数理解析研究所講究録
第 157 巻 1972 年 29-41

あるディリクレ級数について

近大　工学部　竹　内　文彦

§1

(§1では以降使用する原理並びに記号について説明する).

この小論に於て．我々は次の型の dirichlet serie を導入する

即ち $\displaystyle\prod_p f_n(p^{-s})$　　$\displaystyle\prod_p g_n(p^{-s})$

但し $f_n(t) = T_r\left[\begin{pmatrix} 1+t & t \\ t & t \end{pmatrix}^n\right]$　　$g_n(t) = f_n(-t)$

その意味．動機については§2以降説明する

(i) D を C 上 commutative-semi-simple algebra で

$D = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}/C$ とすれば．

D 内には．primitive idempotent $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$

が存在して．$\omega_i \cdot \omega_j = \delta_{ij}\omega_i$ を満足している．

又 $$\omega_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, x_j \quad (i=1,2,3,\dots,n)$$

φ を D から C への C上 linear map とする.

又 $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1,2,\dots,n}$ とおけば (A を仮に pr.id matrix という)

$$A\left(\varphi(x_i x_j)\right)A' = \left(\varphi(\omega_i \omega_j)\right) = \begin{pmatrix} \varphi(\omega_1) & & & 0 \\ & \varphi(\omega_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \varphi(\omega_n) \end{pmatrix}$$

となる.

(ii) C上の com. s.s. algebra F, G を (ii) に於て定義し

これを fix する.

N を任意の自然数とし

$$I = \{1, 2, 3, 5, 6, \cdots n\}$$

を N 以下の平方因子を含まない全体とする

又 $\#(I) = \nu$ とおく.

そのとき

$$\mathfrak{F} = \{x_i\}/C \quad i \in I \qquad x_i \cdot x_j = x_{(i,j)} \quad i,j \in I$$

と定義する（ (i,j) は i,j の最大公約数）

その時 $\mathfrak{F}$ の pr. idempotent $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ は

$$\omega_i = \sum^{d|i} \mu(d)\, x_{\frac{i}{d}} \qquad i \in I$$

$\mathfrak{F}$ の pr. id. matrix を A とし $A^{-1} = B$ とおけば

$$B = (b_{ij})_{i,j \in I} \quad \text{は} \quad b_{ij} = \begin{cases} 1 & j|i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\left(\because \sum^{d|i} \omega_d = x_i \right)$$

又 $\mathfrak{G} = \{x_i\}/C \quad i \in I \qquad x_i \cdot x_j = \begin{cases} x_{\{i,j\}} & \{i,j\} \leq N \\ 0 & \{i,j\} > N \end{cases}$

（ $\{i,j\}$ は i,j の最小公倍数）

と定義する

その時 $\mathfrak{G}$ の pr. idempotent $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ は

$$\omega_i = \sum^{i|d} \mu\left(\frac{d}{i}\right) x_d \qquad i, d \in I$$

G の pr. id. matrix を A_1, $A_1^{-1}=B_1$ とおけば

$$B_1 = (b_{ij}) \quad i,j\in I \quad \text{は} \quad b_{ij} = \begin{cases} 1 & i \mid j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

も容易に分る又.

$$B = B_1'$$

今

$$J = \begin{pmatrix} \mu(1) & & & & \\ & \mu(2) & & & O \\ & & \ddots & & \\ & & & \mu(i) & \\ O & & & & \ddots \\ & & & & & \mu(n) \end{pmatrix} \quad i\in I$$

とおけば

$$JBJ = B^{-1} = A \quad \text{従って} \quad JB_1J = A_1$$

も容易に分る.

(iii) この section に於ては2つの型の行列を問題にする.

まず p_i を i 番目の素数とする.

