数理解析研究所講究録
第156巻 1972年 1-19

最近のスイッチング理論

東大 情報研 野崎昭弘

従来，スイッチング理論とは，スイッチング素子によって組みたてられた回路の，内部構造をとり扱うものであった。そして，全体を black box と考え，入出力の因果関係のみを扱うオートマトン理論と，区別して考えられてきた。

最近，オートマトン理論とスイッチング理論の境界は，次第に消失しつつある。たとえば，IEEE の Transaction の，Switching Theory のページを見ても，ループを含む回路の誤り検出など，以前ならばオートマトン理論に含めてもよいような問題が散見される。

このような変化の原因としては，理論の進歩と，工学的環境の変化との2つが挙げられると思う。すなわち，ブール関数の分解・合成から進んで，オートマトンの分解・合成がいろいろな角度から論じられるようになったことが，スイッチング理論の‘オートマトン理論化’を可能にした。また，LSI など，それ自身の中にすでに複雑な構造をもつ素子の出現によって，スイッチング素子の“オートマトン化”がも

たらされた。それゆえ，古典的なブール関数を基本とするスイッチング理論だけでは，現実の要求に充分応えられないという時代になってきたのである。

一方，オートマトン理論は別の発展をも示し，言語理論との融合も著しい。それゆえ，オートマトン理論イコールスイッチング理論と考えるわけにはいかないが，オートマトンの分解・合成を論ずる領域は，現在スイッチング理論の一部分と考えた方が自然であるように思われる。

以上を前置として，次に Mukhopadhay, A. の書物を中心に簡単な展望を試み，(§§1-3) それから筆者の専門である完全性の問題について少し詳しい紹介を行いたい。(§4)（スイッチング理論全般にわたる，公平な展望にはなっていないことを，あらかじめお断りしておかなければならない）

以下，

A. Mukhopadhay (ed.), Recent Developments in Switching Theory, Academic Press (1971)

を，RDST と略して引用する。

§1 RDST の紹介

編集者の Amar Mukhopadhay は，Iowa 大学の計算機科学科の助教授であるが，IEEE の Transaction の

Switching Theory の部門の主査をしている。この本は，ホット・ニュースがのっているとはもはやいえないが，最近話題になったいくつかのテーマがとりあげられており，展望の資料としては今でも価値を失なわないと思われる。

各章の標題と執筆者を紹介しておこう（括弧内にページ数を示す）。

I. Complete Sets of Logic Primitives (1-27)
…… A. Mukhopadhyay

いわゆる完全性の問題が解説されている。Post の結果とその証明，弱完全性（almost complete，小林孝次郎）についてのいくつかの結果を含んでいる。（§2参照）

II. Combinational Circuits with Feedback
(28-56) …… D. A. Huffman

ループを含む回路の性質は，feed forward 型の回路からは想像できないところがある。ここでは，1個のNOT素子で，Multi-inversion が実現できるという Huffman 自身の結果が，詳しく解説されている。（§3参照）

III. Lupanov Decoding Networks (57-85)
…… A. Mukhopadhay

リレー回路についての O. B. Lupanov の古典的な結果が解説されている。これは decoding network の問題と

して見ると，現在でも応用上の意味を失なわないようである．一般理論への拡張の試みも述べられている．

IV. Counting and Their Applications to Classification of Switching Functions (86-121) ...... M. Harrison

ポリアの定理の解説と，そのブール関数の分類への応用が述べられている．群の定義から書き始めてあるので，この方面への入門~~[illegible]~~のためにも便利であると思う．

V. Harmonic Analysis of Switching Functions (122-229) ...... R. J. Lechner

ここではスイッチング理論へのフーリエ解析の応用が紹介される．ページ数からみてもわかるように，ていねいな解説である．手法的に面白いので，もっととりあげられてよい分野ではないか，と思われる．

VI. Universal Logic Modules (230-255) ...... H. Stone

n入力の1個の素子に，x_i，$\bar{x}_i$，0，1をいろいろなしかたで入力することにより，どんな関数が実現できるかを考える．n変数の論理関数が全部実現できるとき，その素子をuniversal logic moduleという．ULMをさがす問題は見かけより手ごわいので，いくつかの戦略が紹介される．

