数理解析研究所講究録
第157巻 1972年 42-51

van der Corput の lemma の応用について

信州大 理　　鹿野 健

§1.

解析数論や級数論においては，次のような指数和（exponential sum）の大きさを評価する必要がある問題が多い。

$$(1)\qquad \sum_{1 \le k \le n} \lambda(k)\, e^{2\pi i f(k)}$$

例えば，解析数論では，ゼータ函数の零点の評価，加法数論における解の個数の評価，数列の一様分布性の判定，等々，その大部分の問題が(1)の様な指数和の評価に帰着されると言っても過言ではない。他方，級数論では総和法やフーリエ級数論において，主として反例を作るために(1)のような和が考察されることがある。van der Corput は，最初ゼータ函数の評価問題のために，表題で言うような lemma を用意したのだが，実はその lemma は幾つも種類があって

問題毎に形を変えたものを使うのが普通である。その最も一般的なものを使って解析数論，とりわけゼータ函数の問題に応用してみた結果は，例えば[6]に詳しい。それに反して，級数論の方面では，例えば[5]や[7]に少し書かれてはいるものの，この van der Corput の lemma はそう多く用いられていないように思われる。実は，級数論ではそう一般的な，あるいは強力な形のでなくとも大体は間に合うのであって，Salem が[5]で示した形での van der Corput lemma を使う。それは次のようなものである。

Lemma (van der Corput − Salem)

$r(t) \geq 0$ が $a \leq t \leq b$ での減少函数で，$f'(t)$ がそこで単調でかつ

$$|f'(t)| \leq 1-\theta \qquad (a \leq t \leq b)$$

となるような $\theta > 0$ が存在するならば，

$$\sum_{a \leq n \leq b} r(n) \cdot e^{2\pi i f(n)} = \int_a^b r(t) \cdot e^{2\pi i f(t)} dt + O(1) \tag{2}$$

である。ここに右辺の $O(1)$ は，a, b, r, f を含まない評価であって，

$$\sup_{a \leq t \leq b} r(t) = c$$

とすると，

θ と C のみに関係する評価である。

§2. まずここでは一様分布論への応用を述べる。

van der Corput [2] は次の定理を得た。

[定理 1] もし何らかの自然数 k について，x_n の第 k 次差分 $\Delta^k x_n$ が $n \to \infty$ のとき 0 に収束し，かつ

(3) $$\lim_{n\to\infty} n \left| \Delta^k x_n \right| = \infty ,$$

であるならば，実数列 $\{x_n\}$ は一様分布列 (uniformly distributed (mod 1) sequence) である。

(一様分布論については，例えば [1], [3], [4] を参照。)

ただし，$\Delta^k x_n$ は単調列とする。

この定理の証明には実は van der Corput の lemma は使われていないのだが，[6] に示されているような形の v.d.C. lemma を使えば，条件(3)は

(4) $$\lim_{n\to\infty} n^k \left| \Delta^k x_n \right| = \infty .$$

で置き換えられるように思う。 しかし，私が示せるのは

(5) $$\lim_{n\to\infty} n^4 \left| \Delta^k x_n \right| = \infty ,$$

で置き換えられることだけで，これが v.d.C. lemma の限界のように感じられる。

しかし(4)は真実であって，complex method と帰納法とによって証明できると思われるがまだ成功していない。また，次の予想を持っているが，真偽の程は定かでない。

『実数の無限列 $\{x_n\}$ が一様分布するためには，任意の自然数 k に対して

$$\limsup_{n\to\infty} n^k|\Delta^k x_n| = \infty,$$

となることが必要である。』

§3. van der Corput－Salem の Lemma を使っての級数論への応用を試みる。

Hardy は [3] で Borel 総和法に関する反例として次の様な級数を考えた。

(6) $$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} e^{Ain^{\alpha}}.$$

この級数は，$0<\alpha<1$ のとき，任意の $\delta>0$ に対して (C,δ) 総和可能であるが，すべての $A\neq 0$ に対して収束しない。Hardy はこれらの事実を，Borel 総和法に関するタウバー型定理と函数論的方法によって証明したが，そこでも分るように，$\alpha=\frac{1}{2}$ がデリケートな境目である。$(C,1)$ 総和法から Borel 総和可能性を導くタウバー型定理として，[3] には次の定理があげられている（Theorem 149）。

［定理 2］　級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ の部分和を A_n とする。もし

$$\sigma_n = \frac{A_0 + A_1 + \cdots + A_n}{n+1} = A + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

ならば，この級数は A に Borel 総和可能である。

そして，Hardy は例によって，この定理が best である事，即ち定理において，我々は o を O では置き換えられないことを示した。しかし，Hardy の例では A_n が非有界でしかも $a_n \not\to 0$ である。彼は気付かなかった様であるが，実は(6)の級数で $\alpha = \frac{1}{2}$ の場合のものが，上のような欠点を補う反例となることを以下に示そう。それは次の定理の系であって，これを証明するために v.d.C.－S. lemma が必要なのである。

［定理 3］　すべての $x > 0$ に対して，2つの級数

(7) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\sqrt{n}x)}{\sqrt{n}}$$

(8) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{n}x)}{\sqrt{n}}$$

は収束しないが，任意の $\delta > 0$ に対して (C, δ) 総和可能であり，また(7)，(8)の部分和は有界である。

《証明》詳細にではなく，スケッチ的に述べる。

まず我々は次の Kronecker による lemma から出発する。

(Lemma 1) 実数項の級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するための必要十分条件は，任意の数列 $\lambda_n \uparrow \infty$ に対して，

