数理解析研究所講究録
第156巻 1972年 183-197

カウンタ機械の計算可能性

電気通信大学　金　山　裕

はじめに

カウンタをk個もつ機械を$k-CM$と表わし[1]，いまこれを数論的関数を計算する手段として用いることにする．Shepherdsonらは任意の帰納的関数がある$k-CM$によって計算できることを示した[4]．したがって，帰納的関数fが与えられたとき，$k=k(f)$が存在して，fは$(k-1)-CM$では計算できないが，$k-CM$によって計算できる．この$k(f)$が如何なるものであるかを，あらゆるfについて考察することが本稿の目的である．なお，ここでは1変数関数だけを対象として扱う．

$k-CM$は$n\times(n+1)$の行列　$U=[u_{ij}]$　である[2]．ここでu_{ij}はs_g, p_g, z_g ; $g=1,\cdots,k$　から作られる多項式である．このとき各$i=1,\cdots,n$について，部分関数$\hat{U}_{(i)}: N^k \to N^k$が定義される．この部分関数（$\hat{U}_{(1)},\cdots,\hat{U}_{(n)}$）は方程式系

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij} f_j + u_{i,n+1} \qquad : i = 1, \cdots, n \qquad (1)$$

の最小解となっている．これを用いて1変数部分関数(U)：$N \to N$ がつぎにより定義される．

$$(U)(x) = \begin{cases} y & \text{if } (\exists y_2)\cdots(\exists y_k)\left[\widetilde{U}_{(1)}(x, 0, \cdots, 0) = (y, y_2, \cdots, y_k)\right] \\ \text{undefined} & \text{if } \widetilde{U}_{(1)}(x, 0, \cdots, 0) = \text{undefined}. \end{cases}$$

つぎの定理はTuring機械を模倣することによって，小林によってはじめ与えられた．ここではk-CMを2-CMによって模倣することによって示す．

定理1 [小林, 5] すべての1変数帰納的関数 f について 3-CM U が存在して $(U) = f$.

証明．

$$U_E = \begin{bmatrix} \mu & s_2 & \mu & \mu & \mu & \mu \\ \mu & \mu & p_1 & \mu & z_1 & \mu \\ \mu & \mu & p_2 s_3^2 & z_2 & \mu & \mu \\ \mu & z_3 & \mu & p_3 s_2 & \mu & \mu \\ \mu & \mu & \mu & \mu & p_2 s_1 & z_2 \end{bmatrix}, \quad U_L = \begin{bmatrix} \mu & z_1 s_3 & p_1 & \mu & \mu \\ z_2 & p_2 s_1 & \mu & \mu & \mu \\ p_1 s_2 & \mu & \mu & z_1 & \mu \\ \mu & \mu & \mu & p_3 s_1 & z_3 \end{bmatrix}$$

とおくと，U_E と U_L は3-CMで，$\widetilde{U}_{E(1)}(x, 0, 0) = (2^x, 0, 0)$ かつ $\widetilde{U}_{L(1)}(2^y(2z+1), 0, 0) = (y, z, 0)$ となる．

Shepherdson らにより，すべての f について U_f が存在して $f = (U_f)$ [4]．$x = (x_1, \cdots, x_k) \in N^k$ を gödel number 化する．

$$gn(x) = 2^{x_1} 3^{x_2} \cdots \pi_k^{x_k} \qquad (\pi_k \text{は第}\,k\,\text{番目の素数},\ \pi_1 = 2).$$

ところで，Minsky によると [3]，U_f に対して U_S が存在して（U_S は 2-CM），すべての $x \in N^k$ について

$$\tilde{U}_{S(1)}(gn(x),0) = \begin{cases} (gn(\tilde{U}_{f(1)}(x)),0) & \text{if } \tilde{U}_{f(1)}(x) \text{ is defined} \\ \text{undefined} & \text{otherwise} \end{cases}$$

となる．以上の U_E, U_S, U_L を用いて

$$U = \begin{array}{c} \underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{U_E} & & \mu \\ & \boxed{U_S} & \\ \mu & & \boxed{U_L} \end{bmatrix}}_{n+10} \end{array} \begin{array}{l} \}\,5 \\ \}\,n \\ \}\,4 \end{array}$$