VII. Cellular Logic (256 − 315)
..... A. Mukhopadhyay & H. Stone

カスケード型のセルラー・オートマトンと，2次元配列オートマトンが論じられている。日本では東北大学，京都大学などにおいて盛んに研究されている分野である。

VIII. The Theory of Multirail Cascades
(316 − 368) ...... B. Elspas

ここでは群論を利用した，カスケード型オートマトンの出力関数の研究が解説される。群関数（group function）の分解と，オートマトンの合成とが論じられている。

IX. Programmable Cellular Logic (369 − 422)
..... W. H. Kautz

1個または2個のフリップ・フロップを内蔵したセルの2次元配列の機能が考察されている。各フリップ・フロップを適当にセットすること（プログラミング）によって，全体の振舞いが変るので，同じ配列が多目的に利用される。

巻末に，本文あるいは引用文献にあらわれるすべての人名の索引と，事項索引とがつけられている。

次に，筆者の特別の関心をひいたIとIIについて，コメントを述べてみたい。(§§2-3)

§2 Complete sets について

この問題は，ソビエト，東・北欧および日本が著しく進んでいる反面，アメリカはかなり遅れている。そのためこの部分（1章）は，解説記事としては（後に触れる almost complete に関する節を除き）価値があると思うが，最近のレベルからみると非常に遅れている．それゆえ，どの点が古く，現在どのような結果が知られているかを指摘しておくことは無益ではあるまい．

ある論理関数族が完全（あるいは万能）であるとは，その族の中の関数を（重複を許し，変数のおきかえを許し，feed back coupling を許さずに）組み合わせることによって，任意の論理関数が合成できることをいう．

完全性についての基本定理は E. Post によって与えられた（1921）．その証明は，その後 A. Yablonski，伊吹・苗村・野崎，C. Benzaken 等によって独立に与えられ，あまり popular であるとはいえないが，[2]，[6] のような教科書にものせられている．なお [2] は，すべての‘閉じた’関数族を分類・決定した結果を含む労作である．Mukhopadhyay が工夫したという証明は，非常によく整理されてはいるが，本質的には伊吹等の証明と変りない．実は，半群の性質を利用したもっとモダンな証明が知られており（[8]）

[6] にのせられている。

この問題は，二値論理の場合だけでなく，多値論理の場合にも解かれているが，1章から離れすぎるので，§4で触れる。

さて，1でMukhopadhyayは，almost complete (ac)の概念をとりあげている。しかしここには，Markovの結果についての重大な誤解が含まれているので，見逃すわけにはいかない。

論理関数族Fが，acであることの定義をまず述べておこう。

Fが ac $\Longleftrightarrow$ $^{\exists} g_1, \ldots, g_p$（論理関数）
$^{\exists} k_1, \ldots, k_p$（自然数）：
任意の論理関数が，$F \cup \{g_1, \ldots, g_p\}$が合成できる。ただし，$g_i$は高々$k_i$個しか使用してはならない。

（個数は，"素子の個数"として数える（出力の分岐を自由とする）。詳しくは1．あるいは[3]参照）

合成の手段として，feedback loopは許さない。もし許せば，1個の素子と無制限のAND，ORによって任意の関数が実現できる（Huffman）。それゆえ，{AND，OR}はfeedbackを許せばacである。しかし，feedback

を許さない場合を考えているので，{AND, OR}が果たして ac かどうかが問題になる，というわけである。

F∪{0, 1}が complete（任意の関数が合成可能）なら，F は ac である（出力の分岐が自由なので，0，1 をそれぞれ高々1回使うだけでよい）。このような F は，trivially ac と呼ばれ，non-trivially ac の方に興味がもたれているようである。（minimal non-trivially ac set についての条件などが，定理7．5，定理7．6に述べられている）．{AND, OR}についての結論は示されておらず，ac sets の完全な特徴づけは not known だと述べられている。しかし，Markov と Post の結果から，次の定理が容易に得られるのである．

<u>定理1</u>　{AND, OR}は ac <u>でない</u>

<u>定理2</u>　単調増大関数の全体を $\mathcal{M}$，線型関数の全体を $\mathcal{L}$ であらわす．すると，

$$F \text{ が trivially ac} \longleftrightarrow F \not\subseteq \mathcal{M} \text{ かつ } F \not\subseteq \mathcal{L}$$

