

## 二次元 Bolus 流

東大 宇宙研 神 部 勉  
東大 理 福 湯 章 夫

### § 1. 序

近年, 血管中の血液の流れは, 流体力学の問題としていろいろな角度から研究されている。特に毛細血管内では, Reynolds 数が小さく ( $R \sim 10^{-2}$ ) かつ流れはほぼ定常的と見なせるので, 理論的に扱いやすい。ここでは毛細血管内の流れの一つのモデルとして, 定常での Stokes 近似を用いた二次元の Bolus 流を考察する。実際赤血球の大きさは毛細血管の太さとほぼ等しいので, Bolus 流と見なして良い<sup>(1)</sup>。この問題は最近 Bugliarello<sup>(2)</sup> らによって数値的に解かれているが, ここでは Dean<sup>(3)</sup> の方法に依る近似解及び数値解を求め, 更に得られた低次の近似解を使って数値解の改良を試みる。

### § 2. 第 1 近似

図 1 に示したような二次元での Stokes 流を考える。流れ

の関数  $\psi$  は次の biharmonic 方程式を満足する。

$$\Delta^2 \psi = 0 \quad (2.1)$$

境界条件は,

$AC$  上 ( $x=0$ ) で

$$\psi = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (2.3)$$

$AB, CD$  上 ( $y = \pm 1, x \geq 0$ ) で

$$\psi = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 1 \quad (2.5)$$

又流れの対称性から,  $P, Q$  を  $x$  軸に関して対称点とする時

$$\psi(P) = -\psi(Q) \quad (2.6)$$

厳密解を求めるのは困難であるので, 2次元の biharmonic 関数で境界条件(2.2), (2.4)及び対称性(2.6)を満たす (i.e. 境界が正確に流線になっている) ものを求める。これらの関数は一般に境界に於ける non-slip の条件(2.3), (2.5)は満たさないから, 適当に重ね合わせることによって(2.3), (2.5)を近似的に満たすようにする。境界に於ける速度の slip の大きさが求めた近似解の精度を表わすことになる。

2次元の biharmonic 関数は一般に

$$\psi(x, y) = f_1(x, y) + x f_2(x, y) + y f_3(x, y) \quad (2.7)$$

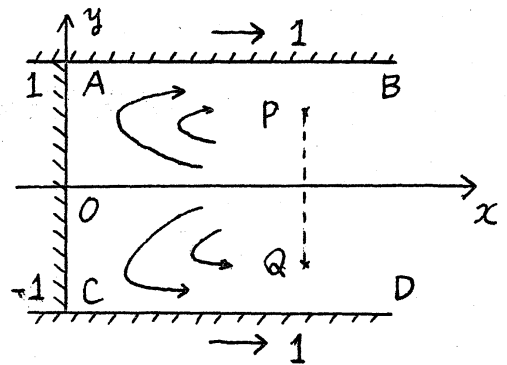


図 1

$$\text{但し } \Delta f_i(x, y) = 0 \quad i=1, 2, 3$$

の形に書き表わすことができる。そこで流れの領域  $BACD$  を上半平面 (図 2) に写像し、流れの関数  $\psi$  が (2.2), (2.4) 及び (2.6) を満たすように写像平面 (3) で調和関数  $f_i$  を見つけることを考える。写像関数は

$$\zeta = i \sinh\left(\frac{\pi}{2} z\right) \quad (2.8)$$

$$z = \frac{2}{\pi} \ln(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) - i \quad (2.8')$$

$$\text{但し } z = x + iy$$

この写像で境界  $BACD$  は  $\zeta$  面の実軸に写る。

流れは無限遠方では Poiseuille 流れ、角の点  $A, C$  では直角をまわる Taylor の解<sup>(4)</sup> に近づくと考えられる。

すなわち

$$x \rightarrow \infty \text{ で } \psi(x, y) \rightarrow \frac{1}{2}(y^2 - y)$$

$$z \rightarrow -i \text{ で}$$

$$\psi(x, y) \rightarrow \frac{1}{4\pi^2 - 1} \left\{ \frac{\pi^2}{4}(y+1) - \frac{\pi}{2}(y+1) \operatorname{Im} \ln(\zeta + i) - x \operatorname{Im} \ln(\zeta + i) \right\}$$

