば、系3.1より、もとのprocedureはcompleteでない。

S_{n_0}を$S'_{n_0}=(\bigcup_{i=1}^{n_0-1}S_i)^c$におきかえる。このとき、$\mathcal{A}_i\subseteq\mathcal{A}_{n_0-1}$ $i=1,2,\cdots,n_0-1$ より、$S'_{n_0}\in\mathcal{A}_{n_0-1}$、もちろん $S'_{n_0}\in\mathcal{A}_{n_0}$でもある。

また $S_{n_0}\subseteq S'_{n_0}$ だから $p_0(S'_{n_0})>0$.

おきかえたstopping rule (truncated) を$\mathcal{S}_{n_0}$と書く。

$$F(x)=\begin{cases}0 & , \quad x\in\bigcup_{i=1}^{n_0-2}S_i\\ 1 & , \quad x\in S_{n_0-1}\\ -\dfrac{E[\chi_{S_{n_0-1}}|\mathcal{B}_{n_0}](x)}{E[\chi_{S'_{n_0}}|\mathcal{B}_{n_0}](x)} & , \quad x\in S_{n_0}\end{cases}$$

(∵ $\mathcal{B}_{n_0}$: suff. for $\mathcal{A}_{n_0}$

と定義すれば F は $\mathcal{B}(\mathcal{S}_{n_0})$ − 可測関数(可積分)である。

なお、Fの定義は$p\in\mathcal{P}$に依存していない。

また、$E[\chi_{S'_{n_0}}|\mathcal{B}_{n_0}](x)>0$. $[\mathcal{A}, p_0]$ である。

∵ $\chi_{S'_{n_0}}\geqq 0$ だから $E[\chi_{S'_{n_0}}|\mathcal{B}_{n_0}]\geqq 0$, $[\mathcal{A}, p_0]$.

仮に $B\in\mathcal{B}_{n_0}$ が存在して、

$$p_0(B)>0, \quad E[\chi_{S'_{n_0}}|\mathcal{B}_{n_0}](x)=0, \quad x\in B$$

をみたすならば、

$$\int_B E[\chi_{S'_{n_0}}|\mathcal{B}_{n_0}]dp = p(S'_{n_0}\cap B)=0.$$

これは、命題(A)に矛盾する。

このことは、次の等式の㊗の箇所で用いられる。

$\mathcal{B}(\mathcal{S}_{n_0}) \subseteq \mathfrak{A}_{n_0}$ だから．$\mathcal{B}_{n_0}$: suff. for $\mathfrak{A}_{n_0}$ より．F の $\mathcal{B}_{n_0}$ に関する条件付期待値は．p に無関係である。

すべての $p \in \mathcal{P}$ に対して．

$$
\begin{aligned}
E[F \mid \mathcal{B}_{n_0}] &= E[F \chi_{\bigcup_{i=1}^{n_0-2} S_i} \mid \mathcal{B}_{n_0}] + E[F \chi_{S_{n_0-1}} \mid \mathcal{B}_{n_0}] \\
&\quad + E[F \chi_{S'_{n_0}} \mid \mathcal{B}_{n_0}] \\
&= E[\chi_{S_{n_0-1}} \mid \mathcal{B}_{n_0}] + E\left[- \frac{E[\chi_{S_{n_0-1}} \mid \mathcal{B}_{n_0}]}{E[\chi_{S'_{n_0}} \mid \mathcal{B}_{n_0}]} \chi_{S'_{n_0}} \mid \mathcal{B}_{n_0}\right] \\
(*) \quad &= E[\chi_{S_{n_0-1}} \mid \mathcal{B}_{n_0}] - E[\chi_{S_{n_0-1}} \mid \mathcal{B}_{n_0}] \\
&= 0, \qquad [\mathfrak{A}, p_0].
\end{aligned}
$$

故に．すべての $p \in \mathcal{P}$ に対して．

$$\int_{\mathcal{X}} F \, dp = \int_{\mathcal{X}} E[F \mid \mathcal{B}_{n_0}] \, dp = 0.$$

しかし．F は少なくとも S_{n_0-1} 上で ゼロでない値をとり．

$p_0(S_{n_0-1}) > 0$ である $p_0 \in \mathcal{P}$ が存在する。

故に truncated procedure が complete でない。（証終）

［例］ $X_1, X_2, \cdots\cdots$ をそれぞれ，平均未知．分散既知の正規分布に従う独立確率変数とする。$T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ とすれば fixed sample size の procedure は．complete であるが fixed でない．どんな procedure を考えてみても定理3.3の命題(A)が成り立つので complete でない。

参考文献

[1] Bahadur, R.R. (1954)

"sufficiency and statistical decision functions."

A.M.S. Vol. 25. 423~462

[2] Berk, R.H. (1967)

"Strong consistency of certain sequential estimators."

A.M.S. Vol. 40. No. 4 1492~1495.

[3] Lehmann, E.L. & Charles Stein (1950)

"Completeness in the sequential case."

A.M.S. Vol. 21 376~385

~~[4]~~ .