のように U を定義すると，U による計算 [2] はつぎのようになる．$f(x)=$ defined のときは，

$$\langle 1,(x,0,0)\rangle \overset{+}{\Rightarrow} \langle 5,(2^x,0,0)\rangle = \langle 5,(gn(x,0,\cdots,0),0,0)\rangle$$

$$\overset{+}{\Rightarrow} \langle n+5,(gn(\tilde{U}_{f(1)}(x,0,\cdots,0)),0,0)\rangle$$

$$= \langle n+5,(2^{f(x)}(2z+1),0,0)\rangle$$

$$\Rightarrow \langle n+10,(f(x),z,0)\rangle$$

$f(x)=$ undefined のときは

$$\langle 1,(x,0,0)\rangle \overset{+}{\Rightarrow} \langle 5,(2^x,0,0)\rangle = \langle 5,(gn(x,0,\cdots,0),0,0)\rangle$$

$$\Rightarrow \cdots\cdots \qquad \text{（停止しない）}$$

ゆえに　$(U)(x)=f(x)$． ⊠

これで，あらゆる f が 3-CM を使えば計算できることが明

らかになったので，2−CMまたは1−CMでどの程度の計算が可能となるのかが問題になってくるのである．

1．CMの標準形

2−CMの特性を知るために，本節ではその標準形をもとめる．標準形をもとめる手続きはすべてeffectiveである．標準形をもとめることは，単純な同値問題を解くことである．

$\mathfrak{U}=[u_{ij}]$ において，$u_{ii}\neq\mu$ なる u_{ii} を小ループという．任意の$\mathfrak{U}$を変形して，$i\neq1$のときは小ループをもつようにすることができる（$i=1$については問わない）．

補題2．任意の$\mathfrak{U}$について$\mathfrak{V}=[v_{ij}]$が存在して，

$i\neq1\rightarrow v_{ii}\neq\mu\wedge\tilde{\mathfrak{U}}_{(1)}=\tilde{\mathfrak{V}}_{(1)}$．

証明．$l\neq1$かつ$u_{ll}=\mu$なるlが存在していると仮定する．方程式系(1)の右辺でf_lが現われる場所すべてに，(1)の第l式の右辺を代入した方程式系を$\mathfrak{U}'$とする．$\tilde{\mathfrak{U}}_{(i)}=\tilde{\mathfrak{U}}'_{(i)}$が各$i$について成り立つ．$u_{ll}=\mu$であることから，$\mathfrak{U}'$には$f_l$が現われない．よって，$\mathfrak{U}'$から，第$l$行と第$l$列を除いた行列を$\mathfrak{U}''$とすると，$\tilde{\mathfrak{U}}_{(1)}=\tilde{\mathfrak{U}}''_{(1)}$．この操作を繰り返すと，$i\neq1\wedge u_{ii}=\mu$なる$i$は存在しなくなる．☒

$\forall x\in N^k$について，$\lambda(x)=x$とする．また，任意の部分関数$f:N^k\rightarrow N^k$について，$f^0=\lambda$，$f^{m+1}=f(f^m)$とする．

基本関数 s_g, p_g, z_g ($g=1,\cdots,k$) を重複を許して任意回数掛けてできる関数 t を項という。$a,c\in N$; $b=0$ か 1 について $(a,b,c)_g = p_g^{\,a} z_g^{\,b} s_g^{\,c}$ と定義する。$(a,b,c)_g$ は1つの項である。故に $(a_1,b_1,c_1)_1\cdots(a_k,b_k,c_k)_k$ も1つの項である。この形の項を項の標準形という。この項を $b_1\cdots b_k$ 項という。例えば $p_1^2 z_1 p_2 s_2^3 = (2,1,0)_1(1,0,3)_2$ は10項である。

補題3 [項の分解] 任意の a,c,d,g について,

$$(a,0,c)_g = (a+d,0,c+d)_g + \sum_{j=0}^{d-1}(a+j,1,c+j)_g .$$

この補題を用いることによって，1つの01項を，他の01項と複数個の11項の和に分解することなどが可能になる。

補題4．すべての項 t について，t と等価な標準形の t' が1つそしてただ1つ存在するか，又は $t=\mu$ である。

補題5．任意の多項式 u について，項 $t_1,\cdots,t_m$ ($m\geq 0$) が存在して，$u=t_1+\cdots+t_m$．ここで $m=0$ のときは右辺 $=\mu$ と定義する。

補題6．t が $b_1\cdots b_k$ 項，t' が $b_1'\cdots b_k'$ 項で $tt'\neq\mu$ ならば，$b_1''\cdots b_k''$ 項 t'' が存在して，$tt'=t''$ かつ $b_g''=\max(b_g,b_g')$; $g=1,\cdots,k$.