<u>定理3</u>　Non-trivially ac set は，存在<u>しない</u>

定理1の根拠になるのは，Mukhopadhyay も引用している，Markov の次の結果である．

N 個の変数 $x_1, \ldots, x_N$ の反転 $\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_N}$ が，m 個の

NOTと無制限のAND，ORとで実現可能

$$\Longleftrightarrow \quad N \leqq 2^m - 1$$

すると，かりに{AND，OR}がacであれば，

$$g_1, \cdots, g_p$$

の$k_1, \ldots, k_p$回以下の使用によって任意の論理関数が実現できる筈である．g_iは{AND，OR，NOT}で実現できるが，その時d_i個のNOTが使われたとすると，結局

$$m = \sum_{i=1}^{p} k_i d_i$$

個のNOTで任意の論理関数が合成できることになり，Markovの結果に矛盾する．

Mukhopadhyayは，Markovの結果の（$\Longleftarrow$）のみ引用しており（p17），（$\Longrightarrow$）を見逃がしていたようである．

定理2は，Postの次の結果からほとんど明らかである．

Fが complete $\Longleftrightarrow$ Fは次の5個の集合の，どれにも含まれない（$\not\subset$）．

1）$\mathcal{M}$　　2）$\mathcal{L}$

3）$\mathcal{S}$ ＝ 自己双対関数の全体

4）$M_0 = \{ f \mid f(0, \ldots, 0) = 0 \}$

5）$M_1 = \{ f \mid f(1, \ldots, 1) = 1 \}$

この結果と，

$$\{0, 1\} \not\subseteq \mathcal{S},\ M_0,\ M_1$$

$$\{0, 1\} \subseteq \mathcal{M},\ \mathcal{L}$$

から，定理2がただちに得られる．

定理3は次のようにしてたしかめられる．

$F \vee \{0, 1\}$ が incomplete $\Longrightarrow$ $F \subseteq \mathcal{M}$ または
$F \subseteq \mathcal{L}$

ところが1章の中に指摘されているように（p.19, Theorem 7.4），

$$F \subseteq \mathcal{L} \Longrightarrow F \text{ は not ac}$$

また $F \subseteq \mathcal{M}$ が ac なら $\mathcal{M}$ も ac であるが，それは{AND, OR}が ac であることを意味し，定理1に反する．いずれにしても，F は ac でない．

以上の結果から，almost complete set の特徴づけは，定理2で尽きていることがわかる．

§3 Multi-Inversion について

RDSTの11章で，Huffmanが1970年に発表した，1個のNOTによる多変数の反転が論じられている．これは極めて巧妙な回路で，回路内部の状態が安定しないのにも拘らず，出力は（ある意味で）安定になる．

しかし，この結果については，次のような疑問が生ずる．

(1) 同期式回路ならば，feedback loopがなくても，1個のNOT素子による多変数の反転が可能である。（NOT素子の時分割利用）.

(2) 非同期式回路として，Mullerの理論の枠内で考えると，Huffmanの回路が正しく働くという保証はない。（ただし，Huffmanが使用している多数決素子の動作時間が，遅延素子に比べて充分短かければ，誤った出力が出現する時間はごく短かい（しかしくり返し限りなく起る）ので，もし技術的に除去可能なら，practicalにも使えるかもしれない。

さて，このような出力のふるまいについて，従来のMuller流の非同期式回路理論はあまり多くのことを示してくれない。そこで出力の安定性の概念をごくふつうに定義した上で，回路が出力安定になるための条件を調べてみたところ，次の結果が得られた。

回路Cの<u>状態</u>を，構成素子の出力のベクトル表示

$$a=(a_1,\ldots,a_N)$$

であらわす．N個の素子のうち，p個は外部出力端子に接続されているとし，それらを

$$\omega(a)=(a_{i(1)},\ldots,a_{i(p)})$$

であらわす．

状態 a，b の推移を Muller と同じように定義し，

$$a \longrightarrow b$$

であらわすことにする．また，許容列

$$a(1) \longrightarrow a(2) \longrightarrow a(3) \longrightarrow \cdots\cdots$$

の概念も，Muller と同様に定義する（ただし，条件

$$a(n) \neq a(n+1)$$

は要求しない）．C の素子がすべて同時に動作したときの，a の次の状態を，a' であらわす．

［注意］入力は，あってもよいが，'充分な期間一定である' と仮定するので，以下入力には触れない．（定数パラメータと思えばよい）

［定義］回路 C が初期状態 s_0 に関して<u>出力安定</u>である

$$\Longleftrightarrow \ {}^{\exists} c = (c_1, \ldots, c_p)$$

$${}^{\forall}\text{許容列} : s_0 = s(1) \longrightarrow s(2) \longrightarrow s(3) \longrightarrow \cdots$$

