

測度に関係ある集合論の結果

名大 教養 難波完爾

§1. ZF 集合論の公理系.

次のような記号を用いる: $\forall$ (for all), $\vee$ (or), $\wedge$ (and), $\rightarrow$ (ならば), $\neg$ (not), $\subset$ ($\forall x [x \in a \rightarrow x \in b]$ を $a \subset b$ と書く), $\in$ (属する).

次の①-⑨を ZF (Zermelo - Fraenkel) の公理系という。

- ① $a \subset b \wedge b \subset a \rightarrow a = b$
- ② $\exists \cup a \forall x [x \in \cup a \equiv \exists y \in a [x \in y]]$ (和集合の存在)
- ③ $\forall a \exists \mathcal{P}(a) \forall x [x \in \mathcal{P}(a) \equiv \forall y \in x [y \in a]]$ (冪集合の存在)
- ④ $\forall a \forall b \exists \{a, b\} \forall x [x \in \{a, b\} \equiv x = a \vee x = b]$ (集合 $\{a, b\}$ の存在)
- ⑤ $\exists \phi \forall x [\neg x \in \phi]$ (空集合の存在)
- ⑥ $\exists x [0 \in x \wedge \forall y \in x [y + 1 \in x]]$ (但し 0 は

ϕ , $y+1$ は $y \cup \{y\}$ を意味する。~~順序数~~自然数の全体が集合であること。

- ⑦ $\forall a \exists \{x \in a \mid A(x)\}$ (部分集合の存在)
- ⑧ $\forall x [\forall y \in x, A(y) \rightarrow A(x)] \rightarrow \forall x A(x)$. (帰納法)
- ⑨ $\forall x \in a \exists y A(x, y) \equiv \exists b \exists x \in a \exists y \in b A(x, y)$
(置換の公理. 集合と一対一に対応した相手の全体は集合である)

次に選択公理 (AC) を与える:

- ⑩ $\forall x \in a \exists y A(x, y) \equiv \exists f \forall x \in a A(x, f(x))$
($\forall$ と $\exists$ の入れかえだから, 分配律ともいえる。なお f は "関数" であつて, 次のように考える。
まず, 順序対 $\langle a, b \rangle = \{\{a, a\}, \{a, b\}\}$ と定義する。そして次の (イ) (ロ) をみたす集合 f を, 関数と呼ぶ: (イ) $x \in f \rightarrow x$ は 順序対。 (ロ) $\langle x, y \rangle \in f \wedge \langle x, z \rangle \in f \rightarrow y = z$ 。

§2. Measurable cardinal

A を任意の集合とする。 $\mathcal{P}(A)$ から $[0, \infty)$ への measure の存在を問題にする。

[定義] measure μ が trivial であるとは

$$\mu(A) = 0 \quad \forall \exists p \in A \quad \mu(\{p\}) > 0.$$

なることとする。従って μ が non-trivial であるとは

$$\mu(A) > 0 \quad \wedge \quad \forall p \in A \quad \mu(\{p\}) = 0.$$

[問題] $\phi(A)$ 上に non-trivial measure は存在するか？

答は $\bar{A}$ によってきまる。答は YES!! であるような cardinal を "measurable cardinal" と呼ぶ。ある cardinal が measurable なら、それより大きい cardinal はすべて measurable である。

A の上の non-trivial measure μ に対して, "additive number" ($\text{add}(\mu)$) を定義する。

$$\begin{aligned} \text{[定義]} \quad \text{add}(\mu) &= \\ &= \sup \{ \alpha \mid \forall f: \alpha \rightarrow \phi(A) [\forall \nu < \alpha [\mu(f(\nu)) = 0] \Rightarrow \mu(\bigcup_{\nu < \alpha} f(\nu)) = 0] \} \\ &= \min \{ \alpha \mid \exists f: \alpha \rightarrow \phi(A) [\forall \nu < \alpha [\mu(f(\nu)) = 0] \wedge \mu(\bigcup_{\nu < \alpha} f(\nu)) > 0] \}. \end{aligned}$$

$\bar{A}$ は上の第一の $\{ \}$ 内の α の性質をもたない。 $\therefore \text{add}(\mu) \leq \bar{A}$ 。また $\omega < \text{add}(\mu)$ は明か。

[定義] 順序数 α の cofinality $\text{cf}(\alpha)$ とは,
 $\exists f: \beta \rightarrow \alpha [\sup_{\nu < \beta} f(\nu) = \alpha]$ なる順序数 β のうち,
 最小のものをいう。(なお $\sup_{x < \beta} f(x) = \bigcup \{ f(x); x < \beta \}$.)

[定義] 順序数 α が weakly inaccessible であるとは

$$\alpha = \sum_{\beta < \alpha} \beta \quad \text{で, かつ} \quad cf(\alpha) = \alpha$$

であることをいう。

[定義] A から 順序数全体 (Ord と書く) への関数 f が B ($B \subset A$, $\mu(B) > 0$) 上で incompressible であるとは, 次の ①, ② をみたすことをいう。

① $\forall g: A \rightarrow \text{Ord}$ に対して

$$\mu(\{v \in B \mid g(v) < f(v)\}) > 0 \Rightarrow \exists \beta < \text{add}(\mu) \mu(\{v \in B \mid g(v) = \beta\}) > 0$$

② $\forall \beta < \text{add}(\mu)$ に対し $\mu(\{v \in B \mid f(v) = \beta\}) = 0$.

f が A 上で incompressible であるとき, 単に " f は incompressible" といい。

[定理] $\text{add}(\mu)$ は weakly inaccessible

この定理のために, 4つの lemma が必要である。

[Lem. 1] incompressible function が存在する。

[証明] ① 次の ①②③ の性質をもつ $\langle f, B \rangle$ の集りを C と書く。ただし $f: B \rightarrow \text{Ord}$, $B \subset A$ とする。

① $\langle f, B \rangle \in C \rightarrow \mu(B) > 0$.