まづ (2.2), (2.4), (2.6) を満たし遠方で Poiseuille 流れに近づくものとして次の  $\psi_p$  を採用する

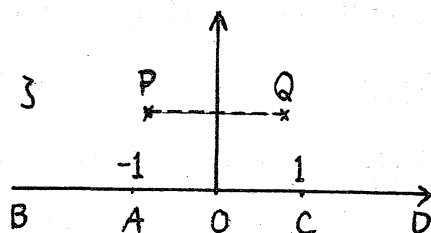


図 2

$$\psi_p = (1-\gamma)U_+ + (1+\gamma)U_- \quad (2.9)$$

$$U_{\pm} = \text{Im} \left\{ \frac{8}{\pi^3} L_{\pm}^3 + \alpha L_{\pm}^2 + \beta L_{\pm} \right\}$$

$$L_+ = \ln(1+\sqrt{3}+1)$$

$$L_- = \ln(1-i\sqrt{3}-1)$$

但し  $\alpha, \beta$  は実定数

角で Taylor の解に近づくものとしては

$$\psi_T = \frac{2}{\pi^2 - 4} \left[ x \left\{ \pi\gamma - \text{Im} \ln(1-\zeta^2) \right\} - \frac{\pi}{2} \left\{ (1-\gamma) \text{Im} \ln(1+\zeta) + (1+\gamma) \text{Im} \ln(1-\zeta) \right\} \right] \quad (2.10)$$

を採用する。但し  $\sqrt{3 \pm 1}$  の位相は  $0$  と  $\frac{\pi}{2}$  の間、対数関数の位相は  $-\pi$  と  $\pi$  の間にあるとする。  $\psi_p, \psi_T$  が所定の漸近的性質を持つことは容易に示すことができる。又  $\psi_p$  は角及び  $0$  点で  $\psi_T$  は無限遠方及び  $0$  点で速度に対する奇点はない。  $\psi_p, \psi_T$  は明らかに (2.7) の形をしていいるから biharmonic 関数である。

$$\psi_{pT} = \psi_p + \psi_T \quad (2.11)$$

とすると、  $\psi_{pT}$  は (2.1), (2.2), (2.4) 及び (2.6) を満たしかつ

$$x \rightarrow \infty \text{ で } \psi_{pT} \rightarrow \frac{1}{2}\gamma(\gamma^2 - 1)$$

$$z \rightarrow \pm i \text{ で } \psi_{pT} \rightarrow \text{Taylor の解}$$

$\psi_{pT}$  を 1 次の近似として採用すると、境界  $AC, AB$  上でそれぞれ最大  $0.059, 0.18$  の速度 slip を持つ。遠方での Poiseuille 流への近づき方は指数関数的である。

§3  $\psi_{pr}$  の補正

第1近似解の持つ速度の *slip* を補正するの12次の関数を使うことにする。

$$\psi' = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \psi_n + b_n \phi_n) \quad (3.1)$$

$$\psi_n = (1-y) \operatorname{Im} \left( \frac{1-\sqrt{3}+1}{1+\sqrt{3}+1} \right)^n + (1+y) \operatorname{Im} \left( \frac{1+i\sqrt{3}-1}{1-i\sqrt{3}-1} \right)^n$$

$$\phi_n = x \operatorname{Im} e^{-n\pi z}$$

$\psi_n, \phi_n$  も *non-slip* の条件以外はすべて満足し、かつ角、無限遠点及び0点で速度に対する寄与はない。 $a_n, b_n$  は実定数で

$$\psi = \psi_{pr} + \psi'$$

とし、 $\psi$  による境界上の速度の *slip* が最小になるように決める。そのために境界  $0 < D \pm z$  (real positive) を

$$z = \frac{1+u}{1-u}, \quad |u| \leq 1$$

で変換する。 $u = -1, 0, 1$  がそれぞれ  $0, C, D$  に対応する(図2)。次に境界上の速度 *slip* を  $\sqrt{u}, \sqrt{u+1}$  で展開し

$$\psi_y - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (\sqrt{u})^n$$

$$\psi_x = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n (\sqrt{u})^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n (\sqrt{u+1})^n$$

$n \leq N$  で  $\alpha_n = \beta_n = \gamma_n = 0$  とするようにならぬように  $a_1, b_1, \dots$  を決めれば良い。(2.9), (2.10), (3.1) の関数を採用すると  $\alpha_1 = \beta_1$ 、及び対称性から  $r_{2n-1} \propto r_{2n}$  であることが知られる。今回は次の2つの場合を計算した。

$$(I) \quad \Psi^I \quad \begin{cases} N=3 \\ \alpha = \beta = 0 \quad (2.9) \end{cases} \Rightarrow a_1 \sim a_3, b_1 \sim b_3 \text{ が} \\ \text{決まる.}$$

$$(II) \quad \Psi^{II} \quad \begin{cases} N=3 \\ a_n = \alpha A_n + \beta B_n + C_n \\ b_n = \alpha D_n + \beta E_n + F_n \end{cases}$$

