

Forto kaj fortmomanto kiujn spertas cilindraforma
objekto en du-dimensia fluo de Poiseuille

de

Matida, Yukio

Kuwahara, Kunio

Takami, Hideo

Departemento de Aplikata Fiziko

Fakultato de Inĝenierscienco

Universitato de Tokio

Tokio, Japanio

Alasuzi

2-zigen Poiseuille nagale no naka ni, nagale ni suityoku ni seihoukei danmen no hasila wo oita toki ni okolu teizyou nagale wo, suutiteki ni silabelu. Navier-Stokes houteisiki wo sabun houteisiki ni naosi, tikuzi kinzi no houhou de toku (§§ 3, 5). Nagale ga taisyou de nai baai niwa, buqtai no lyougawa wo nukelu nagale no lyou no waliai wo kimelu tame ni, atulyoku no ba ga 1-ka de nakeleba nalanai to iu zyouken wo tukekuwaelu. Sole ni yoqte hazimete, motomelu kai ga tadasiku elalelu. Nagale kansuu to uzudo no ba kala, lyuutai ga buqtai ni oyobosu tikala to sono moomento wo keisansulu (§§ 4, 5). Tokuni, nagale ni suityoku na houkou no tikala no hulumai to, iwayulu "yoko-idou" no gensyou to no kankei wo lonzulu (§ 6).

Suutiteki atukai ni okelu tyuui to site, tikuzi kinzi de motiilu palameetaa no elabikata to syuusoku no hayasa to no

kankei wo silabe (§ 7), mata, tyoqkaku no kado wo mawalu nagale ni tuite suuti ziqken wo okonai, genmitukai to kulabelu koto ni yoqte, tokuisei wo motu nagale no suutikai no syuusoku-sei ni tuite silabelu (§ 8).

- § 1. Enkonduko
- § 2. Formulado de la problemo
- § 3. Aproximado per diferenco-ekvacioj kaj la procedo de sinsekva iteracio
- § 4. Kalkulado de forto kaj fortmomanto
- § 5. Nombraj rezultoj kaj diskutoj
- § 6. Pri transversa migrado
- § 7. Elekto de parametroj kaj la rapido de konverĝo
- § 8. Taksado de la ekarto en nombra solvo pri fluo ĉirkaŭ konvekso angulo

Dankesprimoj

Referencoj

Tabeloj kaj figuroj

§ 1. Enkonduko

De kiam Poiseuille (1836) eltrovis ke sangoglobetoj ne troviĝas apud la muro de sangovazo, dinamikaj kondutoj de la suspensiaĵo en fluo tra tubo estas esploritaj en diversaj kampoj de fiziologio kaj inĝenierscienco (vidu ekz. Brenner 1966, Goldsmith kaj Mason 1967), kaj fenomenoj kiel " σ -efiko", "transversa migrado" ktp, estas studitaj per fluidodinamika

metodo.

Transversa migrado estas tiu fenomeno, en kiu partikletoj en fluo moviĝas ne sole laŭlonge de la fluo sed ankaŭ en transversan direkton. Tiu ĉi fenomeno okazas eĉ kiam la muro kaj la partikletoj ne havas elastecon kaj la fluido estas neŭtona. Segré kaj Silberberg (1961, 1962) montris eksperimente ke partikletoj suspensantaj en fluo tra tubo kolektiĝas en cilindraforma surfaco inter la muro kaj la centra akso. Malgraŭ multaj analitikaj esploroj, ĉi tiu fenomeno ankoraŭ ne estas sufiĉe klarigita teorie. (Esplorado pri transversa migrado estas klare revuita de Matunobu (1972).)

En ĉi tiu traktato, ni provos solvi la ekvaciojn de Navier-Stokes direkte per la metodo de finita diferenco, pri du-dimensia kanalfluo ĉirkaŭ cilindro de kvadrata kversekco metita perpendikulare al la fluo, kaj provos kalkuli precipe la forton kaj la fortmomanton kiujn la cilindro spertas el la fluido. Kvankam la granda diferenco inter nia multe simpligita fluo kaj realaj fluoj ne permesas direkte kompari niajn rezultojn kun tiuj de eksperimentoj, tamen estas eble trovi en ili kelkan karakterizaĵon obsevitajn en realaj fluoj.