② $\langle f, B \rangle \in C \rightarrow f$ は B 上で incompressible

③ $\langle f_1, B_1 \rangle, \langle f_2, B_2 \rangle \in C$, $\langle f_1, B_1 \rangle \neq \langle f_2, B_2 \rangle$

$\rightarrow B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

①③ の B の性質より, 明かに $\overline{C} \leq \omega$ である。次に

$\mathcal{C} = (\text{①②③をみたす } \mathcal{C} \text{ の全体})$ とおくと, $\mathcal{C} \ni \phi$ であるから, $\mathcal{C} \neq \phi$ である。

$\mathcal{C} \ni C_1, C_2$ に対し $C_1 \leq C_2$ の関係で順序を入れる。
 $(\mathcal{C}, \leq)$ 中の任意の増加列に対して, $\cup$ がまた ①②③をみたす。ゆえに $\mathcal{C}$ は極大元 $\mathcal{C}^*$ をもつ (Zorn). $D = A - \bigcup_{\langle f, B \rangle \in \mathcal{C}^*} B$ とおく。

ii) $\mu(D) = 0$ である。

(証明) $\mu(D) > 0$ と仮定する。次のように $f_0: D \rightarrow \text{Ord.}$ を定義する: $f_0(d) = \text{add}(\mu) \quad d \in D$ 。

これは次の性質 (a) をもつ:

$$(a) \quad \forall \beta < \text{add}(\mu) [\mu(\{v \in D \mid f_0(v) = \beta\}) = 0]$$

一般に, 性質 (a) をもつ関数 f に対して, 次の性質 ①-④をもつ $\langle g, E \rangle$ の集合を $\mathcal{D}$ と書く。

$$\text{①} \quad \langle g, E \rangle \in \mathcal{D} \rightarrow \mu(E) \geq 0, \quad E \subset D.$$

$$\text{②} \quad \langle g, E \rangle \in \mathcal{D} \rightarrow \forall v \in E [g(v) < f(v)]$$

$$\text{③} \quad \langle g, E \rangle \in \mathcal{D} \rightarrow \forall \beta < \text{add}(\mu) [\mu(\{v \in E \mid g(v) = \beta\}) = 0]$$

$$\text{④} \quad \langle g_1, E_1 \rangle \neq \langle g_2, E_2 \rangle \quad (\text{ともに } \mathcal{D} \text{ に属するとする}) \rightarrow E_1 \cap E_2 = \phi.$$

そして, 性質 ①-④ をもつ $\mathcal{D}$ の全体を $\mathcal{D}_f$ と書く。

$$\mathcal{D}_f = \{ \mathcal{D}; \text{①②③④} \}$$

このとき $\mathcal{D}_f \neq \emptyset$ であり, また $(\mathcal{D}_f, \subseteq)$ は $(\mathcal{C}, \subseteq)$ と同様に極大元 $\mathcal{D}^*$ をもつ。そして $\bigcup_{\langle g, E \rangle \in \mathcal{D}^*} E \subset D$ となるが、実は

$$(*) \quad \mu(D - \bigcup_{\langle g, E \rangle \in \mathcal{D}^*} E) = 0 \quad \text{である。}$$

(*) の証明. (注意. これは $\mu(D) = 0$ の証明途中の一挿話)

$F = (D - \bigcup_{\langle g, E \rangle \in \mathcal{D}^*} E)$ とおく。もしも $\mu(F) > 0$ であれば, f は F 上で incompressible となる。(そうではないとすると $\exists g \exists E' \mu(E') > 0, E' \subset F, \forall v \in E' [g(v) < f(v)]$ $\forall \beta < \text{add}(\mu) \mu(\{v \in E', g(v) = \beta\}) = 0$ 。したがって $\{\langle g, E' \rangle\} \cup \mathcal{D}^* \in \mathcal{D}_f$ となり, $\mathcal{D}^*$ の極大性に反するからである。)) そこで $\{f, F\} \cup \mathcal{C}^* \in \mathcal{C}$ となり, これは $\mathcal{C}^*$ の極大性に反する。(*) の証明終り)

今度は $g^*(v)$ を次のように定義する:

$$g^*(v) = \begin{cases} g(v) & \langle g, E \rangle \in \mathcal{D}^*, v \in E. \\ 0 & v \notin D - F \text{ のとき.} \end{cases}$$

すると $\mu(\{v \mid g^*(v) < f(v)\}) = \mu(D)$ 。ゆえに $\forall \beta < \text{add}(\mu) [\mu(\{v \in D \mid g^*(v) = \beta\}) = 0]$ 。これは g^* が性質 (a) をもつということである。前頁中頃から行ってきたことは, 次のようにまとめられる:

(a) をみたす f から出発し, $f \rightarrow \mathcal{D}_f \rightarrow \mathcal{D}^* \rightarrow g^*$ と進み, 再び (a) をみたす g^* を得る。

そこで、先ず前々頁の f_0 を f として取り、得られる g^* を f_1 と名づける。次に f_1 を f とし、同じ手順で f_2 を作る。これを繰返して進むと、 $f_0 \rightarrow f_1 \rightarrow f_2 \rightarrow \dots$ という列ができて、

$$\mu(D - \{v \mid f_{n+1}(v) < f_n(v)\}) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