これから問題にする2つの型の行列を仮に α)型, β)型 という

α)型; $K = (k_{ij})$ $i,j\in I$ の type の行列

又 $L = \{1, 2, 3, 5, 6, \cdots\}$

をすべての平方因子を含まぬ数の集合とすれば

必要に応じて K を (k_{ij}) $i, j \in L$ $k_{ij} = \begin{cases} k_{ij} & (i,j) \in I \times I \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

で定義される無限行列と identify する。

β) 型 $K_1 = (k_{ij})$ $i, j \in L_1$ の type の行列

但し $L_1 = \{1, 2, 3, 6, 5, 10, 15 \cdots\} = \{1, p_1, p_2, p_1 p_2, \cdots\}$

つまり $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p_3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p_4 \end{pmatrix} \otimes \cdots\cdots$

において、対角成分に並んだ順序に並べたものが

L_1 である。(又順序を無視すれば) L の元と L_1 の元とは

一致する。

次に α) 型行列 K と β) 型行列 K_1

とがあたえられたとする

我々は K と K_1 とが互いに対応するというのを次のようにして定義する.

今 K を前ページの注意の如く無限行列とみなす.

K の行と列とを適当に入れ換えれば β) 型行列 になる.

それが K_1 と一致するとき K_1 と K とは互いに対応するといい.

$$\overset{(\alpha)}{K} \approx \overset{(\beta)}{K_1}$$

とかく.

又. $i \in L_1$ 即ち $i \in L$ とする. よって $i = P_{j_1} P_{j_2} \cdots P_{j_m}$ $(\mu(i) \neq 0)$

β) 型行列 $\beta(i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \cdots \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \cdots$

を下の如く定義する。すなわち

$\beta(i)$ は2次の行列の無限個の Kronecker-product で

$j_1, j_2, \cdots, j_m$ 番目の因子は $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ でその他の因子は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。

[例 $i = 3\cdot 5 = 15$ とする $\beta(i) = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$

$\otimes \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \otimes \cdots\cdots$ (4番目以後の因子はすべて $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$)]

此処で§1 (ii) の記号と(i).(ii)の原理とを使えば.

prop 1.

$$B_1 \overset{(\alpha)}{\begin{pmatrix} \varphi(\omega_1) & & & 0 \\ & \varphi(\omega_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \varphi(\omega_n) \end{pmatrix}} B_1' \approx \overset{(\beta)}{\sum_{i \in I} \varphi(\omega_i)\beta(i)}$$

が容易に分る。

§2

prop 2 $\quad f_n(t) = T_r\left[\begin{pmatrix}1+t & t\\ t & t\end{pmatrix}^n\right]$ とおく.その時

$$f_n(t) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{\substack{\eta:\ \eta^n+1=0\ \ \eta+\eta^{-1}\text{が異なる値をとる}\frac{n}{2}\text{個をうごく}}} \left(1+(2-\eta-\eta^{-1})t+4t^2\right) & n:\text{偶数} \\ \left(\displaystyle\prod_{\substack{\eta:\ \eta^n+1=0\ \ \eta+\eta^{-1}\text{が異なる値をとる}\frac{n-1}{2}\text{個をうごく} \\ \eta\neq -1}} \left(1+(2-\eta-\eta^{-1})t+4t^2\right)\right) \times (1+2t) & n:\text{奇数} \end{cases}$$

∵) $\begin{pmatrix}1+t & t\\ t & t\end{pmatrix}$ の eigen value を $\gamma(t), \delta(t)$ とする.

そのとき $f_n(t) = \gamma(t)^n + \delta(t)^n$ である.