§ 2. Formulado de la problemo

Ni esploros du-dimensian, konstantan fluon de nekunpremebla, viskoza fluido, kiu okazas kiam cilindro de kvadrata kversekco estas metita en du-dimensia fluo de Poiseuille inter du paralelaj senmovaj ebenaj muroj.

Estu $2L$ la distanco inter du muroj, l la laterlongo de kversekco de la cilindro, d la distanco inter la akso de la cilindro kaj la simetrieveno de la kanalo (fig. 1).

La fluo estas priskribata de la ekvacioj de Navier-Stokes

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{L}{l} R_L (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Ni uzas L kiel unuon de la longeco. $\mathbf{v} = (u, v)$ kaj p estas la rapidvektoro kaj la premo sendimensiigitaj per U (la maksimuma rapido de Poiseuille'a fluo) kaj per ρU^2 (ρ : denseco de la fluido) respektive. R_L estas la nombro de Reynolds pri la dimensio de la cilindro-kversekco, difinita kiel

$$R_L = \frac{\rho U l}{\mu}, \quad (2.3)$$

kie μ estas la koeficiento de viskozeco de la fluido.

Ni prenos la x -akson laŭlonge de la centra linio de la kanalo, kaj la x -koordinato de la centra akso de la cilindro estu nulo. La limkondiĉoj estas esprimataj kiel

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v} \rightarrow (1 - y^2, 0), \text{ ĉe } x \rightarrow \pm \infty, \\ \mathbf{v} = (0, 0), \text{ sur la muroj } y = \pm 1 \text{ kaj sur la} \\ \text{surfaco de la cilindro.} \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Ni enkondukos flufunkcion Ψ kaj vorticecon ω difinitajn kiel

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = u, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -v, \quad (2.6)$$

kaj

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.7)$$

Do la ekvacio (2.2) estas plenumata aŭtomate. Se ni eliminis la premon p prenante la rotacion de (2.1), ni ricevas

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \Psi + \omega = 0, \end{array} \right. \quad (2.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \omega + \frac{L}{\lambda} R_1 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) = 0. \end{array} \right. \quad (2.9)$$

La limkondiĉoj (2.4) kaj (2.5) estas transformataj en

$$\Psi \rightarrow y - \frac{y^3}{3} \quad \text{kaj} \quad \omega \rightarrow 2y, \quad \hat{\text{c}}e \quad x \rightarrow \pm \infty, \quad (2.10)$$

$$\Psi = \pm \frac{2}{3} \quad \text{kaj} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0, \quad \hat{\text{c}}e \quad y = \pm 1, \quad (2.11)$$

$$\Psi = \Psi_s \quad (= \text{konstanto}) \quad \text{kaj} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0, \quad \text{sur la surfaco de}$$

la cilindro. ($\frac{\partial}{\partial n}$ signifas derivadon en la

direkto de la normalo ĉe la limsurfaco, t.e.,

$$\frac{\partial}{\partial x} \quad \text{aŭ} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{en nia okazo.)} \quad (2.12)$$

La limkondiĉoj (2.10) – (2.12) estas ne sufiĉaj por determini unike la solvon de (2.8) kaj (2.9) se la valoro Ψ_s ne estas donita. Aliflanke, ĉiam ekzistas solvo plenumanta (2.8) – (2.11) por kia ajn preskribado de Ψ_s . Tial, por elekti la ĝustan solvon respondantan al nia fizika cirkonstanco, ni postulos plie ke la premo estu unuvalora tra la tuta flukampo. Tiu ĉi postulo estas esprimata en la ekvacio

$$\oint_C dp = 0, \quad (2.13)$$

kie la integralvojo estas prenata laŭlonge de ia ajn fermita kurbo C ĉirkaŭiranta la cilindron.