これより，対象を 2-CM に限ることにする。01, 10, 00 項を更に細かく，つぎのように定義する。

(a) $a_1>c_1 \wedge a_2=c_2$ のとき，項$(a_1,0,c_1)_1(a_2,1,c_2)_2$を01=項という．

(b) $a_1=c_1 \wedge a_2>c_2$ のとき，項$(a_1,1,c_1)_1(a_2,0,c_2)_2$を10=項という．

(c) $a_1>c_1 \wedge a_2>c_2$ のとき，項$(a_1,0,c_1)_1(a_2,0,c_2)_2$を00−−項という．

(d) $a_1>c_1 \wedge a_2\le c_2$ のとき，項 〃 を00−+項という．

(e) $a_1\le c_1 \wedge a_2>c_2$ のとき，項 〃 を00+−項という．

更に，$im(f)=\{f(x)\mid x\in N^2\}$と定義する．

00，01，10項の有限集合Tがつぎの条件I〜Vをすべてみたすとき，<u>標準形</u>といわれる．

I. すべての$t\in T$のdomainは互に素である．

II. $t\in T$が00項ならば，tは00−−，00+−，00−+項のいずれかである．

III. $t\in T$が01項ならば，[tは01=項 $\vee (\exists t')[t'\in T \wedge t'$は01=項または00−+項 $\wedge\ im(t)\subseteq dom(t')]]$

IV. $t\in T$が10項ならば，[tは10=項 $\vee (\exists t')[t'\in T \wedge t'$は10=項または00+−項 $\wedge\ im(t)\subseteq dom(t')]]$

V. $[t,t'\in T \wedge t$は01項$\wedge\ t'$は10項$]\to tt'=t't=\mu$.

さらに，$dom(f)\cap dom(g)=\phi$ のとき，$f^*g=\sum_{m=0}^{\infty} f^m g$ と定義する．$*$は2項演算子である．

補題7．(a) $f^*g=f(f^*g)+g$.

(b) $(f_1+f_2)^*g=(f_1^*f_2)^*(f_1^*g)$

(c) $f_1f_2=f_2f_1=\mu \to (f_1+f_2)^*g=f_1f_1^*g+f_2f_2^*g+g$.

補題8. 任意の2-CMの多項式f, gについて, $dom(f) \cap dom(g) = \phi$ ならば, 00, 01, 10項の標準形の集合 $T = \{t_1, \ldots, t_m\}$ と多項式g'が存在して, $f^* g = (\Sigma T)^* g'$. ここで $\Sigma T = t_1 + \cdots + t_m$ と定義する.

証明. つぎのいくつかのステップにより, Tとgを与える. まず, (1) fを項の和の形に直し, その項すべての集合をTとおく. 別に$T' = \phi$とおく.

(2). $T - \{(a_1, 0, c_1)_1 (a_2, 0, c_2)_2 \mid a_1 \le c_1 \wedge a_2 \le c_2\}$ を改めてTとおく.

(3) 次の条件をみたす$t_1 \cdots t_\ell \in T$ ($\ell \ge 2$) と $a_1, c_1, a_2, a_1', c_1'$ が存在するか否かを調べる. なければ(4)へ移る.

$$\begin{cases} t_1 = (a_1, 0, c_1)_1 (a_2, 1, c_2)_2 \\ t_1 \cdots t_\ell = (a_1', 0, c_1')_1 (a_2, 1, a_2)_2 \end{cases}$$

存在するならば, $a_1 \le a_1'$かつ$t_2, \ldots, t_\ell$は01項か00項である. この中に00項は重複して現われる可能性があるが, 同一の01項は高々1回しか現われない.