$${}^{\exists} N \ {}^{\forall} n \geqq N : \omega(s(n)) = c$$

［定義］回路 C が初期状態 s_0 に関して<u>s－出力安定</u>である

$$\Longleftrightarrow \ {}^{\exists} c = (c_1, \ldots, c_p) \ {}^{\exists} N \ {}^{\forall} n \geqq N :$$

$$s_0^{(n)} = c$$

ただし $s_0^{(1)} = s_0'$，　$s_0^{(n)} = [s_0^{(n-1)}]'$

［命題］　C が出力安定 $\Longrightarrow$ C が s－出力安定

∵）$s_0 \longrightarrow s_0' \longrightarrow s_0'' \longrightarrow \cdots\cdots$ は許容列だから明白．

この命題の逆がいつ成りたつか，が問題であるが，ひとつの充分条件として，平行可能の概念がある．

［定義］ C が平行可能であるとは，

$$a(1) \longrightarrow a(2) \longrightarrow a(3) \longrightarrow \cdots\cdots$$

が許容列ならば

$$a(1)' \longrightarrow a(2)' \longrightarrow a(3)' \longrightarrow \cdots\cdots$$

も許容列になることをいう．

［定理1］ C が semi-modular $\Longrightarrow$ 平行可能

［定理2］ C が平行可能かつ s－出力安定 $\Longrightarrow$ 出力安定．

［定理3］ C が semi-modular ならば，

出力安定 $\Longleftrightarrow$ s－出力安定

証明は［6］pp 195－197，pp 264－265 にのっている．

Huffman の回路に戻っていうと：

［命題］ Huffman の回路は，出力安定でない（essential hazard がある）

多少定量的に述べると，次の事実がある．

(1) Huffman の回路は，遅延素子の動作時間のオーダーの正しい出力と，論理素子の動作時間のオーダーの誤った出力を交互に出す．

(2) 平行可能かつ s－出力安定な回路において，素子の動作時間が δ でおさえられ，また

$$s_0 \longrightarrow s_0' \longrightarrow s_0'' \longrightarrow \cdots\cdots$$

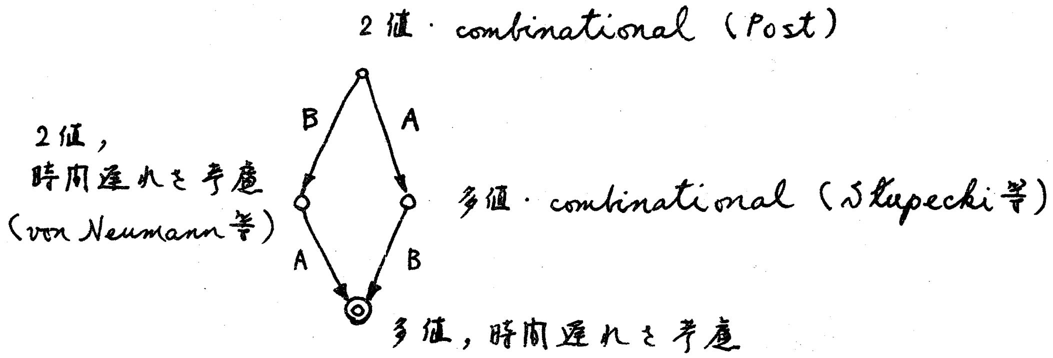
においてNステップで出力が安定したとする．そのとき，どのような許容列においても（つまりいかなる場合でも），

$$\alpha p N$$

以内の時間で出力が安定する（pは外部出力端子の個数）．

§4 Completeness Problemの拡張について

通常の二値関数族についてのcompleteness problemは，§2で引用したPostの結果によって一応解決したと考えられる．この問題はしかし，次の2つの方向に拡張できる．