$C_n, F_n$  は (I) の  $a_n, b_n$  と同じ。  $A_n \sim E_n$  は (2.9) の対応する項を展開して決める。  $\alpha, \beta$  は

$$I(\alpha, \beta) = \int_{-1}^0 |\Psi_x|^2 dy + \int_0^{\infty} |\Psi_y - 1|^2 dx \\ = \min$$

の条件から決める。その結果は

$$\alpha = -0.2104, \beta = 1.295$$

表 1 は  $\Psi_{PT}, \Psi^I, \Psi^{II}$  の境界上の速度の slip の大きさを示したものである。アンダーラインは最大の slip を示す。

表 1 境界上の速度の slip

$\frac{x=0}{y}$	$(\Psi_{PT})_x$	$(\Psi^I)_x$	$(\Psi^{II})_x$	$\frac{y=-1}{x}$	$(\Psi_{PT})_y$	$(\Psi^I)_y$	$(\Psi^{II})_y$
-0.1	0.0166	$-7.16 \times 10^{-6}$	$-8.16 \times 10^{-6}$	0.2	1.0205	0.9992	0.9993
-0.3	0.0448	$-1.07 \times 10^{-3}$	$-2.45 \times 10^{-3}$	0.4	1.0292	0.9987	0.9963
-0.5	<u>0.0590</u>	-4.92 "	-5.92 "	0.6	1.0442	1.0119	0.9940
-0.6	0.0574	<u>-5.54 "</u>	<u>-6.88 "</u>	0.8	1.0681	1.0442	0.9935
-0.7	0.0503	-4.12 "	-5.39 "	1.0	1.0962	1.0863	0.9932
-0.9	0.0194	$-2.67 \times 10^{-4}$	$-4.43 \times 10^{-4}$	2.0	<u>1.1810</u>	<u>1.1962</u>	0.9957
				3.0	1.1463	1.1482	<u>1.0110</u>
				4.0	1.0783	1.0757	1.0067

流れの関数  $\psi$  が知れると流れに附随した量はすべて計算できる。例えば 2次元の Stokes 流では圧力と渦度は互に conjugate 量であるから

$$F(z) = \frac{p}{\mu} - i\omega$$

とすると、 $F(z)$  は解析関数で次式で与えられる。

$$\begin{aligned} F(z) = & \left( \frac{12}{\pi^2} L_+^2 + \alpha \pi L_+ + \frac{\pi}{2} \beta \right) \left( \frac{\lambda}{\sqrt{3+1+\sqrt{3+1}}} \right) \\ & - \left( \frac{12}{\pi^2} L_-^2 + \alpha \pi L_- + \frac{\pi}{2} \beta \right) \left( \frac{\lambda}{\sqrt{3-1+i\sqrt{3-1}}} \right) \\ & + \frac{2\pi}{\pi^2-4} \cdot \frac{\lambda(\pi-2i\beta)}{\sqrt{3-1}} - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n a_n \lambda \left\{ \frac{(1-\sqrt{3+1})^{n-1}}{\sqrt{3+1}(1+\sqrt{3+1})^{n+1}} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{i(1+i\sqrt{3-1})^{n-1}}{\sqrt{3-1}(1-i\sqrt{3-1})^{n+1}} \right\} + 2n b_n e^{-n\pi z} \right] \quad (3.2) \end{aligned}$$

但し  $\lambda = \cosh\left(\frac{\pi}{2}z\right)$

(3.2) を使うと  $F(z)$  の漸近的振舞いは

$$z \rightarrow \infty \text{ で } F(z) \sim 3z$$

$$z \rightarrow -i \text{ で } F(z) \sim \frac{\pi}{\pi^2-4} \frac{\pi-2i}{r} e^{-i\theta}$$

$$\text{但し } z+i = r e^{i\theta}$$

これから圧力、渦度共に角で  $1/r$  で発散することが知れる。  
 $\psi$  から計算した流線図、等圧、等渦度図は図9に示した。

#### §4. 数値解法 - 差分

次に同じ問題を数値的に解くことを考えよう。基礎方程式は(2.1)の代りに

$$\Delta\psi = -\omega, \quad \Delta\omega = 0 \quad (4.1)$$

を使う。x方向の1 stepを $h_x$ として微分 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ を差分

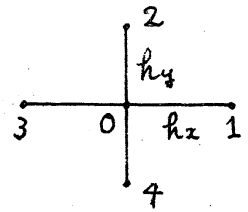
$$f_{xx} = \{f(x+h_x, \cdot) - 2f(x, \cdot) + f(x-h_x, \cdot)\} / h_x^2$$

でおきかえ,  $(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)f = f_{xx} + f_{yy}$  とする。この時(4.1)