となる。ゆえに

$$\mu\left(\bigcap_{n \in \omega} \{v \mid f_{n+1}(v) < f_n(v)\}\right) = \mu(D) > 0$$

となるから、

$$\exists v_0 \in \bigcap_{n \in \omega} \{v \mid f_{n+1}(v) < f_n(v)\}$$

この v_0 に対しては

$$f_0(v_0) > f_1(v_0) > f_2(v_0) > \dots$$

これは順序数の無限下降列であるが、こういうものはあり得ない（整列可能定理）。よって $\mu(D) = 0$ 。

$$\text{iii)} \quad f^*(v) = \begin{cases} f(v) & \langle f, B \rangle \in C^*, \quad v \in B \\ 0 & v \in A - \bigcup_{\langle f, B \rangle \in C^*} B \end{cases}$$

[Lem. 2] $\text{add}(\mu)$ は regular cardinal.

すなわち $\rho^* = \text{add}(\mu)$ とおくと、 $\text{cf}(\rho^*) = \rho^*$ 。

かつ ρ^* は cardinal.

[証明] i) ($\text{cf}(\rho^*) = \rho^*$)。これが成立たないとすれば $\exists \beta < \rho^* \exists f: \beta \rightarrow \rho^* \sup_{v < \beta} f(v) = \rho^*$ となる。一方 ρ^* は $\text{add}(\mu)$ なのだから、ある $\{A_v; v < \rho^*\}$ に

対して $\forall \nu < \rho^* [\mu(A_\nu) = 0] \wedge \mu(\bigcup_{\nu < \rho^*} A_\nu) > 0$ となる。
 $\bigcup_{\nu < \rho^*} A_\nu = \bigcup_{\nu < \beta} \bigcup_{\lambda \leq f(\nu)} A_\lambda$ であるが、 $\rho^* > f(\nu)$ から

$$\mu\left(\bigcup_{\lambda \leq f(\nu)} A_\lambda\right) = 0 \quad (\forall \nu < \beta).$$

よって $\beta < \rho^*$ だから

$$\mu\left(\bigcup_{\nu < \beta} \bigcup_{\lambda \leq f(\nu)} A_\lambda\right) = 0$$

これは矛盾である。

ii) (ρ^* は cardinal) $\rho < \rho^*$ とすると、 $\rho^* = \text{add}(\mu)$

から、

$$\forall \{A_\nu; \nu < \rho\} \left[\forall \nu < \rho [\mu(A_\nu) = 0] \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{\nu < \rho} A_\nu\right) = 0 \right]$$

$$\exists \{A_\nu; \nu < \rho^*\} \left[\forall \nu < \rho^* [\mu(A_\nu) = 0] \wedge \mu\left(\bigcup_{\nu < \rho^*} A_\nu\right) > 0 \right]$$

よって ρ と ρ^* の濃度は等しくない。 $\forall \rho < \rho^*$ に対して濃度が等しくないのだから、 ρ^* は cardinal である。

(regular ordinal は cardinal である。このことはよく知られている) (Lem. 2 終り)

$\rho^* = \text{add}(\mu)$ とし、 $\forall \nu < \rho^* [\mu(A_\nu) = 0]$, $\mu(\bigcup_{\nu < \rho^*} A_\nu) > 0$ とする。 $A^* = \bigcup_{\nu < \rho^*} A_\nu$ とおく。次のように $f: A^* \rightarrow \rho^*$ を定義する:

$$f(a) = a \in A_\nu \text{ なる最小の } \nu.$$

また、 $\mu' = (\mu \text{ を } \mathcal{P}(A^*) \text{ に restrict したものを})$ とする。

すると明らかに $\text{add}(\mu') = \text{add}(\mu)$ 。そして f は,

$$(b) \quad \forall \beta < \text{add}(\mu') [\mu'(\{v \in A^* \mid f(v) = \beta\}) = 0]$$

という性質をもつ。(①) $\{ \} = A_\beta - \bigcup_{\lambda < \beta} A_\lambda$ 。しかるに $\mu(A_\beta) = 0$ 。

$f^\#$ を incompressible function とすると

$$\mu'(\{v \in A^* \mid f^\#(v) \leq f(v)\}) = \mu'(A^*)$$

(①) $\neq$ とすると $\mu'(\{v \in A^* \mid f(v) < f^\#(v)\}) > 0$ となる。ゆえに $f^\#$ の incompressibility から

$$\exists \beta < \text{add}(\mu') \quad \mu'(\{v \in A^* \mid f(v) = \beta\}) > 0.$$

これは (b) と矛盾する。))

$$\therefore f^\#(v) < \text{add}(\mu') \quad (\mu'\text{-a.e. なる } v \in A^*).$$

[Lem. 3] μ' -a.e. なる v に対して, $f^\#(v)$ は cardinal number である。

[証明] 反対に $\mu(\{v \mid g(v) = \overline{f^\#(v)} < f^\#(v)\}) > 0$ と仮定する。 $f^\#$ は incompressible だから,

$$\exists \beta < \text{add}(\mu') \quad \mu(\{v \mid \overline{f^\#(v)} = \beta\}) > 0.$$

ゆえに

$$(c) \quad \mu(\{v \mid f^\#(v) < \bar{\beta}^+\}) > 0.$$

(但し $\bar{\beta}^+$ とは, $\bar{\beta}$ より大きな cardinal のうち, 最小のものとする。) (しかるに $\text{add}(\mu')$ は limit card-

nal だから, $\bar{\beta}^+ < \text{add}(\mu')$

$\text{add}(\mu)$ の定義と (c) から, $\mu(\{v \mid f^\#(v) = \delta\}) > 0$ となる $\delta (< \bar{\beta}^+)$ が存在する。これは $f^\#$ が incompressible であることに反する。