§ 3. Aproximado per diferenco-ekvacioj kaj la procedo de sinsekva iteracio

Por solvi la limvaloran problemon (2.8) – (2.13), ni alprenos la metodon de diferenco-aproximado, t.e., ni substituos, anstataŭ $\partial\Psi/\partial x$ kaj $\partial^2\Psi/\partial x^2$ ekzemple, kutimajn centradiferencajn kvocientojn

$$\frac{\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j}}{2h}, \quad (3.1)$$

kaj

$$\frac{\Psi_{i+1,j} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i-1,j}}{h^2} \quad (3.2)$$

ktp. h estas la intervallongo de la kvadrata maŝo de la reto supozita en flukampo nur ĉe kies nodoj ni konsideros la valorojn de nekonatoj Ψ kaj ω ; $\Psi_{i,j}$ ekzemple signifas diferenco-aproximanton de la solvo $\Psi(x, y)$ ĉe la maŝpunkto $(x_i, y_j) = (ih, jh)$. (Vidu fig.2.)

Koncerne la limkondiĉojn ni faros jenan aproximadon:

(i) Por la kondiĉo $\partial\Psi/\partial n = 0$ sur la surfacoj de la muroj kaj la cilindro estas uzata esprimo de centradiferenco sama kiel (3.1).

(ii) La kondiĉoj (2.10) ĉe $x \rightarrow \pm\infty$ estas anstataŭigataj de tiuj ĉe $x = \pm x_{\pm\infty}$ (finitaj). (Vidu fig.3.)

La solvo estos akirata per sinsekva iteracio uzanta la supreskribitajn diferenco-ekvaciojn. La kalkulprocedo estos kiel jene:

(a) Komencaj valoroj por iteracio

Ĉe ciuj maŝpunktoj ni donas al $\Psi_{i,j}$ kaj $\omega_{i,j}$ la valorojn respondantajn al la fluo de Poiseuille:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_{i,j}^{(0)} = y_j - \frac{1}{3} y_j^3, \\ \omega_{i,j}^{(0)} = 2 y_j. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_{i,j}^{(0)} = y_j - \frac{1}{3} y_j^3, \\ \omega_{i,j}^{(0)} = 2 y_j. \end{array} \right. \quad (3.4)$$

(En kelke da okazoj ni alprenis kiel komencajn valorojn, la valorojn de tiu solvo kiu estis jam kalkulita por alia valoro de la Reynolds'a nombro.)

(b) Korektado de $\Psi_{i,j}$ kaj $\omega_{i,j}$ (escepte de Ψ_s)

La $(n+1)$ -aj iteraciatoj $\Psi_{i,j}^{(n+1)}$ kaj $\omega_{i,j}^{(n+1)}$ estas kalkulataj per la n -aj iteraciatoj $\Psi_{i,j}^{(n)}$ kaj $\omega_{i,j}^{(n)}$ sinsekve pri kreskantaj valoroj de j kaj poste pri kreskantaj valoroj de i per la jenaj formuloj.

$$\omega_{i,j}^{(n+1)} = (1 - \beta) \omega_{i,j}^{(n)} + \frac{2\beta}{h^2} \left(-\frac{2}{3} - \Psi_{i,j+1}^{(n)} \right), \quad (3.5)$$

Ĉe la punktoj sur $y = -1$; β estas iu pozitiva parametro.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_{i,j}^{(n+1)} = (1 - \alpha) \Psi_{i,j}^{(n)} + \frac{\alpha}{4} \left(\Psi_{i,j-1}^{(n+1)} + \Psi_{i-1,j}^{(n+1)} \right. \\ \left. + \Psi_{i+1,j}^{(n)} + \Psi_{i,j+1}^{(n)} + h^2 \omega_{i,j}^{(n)} \right), \\ \omega_{i,j}^{(n+1)} = (1 - \beta) \omega_{i,j}^{(n)} \end{array} \right. \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{\beta}{4} \left[\omega_{i,j-1}^{(n+1)} + \omega_{i-1,j}^{(n+1)} + \omega_{i+1,j}^{(n)} + \omega_{i,j+1}^{(n)} \right. \\ & \left. + \frac{LR}{4l} \left\{ \left(\Psi_{i+1,j}^{(n)} - \Psi_{i-1,j}^{(n+1)} \right) \left(\omega_{i,j+1}^{(n)} - \omega_{i,j-1}^{(n+1)} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(\Psi_{i,j+1}^{(n)} - \Psi_{i,j-1}^{(n+1)} \right) \left(\omega_{i+1,j}^{(n)} - \omega_{i-1,j}^{(n+1)} \right) \right\} \right], \quad (3.7) \end{aligned}$$