は差分方程式

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &= S(\omega_1 + \omega_3) + C(\omega_2 + \omega_4) \\ \psi_0 &= S(\psi_1 + \psi_3) + C(\psi_2 + \psi_4) + D\omega_0 \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

$$\text{但し} \begin{cases} h_0^2 = 2(h_x^2 + h_y^2) \\ S = h_y^2 / h_0^2 \\ C = h_x^2 / h_0^2 \\ D = (h_x h_y)^2 / h_0^2 \end{cases}$$



となる。この式は内部の点での値を求めするのに使う。(4.2)は元の方程式に対して $O(h_x^2)$ ,  $O(h_y^2)$ の誤差を持っている。

(4.1), (4.2)は $\psi$ と $\omega$ で表わされているから、境界条件もその二つの変数で表わす必要がある。 $y=0$ の条件は

$$\psi = 0, \omega = 0$$

であるから問題はないが、壁の上の条件は

$$\psi = 0, \partial\psi/\partial n = v$$

であって(但し $v$ は壁の速度), 後者を書き直さなければならない。セ及び $v$ をそれぞれ壁からの接線及び法線方向にとり,  $v$ はセ方向を正にとる(図3)

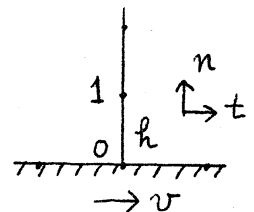


図3



)。  $\psi$  を点  $0$  の近くで  $n$  方向に Taylor 展開すると, 点  $1$  における値は

$$\begin{aligned} \psi(1) = \psi(0) + h\psi_n(0) + \frac{h^2}{2}\psi_{nn}(0) \\ + \frac{h^3}{6}\psi_{nnn}(0) + O(h^4) \end{aligned} \quad (4.3)$$

である。  $h$  は mesh の 1 step である。 ここで  $\psi_n(0) = v_0$ ,  $\psi_{nn}(0) = -\omega_0$  を代入して  $O(h^3)$  の項を無視すると ( $\psi(i) \equiv \psi_i$ )

$$\omega_0 = \frac{2}{h^2}(\psi_0 - \psi_1 + v_0 h) + O(h) \quad (4.4)$$

を得る。あるいは

$$\psi_{nnn}(0) = -\frac{\omega_1 - \omega_0}{h} + v_{tt}$$

とおいて (最後の項は  $v$  が変化する時に現われる項で  $h^6$  が必要となる)  $O(h^4)$  を無視すると

$$\omega_0 = \frac{3}{h^2}(\psi_0 - \psi_1 + v_0 h) - \frac{1}{2}(\omega_1 + v_{tt} h) + O(h^2) \quad (4.5)$$

を得る。したがって  $\omega_0$  は内部の値  $\psi_1$ , あるいは  $\psi_1$  と  $\omega_1$  が与えられれば値が決められる。

$x = \infty$  の条件は有限での条件でおきかえなければならない。流れは  $x \rightarrow \infty$  で指数関数的に Poiseuille 流に近づくことが示されるので,  $x = \text{finite} (= x_0)$  で Poiseuille 流としても十分な精度が良いと思われる。Poiseuille 流といたっては差分式を使っているから, 差分式の  $x$  に依存しない解を境界条件に使った方が数値的に滑らかな結果が得られる。  $1$  を  $N$  等分した mesh での Poiseuille の解は

$$\psi_{p,i} = \frac{(i-1)(N+1-i)(2N+1-i)}{N(2N^2+1)}$$

$$\omega_{p,i} = \frac{6N(N+1-i)}{2N^2+1}$$

である。<sup>(5)</sup> ここで  $i=1$  は  $y=-1$ ,  $i=N+1$  は  $y=0$  に対応している。分母の  $(2N^2+1)$  という因子を  $2N^2$  でおきかえれば微分方程式の Poiseuille の解に一致する。従って両者の差は  $O(N^{-3})$  である。

### § 5. 数値解.

かなり大雑把な  $R=0$  の近似が与えられたとすると、前節の差分式 (4.2) から内部での  $\psi$ ,  $\omega$  の新しい値が計算され、更に境界条件 (4.4) 又は (4.5) から壁の上の新しい  $\omega$  の値が得られ、これを繰返す。 $n$  回目の関数  $\psi$  の値を  $f_n$  とし、 $|(f_n - f_{n-1}) / f_n| < \epsilon$  がすべての点で成り立つとき収束したとする。このようにして得た解を  $\psi_n$  で表わす。対称性から計算は下半分の領域だけで行えば良い。図 9 に流線、等圧線、等渦度線が示してあるが、この程度の精度の図では解析解と数値解はほとんど変わらない。壁の動きが逆に「 $\uparrow$ 」っても流線の形は変わらず、流れの向きが反対になるだけである。これは基礎方程式が線型であることからたゞちにわかる。実際の数値計算では  $R \neq 0$  の場合も行ったが、 $R \leq 10$  のときには流線の様子は  $R=0$  のときとあまり変わらないが、等渦度線が流れの方向に流された