今 t_0 を $f_n(t)$ の任意の根とする. $\gamma(t_0)^n+\delta(t_0)^n=0$

$$\therefore \left(\frac{\delta(t_0)}{\gamma(t_0)}\right)^n+1=0 \quad (1)$$

又 $\gamma(t_0)+\delta(t_0)=1+t_0+t_0=1+2t_0$

$$\gamma(t_0)\delta(t_0)=(1+t_0)t_0-t_0^2=t_0$$

$$\therefore \frac{(\gamma(t_0)+\delta(t_0))^2}{\gamma(t_0)\delta(t_0)}=\frac{\gamma(t_0)^2+2\gamma(t_0)\delta(t_0)+\delta(t_0)^2}{\gamma(t_0)\delta(t_0)}$$

$$=\frac{\gamma(t_0)}{\delta(t_0)}+\frac{\delta(t_0)}{\gamma(t_0)}+2=\frac{(1+2t_0)^2}{t_0}=\frac{1}{t_0}+4+4t_0 \quad (2)$$

(1) から $\left(\frac{\delta(t_0)}{\gamma(t_0)}\right)^n+1=0$ よって次の2つの case を考える.

(イ) $\left\{\frac{\delta(t_0)}{\gamma(t_0)}=-1\right\}$ のとき.

(2) より $0=\frac{1}{t_0}+4+4t_0$ $\quad t_0=-2$

(ロ) $\frac{\delta(t_0)}{\gamma(t_0)}=\eta\neq-1$ のとき

(2) より $4t_0+(2-\eta-\eta^{-1})t_0+1=0$

後は t_0 の任意性と $f_n(t)$ の次数を調べればよい Q.E.D.

$f_n(t)$ はすべて絶対値が $\frac{1}{2}$ の根をもっている.

又高々 $-\frac{1}{2}$ を除いて. あとはすべて虚根であることも.

prop 2 より明らかである

$$\left(f_1(t) = 1+2t \quad , \quad f_2(t) = 1+(2-i^{-1}-i)t+4t^2, \quad \cdots\cdots \right)$$
$$= 1+2t+4t^2$$

§3

この section に於ては §1(ii) の記号と §1 (i) (ii) (iii) の 結果を断りなしに使う.

次に

$$W = B_1' B_1 \qquad Z = B_1' J B_1 = (z_{ij})_{(i,j)\in I\times I} \quad z_{ij} = \begin{cases} 1 & (i,j)=1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

とおいて $\rho(W^{-1})$ $\rho(Z^{-1})$ を考察する ($\rho(U)$ は U の spectral-radius)

$$W^{-1} = B_1^{-1} B_1'^{-1} = J B_1 B_1' J \overset{\text{equivalent}}{\sim} B_1 B_1'$$

$$\overset{\text{equ.}}{\sim} B_1' B_1 = W$$

$$\therefore \rho(W^{-1}) = \rho(W) \cdots (1)$$

$$\rho(W)^2 < \mathrm{Tr}(W^2) \cdots\cdots (2)$$

(1) (2) より $\rho(W^{-1}) = O(N)$ が分る

次に $Z^{-1} = JB_1 JB_1' J \overset{equ}{\sim} B_1 J B_1'$

$$\therefore \rho(Z^{-1}) = \rho(B_1 J B_1')$$

又 prop1 より $B_1 \overset{(\alpha)}{J} B_1' \approx \sum_{i \in I} \mu(i) \overset{(\beta)}{\beta(i)}$

次にすぐ分る如く

$$\sum_{i=1}^{N} a_i M\left(\frac{N}{i}\right) = \sum_{i=1}^{N} b_i \quad \left(\text{但し} \sum_{l \mid i} b_l = a_i\right) \cdots (3)$$

(3) より $\displaystyle\sum_{(x,d)=1\ d \le N} M\left(\frac{N}{d}\right) = \sum_{d \mid x\ d \le N} \mu(d) \quad \cdots (4)$

(4) に於て x に I を全て動かせば

$$Z\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_i \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad i \in I \qquad \cdots (5)$$

($i = p_{j_1} p_{j_2} \cdots p_{j_\ell}$ としたとき $M_i = \sum_{\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \cdots, \alpha_\ell > 0} M\left(\frac{N}{p_{j_1}^{\alpha_1} p_{j_2}^{\alpha_2} \cdots p_{j_\ell}^{\alpha_\ell}}\right)$

と定義する)

(5) から Z^{-1} の第1列目が分るが、それと10ページに於る

Z^{-1} の形と §1 (iii) を使えば Z^{-1} の全成分が分る.