$a_1 < a_1'$のとき, $a_1 + d = a_1'$とおき, 補題3を用いてt_1を分解する.

$$t_1 = t_1' + \sum_{j=1}^{d-1} t_{1j}'$$
$$= (a_1', 0, c_1 + d)_1 (a_2, 1, c_2)_2 + \sum_{j=1}^{d-1} (a_1 + j, 1, c_1 + j)_1 (a_2, 1, c_2)_2$$

これにより, 端の効果をなくすことができる. このとき,

$$\begin{cases} t_1' t_2 \cdots t_l = t_1 t_2 \cdots t_l = (a_1', 0, c_1')_1 (a_2, 1, a_2)_2 \\ \mathrm{dom}(t_1' t_2 \cdots t_l) = \mathrm{dom}(t_1') \end{cases}$$

となる、$(T - \{t_1\}) \cup \{(a_1', 0, c_1')_1 (a_2, 1, a_2)_2 \mid a_1' > c_1'\} \cup \{t_{1j}' \mid j = 0, \cdots d-1\}$ を改めて T とおく．ここで (3) の先頭に戻る．

(4) 上の (3) と同様の処理を 10項について行う．

(5) 01項であって 01=項ではない項 t_1 が T に属していなければ (6) へ進め．そのような項を1つとり，これを分解して端の効果がないようにしておく．つまり $t_1 = (a_1, 0, c_1)_1 (a_2, 1, c_2)_2$ で a_1 は十分大きいとする．((3) の処理が終っているので，ループを作ることはない)．このとき，つぎの2つのうちのいずれかの条件が成立する．

$$\begin{cases} \text{(a)} \quad \exists t_2 \cdots t_{l+1} \in T\,[\,\mathrm{im}(t_1 \cdots t_l) \subseteq \mathrm{dom}(t_{l+1}) \wedge t_{l+1}\text{は01=項または00−+項}\,] \\ \text{(b)} \quad \exists t_2 \cdots t_l \in T\,[\,\mathrm{dom}(t_1) = \mathrm{dom}(t_1 \cdots t_l) \wedge \mathrm{im}(t_1 \cdots t_l) \cap \mathrm{dom}(\Sigma T) = \phi\,] \end{cases}$$

(a) のときには $(T - \{t_1\}) \cup \{t_1 \cdots t_l\}$ を再び T とおく．

(b) のときには $(T - \{t_1\})$ を再び T とおき，$T' \cup \{t_1 \cdots t_l\}$ を再び T' とおく．この後 (5) の先頭へ戻る．

(6) 10項であって 10=項ではない項について，(5) と同様の処理を行う．

(7) $t, t' \in T \wedge t$ は01項 $\wedge\, t'$ は10項 $\wedge\, [\,tt' \neq \mu \vee t't \neq \mu\,]$ なる t, t' が存在しなければ (8) へ進め．存在するとき，

$[t = t_0 + \sum_j t_j \wedge t' = t_0' + \sum_j t_j' \wedge t_0$ は 01 項 $\wedge t_0'$ は 10 項 $\wedge t_j$, t_j' は 11 項 $\wedge t_0 t_0' = t_0' t_0 = \mu]$ なる $t_0', t_0, \{t_j\}, \{t_j'\}$ が存在する. このとき, $(T - \{t, t'\}) \cup \{t_0, t_0'\} \cup \{t_j\} \cup \{t_j'\}$ を再び T とおき, 再び (7) の先頭へ戻る.

(8) $\exists t_2 \cdots t_\ell \in T \; \exists a_1 \exists a_2 [t_1 t_2 \cdots t_\ell = (a_1, 1, a_1)_1 (a_2, 1, a_2)_2]$ なる t_1 が存在しないとき, (9) へ進め. そうでないとき, $T - \{t_1\}$ を改めて T とおき, 再び (8) の先頭へ戻れ.

(9) 11 項の $t_1 \in T$ が存在しなければ (10) へ進め. 存在するときはつねにつぎが成立する ($\ell \geq 0$).

$(\exists t_2) \cdots (\exists t_\ell) [t_2, \cdots, t_\ell \in T \wedge \overbrace{(\Sigma T)}^{t_1 \cdots t_\ell} = \mu]$. このとき $T - \{t_1\}$ を改めて T とおき, $T' \cup \{t_1 \cdots t_\ell\}$ を改めて T' とおき, (9) の先頭へ戻る.

(10) 得られた T が最終的に求める T である. 更に $g' = g + (\Sigma T')g$ とおく. $\boxtimes$

項 t が 00−−, 00−+, 00+−, 01=, 10= 項のいずれかであるとき, t は <u>α 標準形</u>であるという

補題 9. 任意の 2-CM U について, $V = [v_{ij}]$ が存在して, $[i \neq 1 \to (\exists t)[v_{ii} = t \wedge t$ が α 標準形$]] \wedge [v_{11} = \mu \vee (\exists t)[v_{11} = t \wedge t$ が α 標準形$]] \wedge [\widetilde{U}_{(1)} = \widehat{V}_{(1)}]$.