形になっている。図4は速度の $x$ 成分 $u$ の分布で、 $x = \text{const}$ として $y$ に対してかかれている。又図5は速度の $y$ 成分 $v$ が $y = \text{const}$ として $x$ に対する分布が示されている。図4をみると $x \sim 0.3$ ,  $y = 0$ の近くで $u$ の分布が平らになっているが、図5からもわかるように $v$ が変化しているので、全速度は一定ではない。図6は $y = 0$ 上の圧力分布で、 $x$ が大きくなると直線に近づきPoiseuille流になることを示している。又 $x \neq 0.3$ に最小値をもち、よびみ点 $x = 0$ に向って上昇している。得られた数値解は特異点( $x = 0, y = -1$ )の近くを除けば前述の解析解とよく合っているので、これらの図では両者の違いは区別できない。何度かの計算で与えた $\varepsilon$ の最小値は $5 \times 10^{-4}$ である。この時得られた数値は3桁の精度を持つとしてよいであろう。 $\varepsilon$ は多くの計算では3.0をとりながら、2.5でもPoiseuille流とは4桁目に $\pm 1$ の誤差がある程度である。壁の境界条件

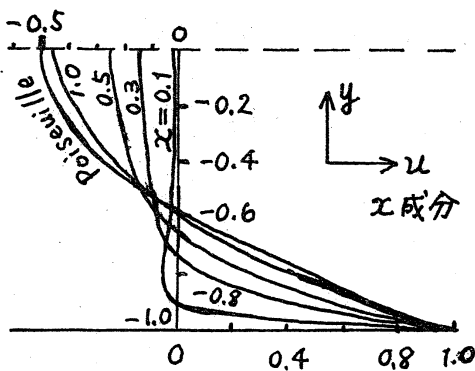


図4

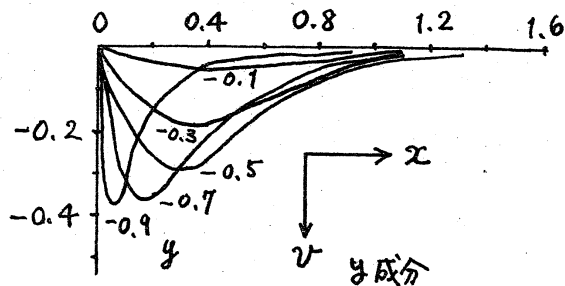


図5

として(4.4)をとり、収束に  
必要な繰返しの数は(4.5)に対  
するものゝ約4/5ですむが、  
後者を使うと特異点の近くで  
の振舞がかなり改善される。  
又特異点の近くの様子は  $h_x =$   
 $h_y (=h)$  とした方が良く、 $N =$   
 $1/h$  は最高50をこえた。

relaxation constant は1.8

あるいは1.5を使用したか、

条件(4.5)を使うと1.8では収束しない。

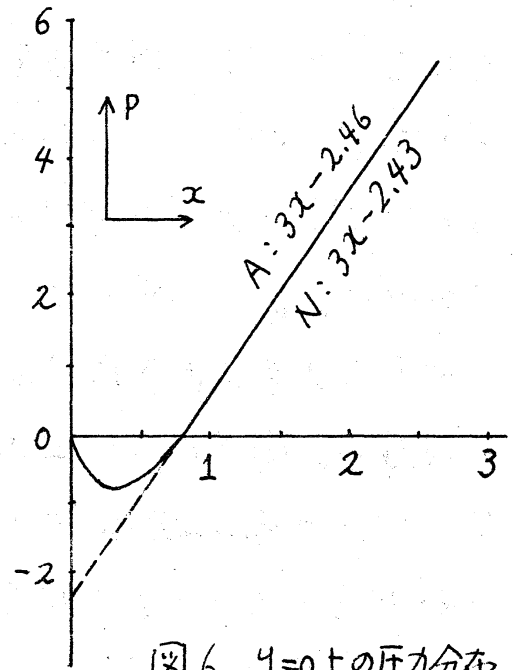


図6  $y=0$ 上の圧力分布

## §6. 合成解

§2, 3で述べた解析解は  $x=0$  の壁付近ではかなり精度が  
良いが、 $x$ が3の前後では壁の速度が1.0から約1%ずれて  
いる。他方数値解の方は遠くでは3桁の精度があるが、渦度  
分布の特異点である角の所では数値計算の性質上正しい解を  
与えることができない。