即ち $JZ^{-1}J = (S_{ij})$ $i, j \in I$ $S_{ij} = \begin{cases} M_{\{i,j\}} \times \mu(\{i,j\}) & \{i,j\} \le N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $\cdots (6)$

(6) と $\mathrm{Tr}((Z^{-1})^2) > (\rho(Z^{-1}))^2$ $(\rho(Z^{-1}))^2 > Z^{-2}$ の(1.1)成分

$\mathrm{Tr}((Z^{-1})^2) = \mathrm{Tr}((JZ^{-1}J)^2)$

より $\rho(Z^{-1})$ の評価と $M(N)$ の評価とは同値である.

§4

さて $\overset{(\alpha)}{K} \approx \overset{(\beta)}{K_1}$ であれば

$$\mathrm{Tr}(K^{\ell}) = \mathrm{Tr}(K_1^{\ell}) \qquad \ell = 1, 2, 3, \cdots \qquad (1)$$

である.

又 $\gamma_1 = 1 \quad \gamma_m \cdot \gamma_n = \gamma_{mn} \ (m, n) = 1 \quad m, n \in L_1$ であれば

$\sum_{i \in L_1} \gamma_i \beta(i)$ は形式的に

$$\begin{pmatrix} 1+\gamma_{p_1} & \gamma_{p_1} \\ \gamma_{p_1} & \gamma_{p_1} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1+\gamma_{p_2} & \gamma_{p_2} \\ \gamma_{p_2} & \gamma_{p_2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1+\gamma_{p_3} & \gamma_{p_3} \\ \gamma_{p_3} & \gamma_{p_3} \end{pmatrix} \otimes \cdots\cdots$$

$$= \bigotimes_{i=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 1+\gamma_{p_i} & \gamma_{p_i} \\ \gamma_{p_i} & \gamma_{p_i} \end{pmatrix} \quad \text{とかける} \qquad (2)$$

又 1 般に Dirichlet-series $\psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{n^s}$ において

仮に $\psi^{(m)} = \sum_{n=1}^{m} d_n$ と定義する.

以下アイデアを簡単に述べれば

$\rho(Z^{-1})$ を評価したい訳であるがその為には.

$\mathrm{Tr}[(Z^{-1})^{\ell}]$ を評価すればよい.

然るに10ページより

$$J\overset{(\alpha)}{Z^{-1}}J \approx \sum_{i\in I}\overset{(\beta)}{\mu(i)}\beta(i)$$

よって(1)より $Tr\left[\left(\sum_{i\in I}\mu(i)\beta(i)\right)^{l}\right]$ を評価すれば …(3)

より.

そこで(3)式を $\psi_l^{(n)}$ で代用しようという訳である. 但し

$$\psi_l(s) = Tr\left[\bigotimes_{i=1}^{\infty}\begin{pmatrix}1-\frac{1}{p_i^s} & -\frac{1}{p_i^s}\\ -\frac{1}{p_i^s} & -\frac{1}{p_i^s}\end{pmatrix}\right]^{l}$$

$$= \prod_{i=1}^{\infty} Tr\left[\begin{pmatrix}1-\frac{1}{p_i^s} & -\frac{1}{p_i^s}\\ -\frac{1}{p_i^s} & -\frac{1}{p_i^s}\end{pmatrix}\right]^{l} = \prod_{p_i} g_l(p_i^{-s})$$

但しnは§1(iii)で定義したn.(2ページの下から3行目)

$\psi_l(s)$ 等については全然調べてない [$f_l(\frac{t}{2}) = h_l(t)$, $h_l(-t) = k_l(t)$ とおいて $k_l(t)$, $h_l(t)$ についても dirichlet series が def される]

– 後は別の機会に述べることにすることにしてこの小論を終りたいと思います

参考文献

M. Hall. Jr Combinatorial theory