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k a_k = o(\lambda_n), \quad (n \to \infty)$$

となることである。

従って，例えば(7)が，ある $x > 0$ について収束したと仮定すると，上の Lemma 1 から，$\lambda_n = \sqrt{n}$ に対して，

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(\sqrt{k}\,x) = o(\sqrt{n}), \tag{9}$$

とならなければならない。所が一方では，v. d. C.–S. lemma から，$n \to \infty$ のとき，

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(\sqrt{k}\,x) = \frac{2}{x}\sqrt{n}\sin(\sqrt{n}\,x) + O(1), \tag{10}$$

であることが容易に分るから，(9)と(10)が矛盾する事となって(7)がすべての $x > 0$ に対して収束しないことが示される。

(7)と(8)の部分和が共に有界であることは，また v. d. C.–S. lemma によって，例えば(7)については，$n \to \infty$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(\sqrt{k}\,x)}{\sqrt{k}} = \frac{2}{x}\left\{\sin(\sqrt{n}\,x) - \sin x\right\} + O(1), \tag{11}$$

であることが分るから明かである。

次に(7)が$(C,1)$総和可能であることは，v. d. C.-S. lemmaを用いて直接的にも示せるが，ここではもっと横着して，次のlemmaによることにする。

(Lemma 2)　([3]　Theorem 71 の $k=1$ の場合。)

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が $(C,1)$有界で，λ_n が 0 に収束する仮似凸列(quasi-convex sequence)ならば，級数

$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n a_n$ は$(C,1)$総和可能である。

このlemmaと(10)から，$\lambda_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ ととれば(7)が$(C,1)$総和可能であることが分る。なぜならば，(10)とAbel変換により，(7)が$(C,1)$有界であることが示せるからである。以上まとめると，(7)は$(C,1)$総和可能であって，部分和は有界であるから，[3]のTheorem 70とTheorem 43によって，$\forall \delta > 0$ に対して(C,δ)総和可能であることが示される。(8)についても全く同様である。

(系)　定理2において，たとえ $A_n = O(1)$ かつ $a_n \to 0$ であっても，o を O に置き換えることはできない。

《証明》　定理3と，[3]のTheorem 156から明か。

我々は定理3を更に先に進めることができる。それは，

[定理 4]　例えば(8)について，

$$\overline{s}(x)=\limsup_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(\sqrt{k}x)}{\sqrt{k}},\quad \underline{s}(x)=\liminf_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(\sqrt{k}x)}{\sqrt{k}}$$

とすると，$x\to 0^+$ のとき，

$$\overline{s}(x)=x\log\frac{1}{x}+\frac{4}{x}+O(x),$$

$$\underline{s}(x)=x\log\frac{1}{x}+O(x),$$

であり，(8)の（C，1）平均は $\frac{1}{2}(\overline{s}(x)+\underline{s}(x))$ に収束する。ただし $x\neq 0$ 。

(7)についても同様の結果が得られる。

この定理の証明は長くなるのでここには述べないが，それには v.d.C.—S. lemma をもちろん使う。そしてその方法によって実は次の結果を証明することができる。

[定理 5]　級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{ixn^{\alpha}}}{n^{\beta}}$$

$$(x>0,\ 0<\alpha<1,\ 0<\beta<1)$$

は $\alpha+\beta>1$ のときすべての x に対して収束し，$\alpha+\beta\leq 1$ のときはすべての x に対して発散する。部分和が有界となるのは $\alpha+\beta=1$ のときであり，そのときに限る。

この定理は，Hardy が [3] で本質的に述べているが，彼の方法は函数論によるものである。
また，定理4の $\overline{\Delta}(x)$ と $\underline{\Delta}(x)$ の $x \to \infty$ での大きさについては，v.d.C.−Salem lemma の別タイプのものから，

$$\overline{\Delta}(x) = O(x), \quad \underline{\Delta}(x) = O(x),$$

であることが分る。一方，下からの評価としては，ゼータ函数の評価と同様な方法で，例えば

$$\underline{\Delta}(x) = \Omega(\log x), \quad \overline{\Delta}(x) = \Omega(\log x),$$

であることは容易に分るが，これらの真の大きさは不明である。多分，上からの評価の方が真実に近いものであろうと思われる。

（文　献）

[1] Cigler — Helmberg : Neuere Entwicklung der Theorie der Gleichverteilung, Jahresbericht d. DMV, 64 (1961) 1～50.

[2] Corput, J. G. van der : Diophantische Ungleichungen I , Acta Math., 56 (1931) 373~456

[3] Hardy, G. H. : Divergent Series , Oxford, (1949)

[4] Koksma – Kuipers (editors) ; Asymptotic Distribution Modulo 1, Compositio Math., 16 (1964), 1~203.

[5] Salem, R ; Essais sur les séries trigonométriques, Hermann (1940)

[6] Titchmarsh, E. C. : The theory of the Riemann Zeta-function, Oxford (1951).

[7] Zygmund, A : Trigonometric Series, vol. I, Cambridge (1959).