すなわちA：多値論理関数族への拡張，B：時間遅れを含む場合への拡張である．以下，主要な結果を簡単に展望する．

4.1. 多値・combinational な場合

Ωをk値論理関数全体の集合，$\mathfrak{F}$をその部分集合とする．

$\mathfrak{F}$から合成できる関数の全体を$\overline{\mathfrak{F}}$であらわす．

［定義］ $\mathfrak{F}$ complete $\Longleftrightarrow$ $\overline{\mathfrak{F}} = \Omega$

[補題] $\mathfrak{F}$ complete $\Longleftrightarrow$ ${}^\forall \mathfrak{M}$: maximal incomplete set $\mathfrak{M} \not\supseteq \mathfrak{F}$.

[定理] (Słupecki, 証明は [8] を見よ)

$$\mathfrak{F} \text{ complete} \Longleftrightarrow \begin{cases} (1) & \mathfrak{F} \supseteq \Omega_1 \quad \left(\begin{array}{c} k\text{値 1変数} \\ \text{関数の全体} \end{array}\right) \\ (2) & \mathfrak{F} \not\subseteq N \end{cases}$$

ただし

$$N = \begin{cases} \mathcal{L} & (\text{線型関数の全体}) \ \ldots\ldots \ k = 2 \text{ のとき} \\ \mathcal{S} & (\text{本質的1変数関数と, not-onto 関数の全体}) \ \ldots\ldots \ k \geqq 3 \text{ のとき} \end{cases}$$

[定義] Ω_1 を k 値1変数論理関数の全体とする. Ω_1 は関数合成 $\circ$ に関して半群をなす(恒等写像 I が単位元).

$S \subseteq \Omega_1$ に対し,

$$F(S) \overset{D}{=} \{ f \in \Omega \ ; \ {}^\forall g_1, \ldots, g_p \in S$$

$$g(x) = f(g_1(x), \ldots, g_p(x))$$

$$\text{とおくと, } g \in S \}$$

[定理] (Butler)

$$\mathfrak{F} \supseteq \Omega_1 \Longleftrightarrow \begin{cases} {}^\forall G, \ I \in G \subsetneqq \Omega_1, \ \Omega_1 \text{の部分半群} \\ F(G) \not\ni \mathfrak{F} \end{cases}$$

[系] $\mathfrak{M}$ が maximal incomplete set ならば,

1) $\mathfrak{M} = N$

または

2) $^{\exists}G$, Ω_1 の部分半群, $I \in G$, $G \subsetneqq \Omega_1$

$$\mathfrak{M} = F(G).$$

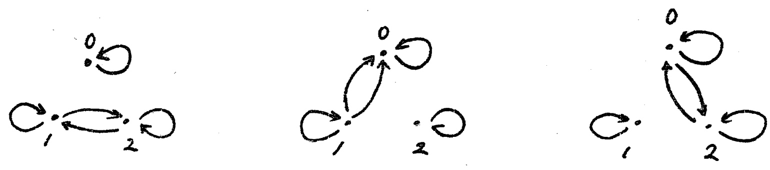
[系] maximal incomplete sets は有限個しかない.

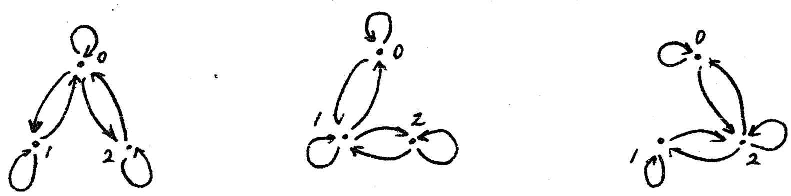
Maximal incomplete sets を決定する作業は，$k=3$ の場合 Yablonski によって，$k \geqq 3$ の場合 Rosenberg によって行なわれた．それらを explicit にかくには，[5] に述べた relation の言葉が便利である．たとえば Yablonski が与えた18個の sets は，次の18種の relations によって特徴づけられる．

1) 1次の relations ($R \subseteq X = \{0, 1, 2\}$)：

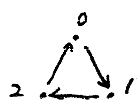
$\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{0, 1\}$, $\{1, 2\}$, $\{2, 0\}$

2) 2次の relations ($R \subseteq X^2$)

(a)  (同値関係)

(b)  (中心関係)

(c)  (順序関係)

(d)  (循回置換)

3) 3次の関係

$$R_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \;;\; a \oplus b \oplus c = 0 \right\}$$

$$R_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \;;\; a = b \text{ または } b = c \text{ または } c = a \right\}$$

[注] $F(R_2) = N$ となる.