証明. 補題 2 と補題 8 によって, $U = [u_{ij}]$ が $(i \neq 1 \to (\exists T)[u_{ii} = \Sigma T \wedge T$ は標準形$]) \wedge (u_{11} = \mu \vee (\exists T)[u_{11} = \Sigma T \wedge T$ は標準形$])$

を満たすと仮定してよい．$u_0=\sum_{j=1}^{i-1}u_{ij}f_j+\sum_{j=i+1}^{n}u_{ij}f_j+u_{i,n+1}$ とおく，いま u_{ii} が α標準形の項にも μ にも等しくないとする．u_{ii} を項の和に分解して，その項の集合をTとおくと，その形によって条件(I)～(IV)のうちいずれかが満される．

(I) 00一項がTに属するとき．

その項を t とする．更に，

01=項を $t_{01,1},\dots,t_{01,m}$，その和を v_{01}

10=項を $t_{10,1},\dots,t_{10,\ell}$，その和を v_{10}

01=項以外の01項の和を w_{01}，

10=項以外の10項 〃 w_{10}，とそれぞれ表わす．

Tはα標準形をしているから，次式が成り立つ．

$$v_{01}(t+w_{01}+w_{10}+v_{10})=\mu$$

$$v_{10}(t+w_{10}+w_{01}+v_{01})=\mu$$

$$w_{01}(t+w_{01}+w_{10}+v_{10})=\mu$$

$$w_{10}(t+w_{10}+w_{01}+v_{01})=\mu$$

これと補題7によって，

$$\begin{aligned}
u_{ii}^*u_0 &= (t+v_{01}+v_{10}+w_{01}+w_{10})^*u_0\\
&= ((v_{01}+v_{10}+w_{01}+w_{10})^*t)^*(v_{01}+v_{10}+w_{01}+w_{10})^*u_0\\
&= t^*((v_{01}+w_{01})(v_{01}+w_{01})^*u_0+(v_{10}+w_{10})(v_{10}+w_{10})^*u_0+u_0)\\
&= t^*((v_{01}+w_{01})v_{01}^*u_0+(v_{10}+w_{10})v_{10}^*u_0+u_0)
\end{aligned}$$

いま

$$w_{01,q} = \sum\{t \mid im(t) \subseteq dom(t_{01,q})\} \qquad : q = 1, \cdots, m$$

$$w_{10,q} = \sum\{t \mid im(t) \subseteq dom(t_{10,q})\} \qquad : q = 1, \cdots, l$$

と定義すると，

$$u_{ii}{}^{*}u_0 = t^{*}\Big[\sum_{q=1}^{m}(t_{01,q} + w_{01,q})t_{01,q}{}^{*}u_0 + \sum_{q=1}^{l}(t_{10,q} + w_{10,q})t_{10,q}{}^{*}u_0 + u_0\Big]$$

これに対して，つぎの方程式群をもって，(1)の才i式とおきかえる。

$$\begin{cases} f_i = tf_i + \sum_{q=1}^{m}(t_{01,q} + w_{01,q})f'_{i,q} + \sum_{q=1}^{l}(t_{10,q} + w_{10,q})f''_{i,q} + u_0 \\ f'_{i,q} = t_{01,q}f'_{i,q} + u_0 & : q = 1, \cdots, m \\ f''_{i,q} = t_{10,q}f''_{i,q} + u_0 & : q = 1, \cdots, l \end{cases}$$

置き換えてできた新たな方程式系と(1)の最小解は変っていない。又ここに現われるすべての小ループ t，$t_{01,q}$，$t_{10,q}$ はすべてα標準形をしている。

(II) 00−+項がTに属するとき。

その項を t とする。u_0, v_{01}, v_{10}, w_{10}, $t_{01,1}, \cdots, t_{01,m}$, $t_{10,1}, \cdots, t_{10,l}$ を(I)と同様に定義する。また

$$w_{01} = \sum\{t \in T \mid t\text{は}01=\text{項でない} \wedge t\text{は}01+\text{項である} \wedge (\exists q)[im(t) \subseteq dom(t_{01,q})]\}$$

$$w_{01}' = \sum\{t \in T \mid t\text{は}\ \text{〃}\ \wedge\ \text{〃}\ \wedge (\exists q)[im(t) \subseteq dom(t)]\}$$