[Lem 4] $\text{add}(\mu') = \aleph_{\alpha+1}$ なる α は存在しない。

[証明] $\text{add}(\mu') = \aleph_{\alpha+1}$ と仮定する。

$f^\#(v)$ は A^* 上始と至る所 limit cardinal である。

(①) $\exists B \subset A^*, \mu(B) > 0 \quad \forall v \in B [f^\#(v) = g(v) + 1]$

となつたとすると $\mu(\{v \mid g(v) < f^\#(v)\}) > 0$ 。

$f^\#$ の incompressibility から

$\exists \beta < \text{add}(\mu) \mu(\{v \in B \mid g(v) = \beta\}) > 0$ 。

このとき

(d) $\mu(\{v \in B \mid f^\#(v) = \beta + 1\}) > 0$ 。

よるに ρ^* は limit cardinal だから $\beta + 1 < \rho^*$ 。

ゆえに (d) は $f^\#$ の incompressibility に反する。))

~~この所~~ $f^\#(v) < \text{add}(\mu') \text{ (a.e.)}$ (こ

この所, a.e. とは μ' に関して始とすべての $v \in A^*$ につい

(注意 Lem. 3 の証明に Lem. 4 を用いているが, Lem. 4

の証明には Lem. 3 を用いていない)

である)。一方, $f^\#(\nu)$ は a.e.- ν に対して cardinal であるから,

$$f^\#(\nu) \leq \aleph_\alpha \text{ (a.e.)}.$$

$$\text{よって } cf(f^\#(\nu)) \leq f^\#(\nu) \leq \aleph_\alpha \text{ (a.e.)}$$

$\therefore$ a.e.- ν に対して

$$\exists f_\nu: \aleph_\alpha \rightarrow f^\#(\nu); \sup_{\lambda < \aleph_\alpha} f_\nu(\lambda) = f^\#(\nu).$$

いま $\beta < \aleph_\alpha$ を固定する。 $h_\beta(\nu)$ を,

$$h_\beta(\nu) = f_\nu(\beta)$$

で定義すると

$$h_\beta(\nu) < f^\#(\nu) \text{ (a.e.)}.$$

また $D_\beta = \{\nu \mid \mu(\{\nu \mid h_\beta(\nu) = \tau\}) > 0\}$ と

おくと $f^\#$ の incompressibility から $D_\beta = \emptyset$ 。 $\overline{D_\beta} \leq \omega$

は明かだから

$$\bigcup_{\beta < \aleph_\alpha} \overline{D_\beta} \leq \aleph_\alpha.$$

また, $\bigcup_{\beta < \aleph_\alpha} D_\beta \subset \text{add}(\mu')$ ($\odot$ D_β の元 $< \text{add}(\mu')$)

(かも $\text{add}(\mu')$ は regular。ゆえに

$$\exists \kappa < \text{add}(\mu') \bigcup_{\beta < \aleph_\alpha} D_\beta \subset \kappa = \{\nu \mid \nu < \kappa\}$$

$$\kappa < f^\#(\nu) \text{ (a.e.)}.$$

よるに $\sup_{\lambda < \aleph_\alpha} f_\nu(\lambda) = f^\#(\nu)$ だから, $\sup_{\lambda < \aleph_\alpha} f_\nu(\lambda) > \kappa$ (a.e.)。 (かも $f^\#(\nu) = \text{limit ordinal}$ (a.e.)。

$\therefore$ a.e.- ν に対して $\exists t(\nu)$;

$$\kappa < f_\nu(t(\nu)), \quad t(\nu) < \aleph_\alpha \quad (\text{a.e.}).$$

$f^\#$ が incompressible だから,

$$\exists \delta < \aleph_\alpha \quad \mu(\{\nu \mid t(\nu) = \delta\}) > 0.$$

$E = \{\nu \mid t(\nu) = \delta\}$ とおけば, E 上では

$$\kappa < f_\nu(\delta) = h_\delta(\nu) < f^\#(\nu) \quad (\text{a.e.}).$$

従って ~~///~~ $\exists \eta; \kappa < \eta < \text{add}(\mu);$

$$\mu(\{\nu \mid h_\delta(\nu) = \eta\}) > 0.$$

この η は一方では

$$\eta \in D_\delta \subset \bigcup_{\beta < \aleph_\alpha} D_\beta \subset \kappa$$

となるから, 矛盾である。(Lem 4. 終り。)

(以下は定理の証明)

Lem. 3 により, $g: A^* \rightarrow \text{Ord}$ が存在して

$$f^\#(\nu) = \aleph_{g(\nu)} \quad (\text{a.e.})$$

と書ける。この $f^\#$ と g について

$$\mu(\{\nu \mid g(\nu) < f^\#(\nu)\}) = 0$$

($\circledast$) > 0 とすると, $f^\#$ の incompressibility より

$$\exists \beta < \text{add}(\mu) \quad \mu(\{\nu \mid g(\nu) = \beta\}) > 0.$$

この β に対して $\mu(\{\nu \mid \aleph_\beta = f^\#(\nu)\}) > 0$ である。

(かゝる $f^\#(\nu) < \text{add}(\mu)$ (a.e.) から,

$$\aleph_\beta < \text{add}(\mu)$$

でなければならず, このことは $f^\#$ の incompressibility に反する。)