そこで次のような解を考えてみよう

$$\psi_{NPT} = \psi_{PT} + \psi$$

$\psi_{PT}$ は(2.9), (2.10), (2.11)で与えられるもので壁の上の速度の条

件は完全に満たしていないが、角での特異性は正確におさえている。至は $\psi_{PT}$ が満たしていない残りの条件を補正する解であるが、数値計算上不都合な特異性は含んでいない。至を数値的に求めれば、得られた解 $\psi_{NPT}$ はいたる所で精度の良い近似解になっているものと期待される。

至に対する境界条件は次のようになる。

$$y=0 \text{ で } \psi = 0, \quad \Delta \psi = 0$$

$$x=0 \text{ で } \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi_{PT}}{\partial x}$$

$$y=-1 \text{ で } \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 1 - \frac{\partial \psi_{PT}}{\partial y}$$

$$x \rightarrow \infty \text{ で } \psi \rightarrow 0, \quad \Delta \psi \rightarrow 0$$

この条件で至を計算すると、収束時間(繰返し回数)は§4の $\psi_N$ に対するもの、半分程度ですむ。

### §7. 比較および結び

以上得られた3種の解( $\psi^A$ ,  $\psi_N$ ,  $\psi_{NPT}$ )を比較する意味で壁の上の渦度分布を見てみよう。参考のために $\psi_{PT}$ も同時に考える。図7, 図8にはそれぞれ壁 $x=0$ 及び $y=-1$ での渦度分布が示されている(但し $\psi^A$ に対応するものをAで表わし、他は添字で示す)。両図から明らかになるように $\psi^A$ と $\psi_{NPT}$ は全域で同じ実線で表わされている。これらも数値的に見たのが表2, 3である。アンダーラインは互に一致しているものを示