このとき(I)と同様に

$$w_{01}'(v_{01} + v_{10} + w_{01} + w_{10} + w_{01}') = \mu$$

などが成立する．故に，

$$u_{ii}{}^* u_0 = (t + v_{01} + v_{10} + w_{01} + w_{10} + w_{01}')^* u_0$$

$$= ((t + v_{01} + v_{10} + w_{01} + w_{10})^* w_{01}')^* ((t + v_{01} + v_{10} + w_{01} + w_{10})^* u_0)$$

$$= \sum_{g=1}^{m} (t_{01,g} + w_{01,g}) t_{01,g}{}^* u_0 + \sum_{g=1}^{l} (t_{10,g} + w_{10,g}) t_{10,g}{}^* u_0$$

$$+ (w_{01}' + t) t^* \sum_{g=1}^{l} (t_{10,g} + w_{10,g}) t_{10,g}{}^* u_0 + u_0$$

このことから，もとの(1)の第i式の代りに，方程式群

$$\begin{cases} f_i = \sum_{g=1}^{m} (t_{01,g} + w_{01,g}) f'_{i,g} + \sum_{g=1}^{l} (t_{10,g} + w_{10,g}) f''_{i,g} + (w_{10}' + t) f_{i0} + u_0 & \\ f'_{i,g} = t_{01,g} f'_{i,g} + u_0 & ;\ g = 1, \cdots, m \\ f''_{i,g} = t_{10,g} f''_{i,g} + u_0 & ;\ g = 1, \cdots, l \\ f_{i0} = t f_{i0} + \sum_{g=1}^{l} (t_{10,g} + w_{10,g}) f''_{i,g} & \end{cases}$$

でおきかえる．ここに現われる小ループはそれぞれ1個の項から成り，α標準形をしている．このうち第1式は小ループをもたないから，この右辺を他の式の f_i に代入することによって f_i を消去する．この消去操作によって，他の式の小ループが変化を受けることはない．

(I)，(II)以外の場合，すなわち(III) 00十一項を含む場合と(IV) 00項を全く含まない場合は，上と同様にして変形できる． ☒

00項 $t = (a_1, 0, c_1)_1 (a_2, 0, c_2)_2$ はつぎの形のいずれかをしているとき，β標準形をしている，といわれる．

(a)　$a_1, a_2 > 0$, $c_1 = c_2 = 0$.　　即ち $t = p_1^{a_1} p_2^{a_2}$

(b)　$a_1 > 0$, $c_1 = a_2 = 0$　　即ち $t = p_1^{a_1} s_2^{c_2}$

(c)　$a_2 > 0$, $a_1 = c_2 = 0$　　即ち $t = p_2^{a_2} s_1^{c_1}$

補題10. 任意の 2-CM U について, $V = [v_{ij}]$ が存在して, $[i \neq 1 \to (\exists t)[v_{ii} = t \wedge t = \beta$標準形$]] \wedge [v_{11} =_M V$ $(\exists t)[v_{11} = t \wedge t = \beta$標準形$]] \wedge [\widetilde{U}_{(1)} = \widetilde{V}_{(1)}]$.

証明. Uは補題9の条件をみたすと仮定する. このとき, 各α標準形をなすループ $u_{ii} = (a_1, b_1, c_1)_1 (a_2, b_2, c_2)_2$ の形によって場合が分けられる. u_0を補題9の証明におけると同様に定義する.