4.2. 多値・unit delay の場合

[5] のように $\mathfrak{F}^*$ を定義する ($\mathfrak{F}^* \subseteq \overline{\mathfrak{F}}$)

[補題] $\mathfrak{F}^* = \Omega \iff {}^\forall \mathfrak{M}$: max. $*$-incomplete set

$\mathfrak{M} \not\supseteq \mathfrak{F}$.

[定理] (野崎) $\mathfrak{M}$ が maximal $*$-incomplete ならば

1) ${}^\exists a, b \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, $a \neq b$;

$$\mathfrak{M} = K(a, b) \supseteq \{ f \mid f(a, \ldots, a) = f(b, \ldots b) \}$$

または

2) ${}^\exists S_0, \ldots, S_n \subseteq \Omega_1$, $S_i \neq S_j$ if $i \neq j$,

$$\mathfrak{M} = \bigcap_{i=1}^{n} F(S_{i-1}, S_i)$$

ただし $F(S, S') = \{ f \mid {}^\forall g_1, \ldots, g_p \in S$ に対し,

$g(x) = f(g_1(x), \ldots, g_p(x))$ とおくと

$g \in S' \}$

4.3 多値・非負整数 delay の場合

[ ] のように $\tilde{\sigma}$ を定義する.

[補題] σ が $\sim$-complete

$\iff$ ${}^{\forall}\tau$, maximal $\sim$-incomplete spectrum :

$$\tau \not\supseteq \sigma$$

[定理] (足田) τ が maximal $\sim$-incomplete spectrum ならば, 1) 〜 4) のどれかひとつが成りたつ.

1) ${}^{\exists}\mathcal{M}$ maximal incomplete set : $\tau_i = \mathcal{M}$

2) ${}^{\exists}S_0, \dots, S_{p-1} \subseteq \Omega_1$, $p \geqq 2$,

$$\tau_i = \bigcap_{j=0}^{p-1} F(S_j, S_{j \oplus i})$$

3) ${}^{\exists}S_0, S_1 \subseteq \Omega_1$, ${}^{\exists}a, b$ $(a \neq b)$:

i) $\tau_0 = F(S_0, S_0)$

ii) $\tau_i = F(S_0, S_1)$ $(i \geqq 1)$

iii) $S_1 \subseteq K(a, b)$

4) ${}^{\exists}\mathcal{M}$ maximal incomplete set :

i) $\mathcal{M} \cap$ {定数関数} $= \phi$

ii) $\tau_0 = \mathcal{M}$

iii) $\tau_i =$ 定数関数の全体 $(i \geqq 1)$

これは最新の情報である((1972), 足田輝雄, 東大修士論文).

関連する問題については, [5] a, b を参照のこと.

参考文献

[1] Huffman, D. A., Logical Design with one NOT element, Proc. of 2nd Hawaii International Conference on System Sciences (1969)

[2] Kuntzman, J., Algèbre de Boole, Dunod (1967)

[3] Markov, A. A., On the inversion complexity of a system of functions, JACM, vol. 5, 331-334

[4] Mukhopadhyay, A. (ed), RDST. Academic Press (1971)

[5] 野崎昭弘「多値論理とオートマトン」京大数解研多値論理およびその応用研究会報告集 ((a) 1970, (b) 1971)

[6] 野崎昭弘「スイッチング理論」共立出版 (1972)

[7] Rosenberg, I., Structure de la classe des fonctions définies dans un ensemble fini quelconque, Comptes Rendus Sci. Paris, T 260 (1965)

[8] Butler, J., On Complete and Independent Sets of Operations in finite algebras, Pacific J. of Math. 1169-1179 (1960)

[9] Yablonski, J., Functional Structure of k-valued logics, Trudi Math. Inst. Steklova 51 (1958) 5-142