$$\therefore g(v) \geq f^\#(v) \quad (\text{a.e.})$$

$$\therefore f^\#(v) = \aleph_{f^\#(v)} \quad (\text{a.e.})$$

$$\text{ゆえに } cf(f^\#(v)) = f^\#(v) \quad (\text{a.e.})$$

($\textcircled{1}$) $\mu(\{v \mid cf(f^\#(v)) < f^\#(v)\}) > 0$ と仮定すると,

$$\exists \beta < add(\mu) \quad \mu(\{v \mid cf(f^\#(v)) = \beta\}) > 0.$$

以下 Lem 4 において, $add(\mu) = \aleph_{\alpha+1}$ として矛盾を導いたのと同様にして ($\aleph_\alpha$ のかわりに β を用いて), 矛盾に到達する。)

$$\text{いま, } p^* = \aleph_{p^*} \text{ とおく。 } p' < p^* \text{ と仮定すると}$$

$$p' < f^\#(v) \quad (\text{a.e.})$$

$$\therefore \aleph_{p'} = p^* < \aleph_{f^\#(v)} < p^* \quad (\text{a.e.})$$

これは矛盾であるから $p' \geq p^*$ 。ゆえに $p^* = \aleph_{p^*}$ 。

以上により $p^* = \aleph_{p^*}$, また Lem. 2 より $cf(p^*) = p^*$ 。

ゆえに $p^* = add(\mu)$ は weakly inaccessible。

(定理の証明終)。

[注意] $\textcircled{1}$ p^* は $\aleph_\omega$ ではない ($\textcircled{1}$ $\omega = \aleph_0$ 。 $\therefore \omega \neq \aleph_\omega$ しかるに $p^* = \aleph_{p^*}$)。また $\aleph_{\aleph_1}$ でもない ($\aleph_{\aleph_1}$

$\neq \aleph_1$ である)。それでは ① $\lambda = \aleph_\lambda$ ② λ : regular
となるような最初の λ は何か? これについては次のことが
知られている:

「 λ : weakly inaccessible $\equiv \text{Reg}(\lambda) \wedge (\lambda = \aleph_\lambda)$ 」
なお $\lambda = \aleph_\lambda$ ならば, λ は limit ordinal であることを
注意せよ。

④ $\text{Cons}((ZF + AC), \nexists \lambda (\text{weakly inaccessible}))$ は示されている。

$\text{Cons}((ZF + AC), \exists \lambda (\text{weakly inaccessible}))$
は証明できない (その証明と, ZF 内での ZF の無矛盾性の
証明とが同値である, ということが示されている)。

【定義】 κ を順序数とする。 μ を κ 上の non-trivial
measure とする。 μ が normal measure である
とは, $\text{id}(\text{identity}) : \kappa \rightarrow \kappa$ が incompressible
であることをいう。

【定理】 $\rho(A) \rightarrow [0, \infty)$ の non-trivial mea-
sure が存在すれば, normal measure が存在する。
すなわち $A : \text{measurable} \Rightarrow \text{add}(\mu) : \text{measurable}$ 。

【証明】 non-trivial measure を μ とする。

Lem. 1 の証明の途中にあるように, $\exists A' \subset A$,

$\exists \mu' : \mathcal{P}(A') \rightarrow [0, \infty)$, $\exists f^\#$ (incompressible);

$$\mu'(\{v \in A' \mid f^\#(v) < \text{add}(\mu')\}) = \mu(A') > 0.$$

いま $\kappa = \text{add}(\mu')$ とおき, $a \subset \kappa$ に対し

$$\mu^*(a) = \mu'(\{v \in A \mid f^\#(v) \in a\})$$

と定義する。この μ^* は measure で,

$$\mu^*(\kappa) = \mu'(A') > 0, \quad \text{add}(\mu^*) = \text{add}(\mu') = \kappa.$$

以下, μ^* の normality を示す。

$$\textcircled{1} \quad \forall \beta < \text{add}(\mu^*) \quad \mu^*(\{v \in \kappa \mid \text{id}(v) = \beta\}) = \mu^*(\{\beta\}) = 0.$$

$\textcircled{2} \quad \mu^*(\{v \in \kappa \mid g(v) < v\}) > 0$ と仮定すると, この左辺 = $\mu'(\{v \in A' \mid g(f^\#(v)) < f^\#(v)\}) > 0$ 。 $f^\#$ は ~~incompressible~~ incompressible だから $\exists \beta < \kappa$;

$$\begin{aligned} \mu'(\{v \in A \mid g(f^\#(v)) = \beta\}) &> 0 \\ \sqsubseteq \mu^*(\{v \in \kappa \mid g(v) = \beta\}) \end{aligned}$$

$\textcircled{1}\textcircled{2}$ より identity が incompressible。

[定義] $\mu : \mathcal{P}(A) \rightarrow [0, \infty)$ なり measure とする。

μ が non-~~atomic~~ atomic であるとは

$\forall B \subset A [\mu(B) > 0 \Rightarrow \exists C \subset B [\mu(C) > 0 \wedge \mu(B-C) > 0]]$ であることをいう。

[定理] (Ulam 1930)

$\mathcal{P}(A)$ 上に non-atomic measure μ が存在するならば, $\text{add}(\mu) \leq 2^\omega$.