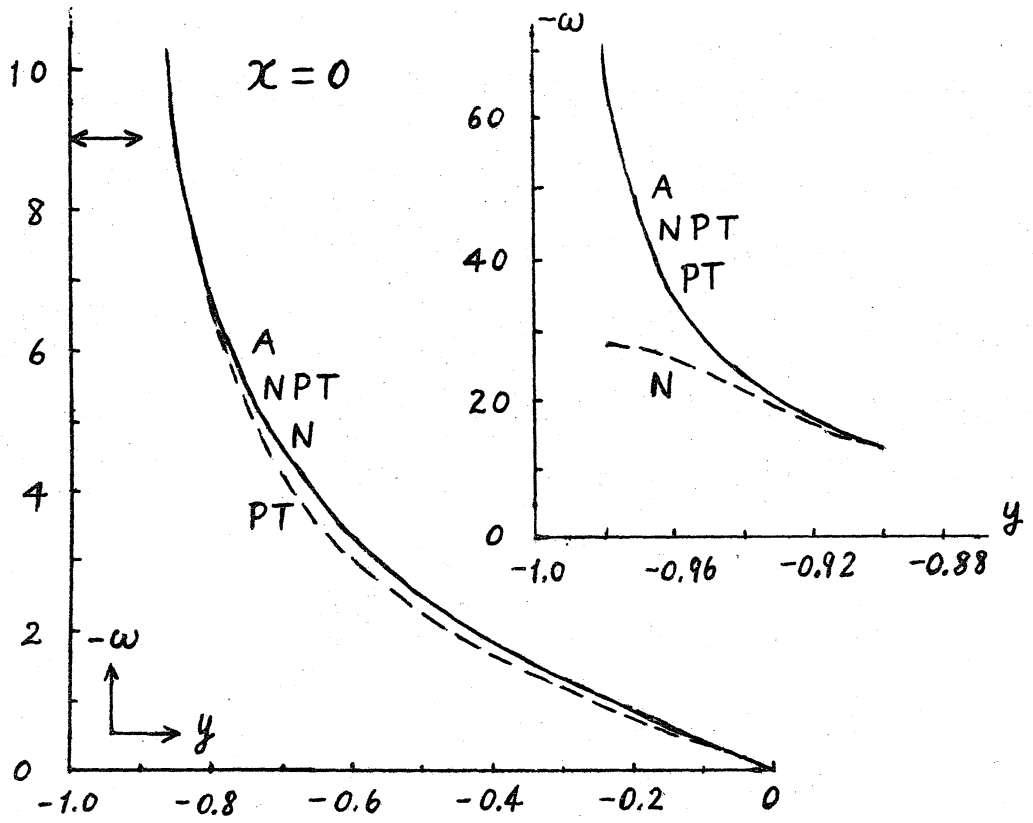


図 7 壁  $x=0$  の上の渦度分布

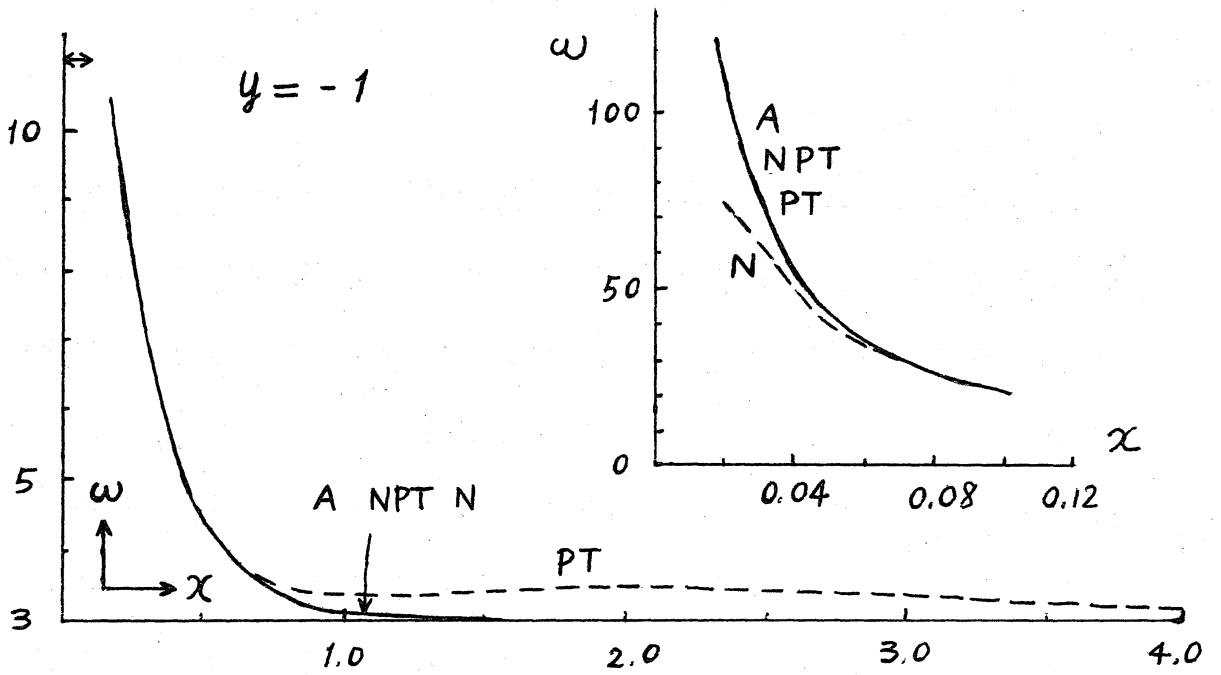


図 8 壁  $y=-1$  の上の渦度分布

表 壁  $x=0$  での温度

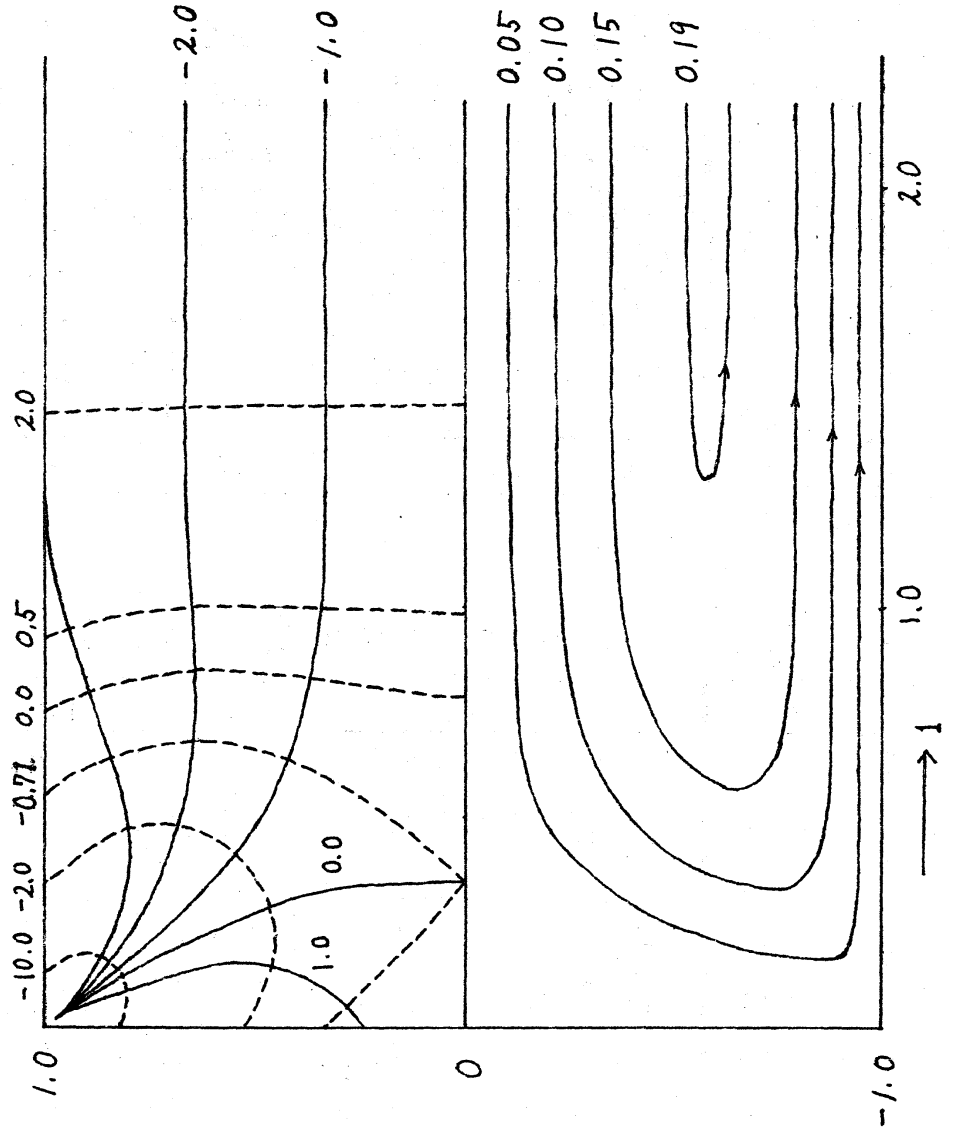
Y	A	PT	N	NPT
0	0	0	0	0
0.20	0.82658	0.69563	<u>0.84588</u>	<u>0.84676</u>
0.40	1.8307	1.5555	<u>1.8235</u>	<u>1.8248</u>
0.60	3.3283	2.9467	<u>3.2606</u>	<u>3.2612</u>
0.80	<u>6.8245</u>	6.5891	<u>6.8284</u>	<u>6.8216</u>
0.90	<u>13.632</u>	13.517	<u>13.595</u>	<u>13.644</u>
0.92	<u>17.038</u>	<u>16.947</u>	16.706	<u>17.048</u>
0.94	<u>22.716</u>	<u>22.649</u>	21.038	<u>22.723</u>
0.96	<u>34.073</u>	<u>34.029</u>	26.235	<u>34.077</u>
0.98	<u>68.138</u>	<u>68.130</u>	27.647	<u>68.159</u>
1.0	$\infty$	$\infty$	—	$\infty$

表 壁  $y=-1$  での温度

X	A	PT	N	NPT
0	$\infty$	$\infty$	—	$\infty$
0.02	<u>107.04</u>	<u>107.03</u>	72.353	<u>107.04</u>
0.04	<u>53.522</u>	<u>53.506</u>	49.521	<u>53.518</u>
