

有限母集団からの標本抽出問題の統計的構造

大阪市大 森本治樹

§1. この報告は、数理解析研究所講究録46に掲載された筆者の報告[1]の続きと補足に当る。

次のような統計的構造 $(X, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ を考える。すなわち

(1) X は非可算集合, (2) $\mathcal{A} = 2^X$, (3) $p \in \mathcal{P}$ はすべて
分散型。 (4) $\forall p \in \mathcal{P} \quad p(A) = 0$ ならば $A = \emptyset$ 。

これは Basu-Ghosh が提案したもので ([2]), それについては上記講究録に渋谷政昭氏の報告 ([3]) がある。

[1] において筆者は, Basu-Ghosh の統計的構造において, 統計量とは complete-field (任意個の和集合の形成について閉じている field) のことであることを指摘し, $\mathcal{A} = 2^X$ 自身 complete-field であるから, Basu-Ghosh の統計的構造を測度論的に扱う上で, incomplete な σ -field は考えない方がよいことを主張した。

その後この構造について, いくつかの結果を得たので, 以下に列挙する。

§ 2.

(4) 十分統計量に属する集合の可算和と、その余集合との全体は、pairwise-sufficient σ -field である。(= Σ で統計量とは分割、すなわち X を覆う素な集合族と考えている。)

(5) pairwise-sufficient σ -field の導く統計量は、sufficient。

(6) 統計量が pairwise-sufficient なら、sufficient。

(7) しかし一般の σ -field が pairwise-sufficient であつても、incomplete ならばもちろん insufficient。その例としては、(4) の σ -field を考えればよい。

(8) σ -field が十分統計量を導き、かつすべての $p \in \mathcal{P}$ に対して $A(p) = \{x \mid p(x) > 0\}$ を含むなら、pairwise-sufficient。

(9) \mathcal{B} を σ -field とする。任意の検定関数 $t(x)$ に対し \mathcal{B} -可測検定関数 $s(x)$ が存在して、 $\forall p \in \mathcal{P} \quad E_p(t) = E_p(s)$ となるとする。すると \mathcal{B} は $A(p)$ をすべて含み、また十分統計量を導く。

(10) (9) の仮定のもとで、 \mathcal{B} が complete (統計量) なら、 \mathcal{B} は十分。

(11) σ -field \mathcal{B} が十分統計量を導き、かつこの統計量を

含むための必要十分条件は、各 $p \in \mathcal{P}$ に対して

$$p(x) = g(x, p) \wedge h(x) \quad x \in X$$

が成立することである。ただし $g(x, p)$ は \mathcal{B} -可測で、 $h(x)$ は \mathcal{P} に無関係。

§3. 前節の (6) と (7), (10) と (9), Basu-Ghosh [2] の [Theorem 1] と上の (11) を比較すると, complete-field に対しては dominated な場合と同じことが成立つのに対して, incomplete-field に対しては成立たないといふことが、一層強調されるであろう。

もう一つ, [1] で主張したように 2^X を complete-field として (σ -field としてでなく) 扱うことの利点として, 次のことが考えられる。(1) — (4) をみたす2つの統計的構造 $(X, 2^X, \mathcal{P})$, $(Y, 2^Y, \mathcal{Q})$ の“直積”を作ること考える。 $(X \times Y, 2^X \times 2^Y, \mathcal{P} \times \mathcal{Q})$ といったものかできるか, $2^X \times 2^Y$ ($2^X, 2^Y$ の直積 σ -field) が $2^{X \times Y}$ に一致するかどうかは, 容易な問題ではない(難波[4])。しかし, $2^X, 2^Y$ の直積 complete-field は $2^{X \times Y}$ であるから, いつちこれらの集合族を complete-field として扱う方が便利である。

(なお, 結果の証明その他詳細については [5] 参照)。

参 考 文 献

- [1] 森本治樹 " 离散分布族の取扱いについて — Basu-Ghosh 論文をめぐって — " 統計研講究録 46
pp. 55 - 61 (1968)
- [2] D. Basu & J. K. Ghosh " Sufficient statistics in sampling from a finite universe ", 36th sess. Int. Stat. Inst., (1967)
- [3] 混谷政昭 " Basu-Ghosh, 有限母集団からのサンプリングにおける十分統計量, の紹介 " 統計研講究録 46, pp. 47 - 54 (1968)
- [4] 難波定爾 " 測度に関する集合論の結果 " 本講究録 所収。
- [5] H. MORIMOTO, " Statistical structure of the problem of sampling from finite populations " Ann. Math. Stat., Vol. 43. pp. 528-535 (1972)