[証明] $f: \text{Ord} \rightarrow \{0, 1\}$ に対して, 次のように帰納的に A_f を定義する。

① $A_\emptyset = A$ ($\emptyset$ は定義域が空集合である f)。

② $\text{dom}(f) < \alpha$ なる f に対しては, すべて A_f が定義されているものとする。

(2-1) $\alpha = \beta + 1$ の形するとき

$\text{dom}(f) = \beta$ なる f に対しては A_f は定義されている。

(2-1-1) $\mu(A_f) = 0$ のとき $A_{f*0} = A_f$, $A_{f*1} = \emptyset$ と定義する。ただし $f*0$ とは, β までは f に等しく, $\beta + 1$ に対する値が 0 である関数。

(2-1-2) $\mu(A_f) > 0$ のとき, $\mu(C) > 0$, $\mu(A_f - C) > 0$ なる C を取って $A_{f*0} = C$, $A_{f*1} = A_f - C$ と定義する。

(2-2) α が limit ordinal のとき。

$\text{dom}(f) = \alpha$ なる f に対し, $f|_\beta$ (f の β への制約) を, $\beta < \alpha$ なるすべての β について作る。そして

$A_f = \bigcap_{\beta < \alpha} A_{f|_\beta}$ と定義する。
(定義終)。

$$\mathcal{C} = \{ f \mid \mu(A_f) > 0 \} \text{ とおく}$$

$$f \in \mathcal{C} \rightarrow \text{dom}(f) < \omega_1 = \aleph_1$$

(①) $\geq \omega_1$ とすると, $\forall \alpha < \omega_1, \mu(A_{f|_\alpha}) > 0$ となる。

A_f の作り方から $\mu(A_{f|_\alpha} - A_{f|_{\alpha+1}}) > 0$ 。 $\therefore \{ A_{f|_\alpha} - A_{f|_{\alpha+1}} ; \alpha < \omega_1 \}$ は, positive measure をもった disjoint set の族。このことは μ の有界性に反する。

すべての順序数 β に対して $A = \bigcup_{f: \beta \rightarrow \{0,1\}} A_f$ 。

(①) $\cup$ は $\text{dom}(f) = \beta$ なる f 全部にわたる。だから A_f 全体で A を覆う。以下 $\{0,1\} = 2$ と記す。

$$\text{ゆえに } A = \bigcap_{\beta < \omega_1} \bigcup_{f: \beta \rightarrow 2} A_f$$

$$= \bigcup_{\substack{\text{dom}(t) = \omega_1 \\ t(\beta): \beta \rightarrow 2}} \bigcap_{\beta < \omega_1} A_{t|_\beta} \quad (\text{AC})$$

ここで任意の $t: \omega_1 \rightarrow 2$ に対して

$$S = \{ t|_\beta ; \beta < \omega_1, \mu(A_{t|_\beta}) > 0 \}$$

とすると, S は可算である。(① 非可算なら $\forall \beta < \omega_1$,

$\exists \beta^* > \beta, \mu(A_{t|_{\beta^*}}) > 0$ 。 $\therefore \mu(A_{t|_\beta}) > 0$ 。 $\therefore \forall \beta < \omega_1, \mu(A_{t|_\beta}) > 0$ 。これは矛盾である。) よって

$$\exists g: 2^{\omega_1} \rightarrow \text{Ord}; [g(t) \leq \beta < \omega_1 \Rightarrow \mu(A_{t|_\beta}) = 0]$$

$$\text{よるに } A_{t|_{g(t)}} = \bigcap_{\beta < g(t)} A_{t|_\beta} \text{ だから } \mu(A_{t|_{g(t)}}) = 0$$

$$(e) \quad \therefore \mu\left(\bigcap_{\beta < g(t)} A_{t|_\beta}\right) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{次に } E &= \{t \mid \exists \beta < \omega_1 [t: \beta \rightarrow 2]\} \\ &= \bigcup_{\beta < \omega_1} \{t \mid t: \beta \rightarrow 2\} \quad \text{と置く。すると,} \\ \bar{E} &\leq \omega_1 \cdot 2^\omega = 2^\omega. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore 0 < \mu(A) &= \mu\left(\bigcup_{t: \omega_1 \rightarrow 2} \bigcap_{\beta < \omega_1} A_{t|_\beta}\right) \\ &\leq \mu\left(\bigcup_{t: \omega_1 \rightarrow 2} \bigcap_{\beta < g(t)} A_{t|_\beta}\right) \\ &\leq \mu\left(\bigcup_{t \in E} \bigcap_{\beta < g(t)} A_{t|_\beta}\right). \end{aligned}$$

もし $\text{add}(\mu) > 2^\omega$ なら, (e) によりこの右辺が 0 でなければならぬから, $\text{add}(\mu) \leq 2^\omega$ である。

[注意] ① μ が non-atomic なら $\text{add}(\mu) \leq 2^\omega$ であることは上述の通りであるが,

② μ が non-non-atomic なら, atom A' を持つ。このとき $\mu^*(B) = \mu(B) / \mu(A')$ ($B \subset A'$) と定義することにより, $\mathcal{P}(A')$ 上に 2-valued measure μ^* が作れる。もちろん $\mathcal{P}(A)$ 上に拡大できる。

③ μ が purely atomic のときは

$$\forall \gamma < \text{add}(\mu) [2^\gamma < \text{add}(\mu)]$$

が成立つ。(おまけに $\omega < \text{add}(\mu)$ だから, $2^\omega < \text{add}(\mu)$ である。

④ Cons (ZF + AC + non-atomic-measurable

cardinal の存在) $\Leftrightarrow$ Cons (ZF + AC + purely-atomic-measurable-cardinal の存在) $\Rightarrow$ Cons (ZF + AC + purely-atomic-measurable-cardinal の存在 + GCH)

④ (ZF + AC + CH + non-atomic-measurable-cardinal の存在) は矛盾に導く。

⑤ Cons (ZF + AC + 2-valued-measurable-cardinal の存在) $\Rightarrow$ Cons (ZF + AC + real-valued-measurable-cardinal の存在)。

§3. Rectangle problem.