0.06	<u>35.682</u>	<u>35.657</u>	35.396	<u>35.673</u>
0.08	<u>26.763</u>	<u>26.728</u>	26.866	<u>26.746</u>
0.10	<u>21.412</u>	<u>21.370</u>	<u>21.479</u>	<u>21.392</u>
0.50	4.5254	4.5085	<u>4.5480</u>	<u>4.5453</u>
1.00	3.1257	3.4241	<u>3.1452</u>	<u>3.1429</u>
1.50	2.9664	3.5276	<u>3.0047</u>	<u>3.0034</u>
2.00	2.9776	3.5919	<u>2.9978</u>	<u>2.9979</u>
2.50	3.0172	3.5506	<u>2.9994</u>	<u>2.9994</u>

アンダーラインは互いに3ケタ一致している数値

表9 流線 等圧線 等渦度線



— 流線, 等渦度線  
 - - - 等圧線 (数値はよどみ点を0とする)



す。NPTは全域で他のどれかの計算値と一致していることがわかる。

### 文献

- (1) 岡小天 第2回流体力学講演会講演集
- (2) G. Bugliarelli - G. Hasio *Biorheology* 7, 5, (1970)
- (3) W. R. Dean *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 47, 127, (1951)
- (4) G. I. Taylor *Aeronautics and Astronautics*, P.12,  
ed. Hoff & Vincenti, (1960)
- G. K. Batchelor *An Introduction to Fluid Dynamics*, P224.
- (5) M. Kawaguti *MRC Report No 574* (1965)