(a.1)　$b_1 = b_2 = 0 \wedge a_1 > c_1 \wedge a_2 > c_2$ のとき.

$$u_{ii} * u_0 = \sum_{l=0}^{\infty} (p_1^{a_1} s_1^{c_1})^l (p_2^{a_2} s_2^{c_2})^l u_0$$
$$= u_0 + \sum p_1^{a_1} (s_1^{c_1} p_1^{a_1})^l s_1 \, p_2^{a_2} (s_2^{c_2} p_2^{a_2})^l s_2^{c_2} u_0$$
$$= u_0 + p_1^{a_1} p_2^{a_2} (p_1^{a_1 - c_1} p_2^{a_2 - c_2})^* s_1^{c_1} s_2^{c_2} u_0.$$

もとの方程式系(1)の第i式を

$$\begin{cases} f_i = p_1^{a_1} p_2^{a_2} f_i' + u_0 \\ f_i' = p_1^{a_1 - c_1} p_2^{a_2 - c_2} f_i' + u_{00} \end{cases}$$

でおき換えても, 方程式の最小解は変らない. ここで u_{00}は $\Sigma\{(a_1' - c_1, b_1', c_1')_1 (a_2' - c_2, b_2', c_2')_2 f_j \mid (a_1', b_1', c_1')_1 (a_2', b_2', c_2')_2 f_j \le u_0 \wedge c_1 \le a_1' \wedge c_2 \le a_2'\}$ に等しい. この際, 必要ならば項を分解する. f_iはループを含まないから f_iを消去する. こうしても

他の式のホループの値を変更することはない(他の場合については結果のみを示す).

(a, 2) $b_1 = b_1 = 0 \wedge a_1 > c_1 \wedge a_2 \leq c_2$ のとき,

$$\begin{cases} f_i = p_1{}^{a_1} p_2{}^{a_2} f_i' + u_0 \\ f_i' = p_1{}^{a_1 - c_1} s_2{}^{c_2 - a_2} f_i' + u_{00} \end{cases}$$

でおきかえる. u_{00} は (a, 1) に示したものと同じ.

(a, 3) $b_1 = b_2 = 0 \wedge a_1 \leq c_1 \wedge a_2 > c_2$ のとき,

(a, 2) と対称的に示せる.

(b) $b_1 = 0 \wedge b_2 = 1 \wedge a_1 > c_1 \wedge a_2 = c_2$ のとき,

$$\begin{cases} f_i = p_1{}^{a_1} p_2{}^{a_2} z_2 s_2{}^{a_2} f_i' + u_0 \\ f_i' = p_1{}^{a_1 - c_1} f_i' + u_{00} \end{cases}$$

でおきかえる. ここで u_{00} は

$$\sum \{ (a_1' - c_1, b_1', c_1')_1 (a_2', b_2', c_2')_2 f_j \mid (a_1', b_1', c_1')_1 (a_2', b_2', c_2')_2 f_j \leq u_0 \wedge c_1 \leq a_1' \}$$

に等しい.

(c) $b_1 = 1 \wedge b_2 = 0 \wedge a_1 = c_1 \wedge a_2 > c_2$ のとき.

(b) の場合と同様に示せる. $\boxtimes$

以上により, 遂に 2-CM の標準形が得られた.

2. 2-CM と 1-CM の計算可能性

つぎの定理によって, 2-CM の計算の特性づけを行う.

定理11．任意の2-CM U に対して，$N_1 \subseteq N$ が存在して，

$$\overline{\overline{N_1}} = \aleph_0 \wedge [(x \in N_1 \to (U)(x) = \text{undefined}) \vee (\exists f)(f\text{は1次関数} \wedge (x \in N_1 \to (U)(x) = f(x)))]$$

略証．Uを標準形とし，CMの各状態を遷移する計算において，小ループを回る回数だけが異るものを同一視する．☒

定理12．任意の1-CM Uに対して，$N_1 \subseteq N$が存在して，

$$[(x \in N_1 \to (U)(x) = \text{undefind}) \vee (\exists a)[x \in N_1 \to (U)(x) = x+a] \vee (\exists a)[x \in N_1 \to (U)(x) = x-a] \vee (\exists a)[x \in N_1 \to (U)(x) = a]].$$

以上の2つの定理によって，1-CM，2-CM，3-CMによって計算可能な関数の族が真に異ることが示された．

謝辞．東工大小林孝次郎助教授は定理1だけでなく，2-CMの標準形を求める方針を筆者に示され，それが本研究を推進する大きな力となったことをここに記して，感謝する．

文献

1．Fisher, P.C. et.al., Counter machines and counter languages, Math. System Theory, 2, pp265-283.

2．Kanayama, Y., Algebraic properties of programs, 日米コンピュータ会議．

3．Minsky, M.L., Computation, Prentice-Hall, 1967.

4．Shepherdson, J.C., et.al. Computability of Rec. func., J.ACM, 10, pp217-255, 1963.

5．小林孝次郎，私信．