X, Y を空間とし, $A \subset X, B \subset Y$ とするとき

$$A \times B = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in B \}$$

$$\mathcal{S}[X, Y] = \{ A \times B \mid A \subset X \wedge B \subset Y \}$$

$$\mathcal{B}[X, Y] = (\mathcal{S}[X, Y])^\sigma$$

$$\mathcal{O}[X, Y] = X \times Y \text{ の中集合}$$

と定義する。

[問題] $\mathcal{O}[X, Y] = \mathcal{B}[X, Y]$ であるか?

~~Yes/No/Unknown/Not known~~ " $\mathcal{O}[X, X] = \mathcal{B}[X, X]$ " を $\mathcal{P}(X)$ と書く。

[定理 1] $\mathcal{P}(\aleph_0)$ (これは全く明か)

[定理2] $\bar{X} > 2^{\aleph_0} \Rightarrow \neg \mathcal{I}(X)$

[証明] $D = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in X \} \subset X \times X$ とする。これが $\mathcal{B}[X, X]$ に入らないことを証明する。

かりに $D \in \mathcal{B}[X, X]$ とすると, D は $\mathcal{S}[X, X]$ の中の可算個の集合によって生成される σ -algebra に属する。この可算個の集合を, 一般性を失わずに

$$\{ A_i \times A_j \mid i, j = 1, 2, \dots \}$$

(但し $A_i \subset X, i = 1, 2, \dots$), という形のものとする。

仮定 $\bar{X} > 2^{\aleph_0}$ から, $\exists x \neq y; x \in X, y \in Y,$
 $\forall i \ x \in A_i \iff y \in A_i$ 。すると $(x, x) \in D, (x, y) \notin D$ 。
 しかも $\forall i \forall j \ (x, x) \in (A_i \times A_j) \iff (x, y) \in (A_i \times A_j)$ 。
 これでは $(x, y) \in D$ となって矛盾である。

¶

[定理3] $\mathcal{I}(\aleph_1)$

[証明] 任意の空間 X, Y を考える。順序数 α に対して次のように $\mathcal{B}^\alpha$ を帰納的に定義する。

$$\mathcal{B}^0[X, Y] = \mathcal{S}[X, Y]$$

$$\mathcal{B}^{\alpha+1}[X, Y] = \{ D - C \mid D, C \in \mathcal{B}^\alpha[X, Y] \} \cup \{ \bigcup_{n \in \omega} D_n \mid D_n \in \mathcal{B}^\alpha[X, Y] \} \quad (\omega \neq 0, 1, \dots)$$

$$\mathcal{B}^\alpha[X, Y] = \bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{B}^\beta[X, Y] \quad (\alpha \text{ は limit ordinal のとき}).$$

すると $\mathcal{B}[X_1, Y_1] = \bigcup_{\alpha \in \aleph_1} \mathcal{B}^\alpha[X_1, Y_1] = \mathcal{B}^{\aleph_1}[X_1, Y_1]$ である。

次に Lem. を 3 つ作っておく：

[Lem. 1] 任意の空間 X_1, X_2, Y_1, Y_2 を考える。

$f: X_1 \rightarrow X_2, g: Y_1 \rightarrow Y_2$ を関数 (といっただけでは on
とも onto ともわからない) とする。もしも $C \in \mathcal{B}[X_2, Y_2]$
ならば $(f \times g)^{-1}(C) \in \mathcal{B}[X_1, Y_1]$ 。

[証明] (超限帰納法) $C \in \mathcal{B}^0[X_2, Y_2]$ のとき, $C =$
 $E \times F, E \subset X_2, F \subset Y_2$ 。 $\therefore (f \times g)^{-1}(C) = f^{-1}(E) \times$
 $g^{-1}(F) \in \mathcal{B}^0[X_1, Y_1]$ 。

一般に逆像について次のことは明らかに成立つ：

$$(f \times g)^{-1}(D - C) = (f \times g)^{-1}(D) - (f \times g)^{-1}(C)$$

$$(f \times g)^{-1}\left(\bigcup_{n \in \omega} D_n\right) = \bigcup_{n \in \omega} (f \times g)^{-1}(D_n)。$$

このことから

$$C \in \mathcal{B}^\alpha[X_2, Y_2] \Rightarrow (f \times g)^{-1}(C) \in \mathcal{B}^\alpha[X_1, Y_1]$$

となる。これで帰納法が完成する。

[Lem. 2] 任意の集合 X_1, Y_1 を考える。 $f: X_1 \rightarrow Y_1$ を
関数とする。 $\overline{X_1} \leq 2^{\aleph_0}$ とする。 f^* を f のグラフとする：

$$f^* = \{ \langle a, b \rangle \mid f(a) = b \}。$$

すると $f^* \in \mathcal{B}[X_1, Y_1]$ 。

[証明] $[0, 1]$ の部分集合と X_1 と Y_1 に対応する。
この対応を ψ と書く。関数 g, h を次のように定義する:

$$g(x) = \psi(f(x))$$

$$h(y) = \psi(y) \quad y \in f(X_1).$$

すなわち, h は ψ を $f(X_1)$ に制限したもの。なお, g の定義域 = f の定義域とする。すると

$$\langle x, y \rangle \in f^* \Leftrightarrow (g \times h) \langle x, y \rangle \in C$$

たゞし $C = \{ \langle a, a \rangle \mid a \in [0, 1] \cap \psi(f(X_1)) \}$ 。な

ぜなら, $\langle x, y \rangle \in f^* \Rightarrow (f(x) = y \wedge x \in X_1 \wedge y \in Y_1) \Rightarrow$

$$(g(x) = \psi(f(x)) \wedge h(y) = \psi(y) = \psi(f(x)))。また$$

$$\text{逆に } (g \times h) \langle x, y \rangle \in C \Rightarrow g(x) = h(y) \Rightarrow$$

$$\psi(f(x)) = \psi(y) \Rightarrow f(x) = y \Rightarrow \langle x, y \rangle \in f^*。$$

$$\text{ゆえに } f^* = (g \times h)^{-1}(C)。$$

一方,

$$C = \{ \langle a, a \rangle \mid a \in [0, 1] \} \cap \{ \psi(f(X_1)) \times \psi(f(X_1)) \}$$

$$\in \mathcal{B}([0, 1], [0, 1])。$$

$$\therefore \text{Lem. 1. により, } f^* \in \mathcal{B}[X_1, Y_1]。$$

[Lem. 3] $\bar{X} = \aleph_1$ とすると, $X \times X$ は可算個のグラフの和として書ける。

[証明] $X = \{x_0, x_1, \dots, x_\nu, \dots\} (\nu < \aleph_1)$ と整

列する。 $X \times X = C \cup D$, $C \cap D = \emptyset$ となるよう、次のように C, D を定義する。

$X \times X \ni \langle y, z \rangle$ とすると, $\exists \nu; y = x_\nu, \exists \mu; z = x_\mu$ となる。このことを用いて

$$C = \{ \langle y, z \rangle \mid y = x_\nu, z = x_\mu, \nu \leq \mu \}$$

とする。 $D = (X \times X) - C$ とする。

$X \ni z$ を固定する。そして

$$C_z = \{ y \mid \langle y, z \rangle \in C \}$$

とおく。 $z = x_\mu$ ($\mu < \aleph_1$) と書けるから、

$$C_z = \{ x_\nu \mid \nu \leq \mu \}$$

となる。ゆえに $\overline{C_z} \leq \aleph_0$ 。つまり高々可算個だから、

$$C_z = \{ c_1^z, c_2^z, \dots, c_n^z, \dots \}$$

と書ける。

そこで、次のように関数 $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ を定義する。

$$f_n(z) = \begin{cases} c_n^z & (c_n^z \in C_z) \\ \text{なし} & (c_n^z \notin C_z) \end{cases}$$

(C_z が有限集合のときは、 c_n^z は途中でなくなってしま) のである)。いま $\langle y, z \rangle \in C$ とすると $y \in C_z$ 。ゆえに $y = c_n^z$ と書ける。したがって $f_n(z) = y$ 。

$$\therefore \langle z, y \rangle \in f_n^* \text{ (} f_n \text{ のグラフ)}.$$

すなわち

$$\{ \langle z, y \rangle \mid \langle y, z \rangle \in C \} = \bigcup_{n \in \omega} f_n^*$$

この集合は対角線に關して C と対称だから, C も可算図のグラフの和になる。

D についても, ほぼ同様である。

(以下定理自身の証明) $X \times X \supset E$ とすると, $E = (E \cap C) \cup (E \cap D)$ 。関数 f'_n を次のように定義する。

$$f'_n(z) = \begin{cases} f_n(z) & \langle f_n(z), z \rangle \in E \cap C \\ \text{なし} & \langle f_n(z), z \rangle \notin E \cap C \end{cases}$$

$\langle f_n(z), z \rangle \in C_z$ であるか, これからさらに E にも入っているときだけ, $f'_n(z)$ を定義するのである。すると

$$(E \cap C)' = \{ \langle z, y \rangle \mid \langle y, z \rangle \in E \cap C \} = \bigcup_{n \in \omega} (f'_n)^*$$

f'_n は Lem 2 の f の条件をみたしているから, $(f'_n)^* \in \mathcal{B}[X, X]$ 。
 $\therefore E \cap C \in \mathcal{B}[X, X]$ 。

同様に $E \cap D \in \mathcal{B}[X, X]$ 。

(定理 3. 終り)

[注意] ① $\text{Cons}(2^{\aleph_0} = \aleph_2 \wedge \neg P(X_2), ZF + AC)$

$\text{Cons}(2^{\aleph_0} = \aleph_2 \wedge P(X_2), ZF + AC)$, どちらも示されている。

② 定理 3 から, $CH \rightarrow P(2^{\aleph_0})$ 。

(なお $\text{Cons}(ZF + AC, 2^{\aleph_0} = \aleph_1)$, $\text{Cons}(ZF + AC, 2^{\aleph_0} > \aleph_1)$ は Cohen ('63) によって示されている)。

参考書：竹内外史「現代集合論入門」('71, 日本評論社)
(以上文責 森本治樹)

・ § 記録者註：共同研究の際に難波氏に話していただいた内容の一部に、他の機会に教えていただいたことを加えて、まとめたものである。§ 3. [定理 2] の証明は、高橋駿博氏（阪大教養）によるもので、同氏と難波氏の御了解を得て、ここに入れさせていただいた。この原稿のうち § 2. は鈴木武氏（大阪市大理）に整理していただいて、森本が文章に書下した。この原稿の完成に手回ったのは、私の責任で、そのためこの講究録の発刊が遅れたことを、深くお詫言する。

(森本治樹)