ĉe ĉiuj internaj maŝpunktoj kaj ĉe la kvar anguloj E, F, G, H de la cilindro (nur pri $\omega_{i,j}$); α estas iu pozitiva parametro.

$$\omega_{i,j}^{(n+1)} = (1-\beta) \omega_{i,j}^{(n)} + \frac{2\beta}{h^2} \left(\frac{2}{3} - \Psi_{i,j-1}^{(n+1)} \right), \quad (3.8)$$

ĉe la punktoj sur $y = 1$.

$$\omega_{i,j}^{(n+1)} = (1-\beta) \omega_{i,j}^{(n)} + \frac{2\beta}{h^2} \left(\Psi_s^{(n)} - \Psi_{i-1,j}^{(n+1)} \right), \quad (3.9)$$

ĉe la punktoj sur la surfaco de la cilindro (ekz. sur la latero EF escepte de la anguloj E kaj F).

(c) Korektado de Ψ_s

Ni kalkulas $\Psi_s^{(n+1)}$ per $\Psi_s^{(n)}$ kaj per la flukampo ĉirkaŭ la cilindro ĵus kalkulita kiel jene:

$$\Psi_s^{(n+1)} = \Psi_s^{(n)} + \lambda \sum_C \Delta p. \quad (3.10)$$

Ankaŭ λ estas iu parametro. La sumo $\sum_C \Delta p$ signifas la diferenco-analogon de la integralo $\oint_C dp$, kie C estas ortokvarangula vojo ĉirkaŭiranta la cilindron kontraŭ la senco de horloĝmontriloj (fig.4). Ĉi tiu sumo estas kalkulebla per la diferenco-analogo de (2.1).

(d) Provo de konverĝo

Ni kalkulas la maksimuman valoron de $|\omega_{i,j}^{(n+1)} - \omega_{i,j}^{(n)}|$ ĉe la maŝpunktoj sur la linio $x = \text{konst}$ tuj malantaŭ la cilindro. (La maksimuma valoro de la sama kvanto pri ĉiuj maŝpunktoj ne superis duoblan tiun valoron en nia konkreta kalkulo.)

Procedoj (b), (c) kaj (d) formas unu ciklon de nia

sinsekva iteraciado. La procedo finiĝos kiam la supredirita maksimumo fariĝas pli malgranda ol iu malgranda pozitiva nombro ϵ konvene fiksita.

§ 4. Kalkulado de forto kaj fortmomanto

Estu X , Y kaj M respektive la x -, y -komponentoj de la forto kaj la z -komponento de la fortmomanto kiujn spertas la cilindro el la fluido. Ni difinos la koeficienton de trenforfo (forto laŭlonge de la fluo) kiel

$$C_D = \frac{X}{\frac{1}{2} \rho U^2 l}, \quad (4.1)$$

la koeficienton de levforfo (forto transversa al la fluo) kiel

$$C_L = \frac{Y}{\frac{1}{2} \rho U^2 l}, \quad (4.2)$$

kaj la koeficienton de fortmomanto kiel

$$C_M = \frac{M}{\frac{1}{2} \rho U^2 l^2}. \quad (4.3)$$

Post kiam Ψ kaj ω estas kalkulitaj en la tuta flukampo, ni povas kalkuli la supre difinitajn koeficientojn per la jenaj formuloj (Imai 1951):

$$C_D - i C_L = \frac{L}{l} \left[-4i \oint_C \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)^2 dz - 2i \oint_C \omega \bar{z} d\Psi \right] - \frac{4}{R_l} \oint_C \frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} \bar{z} d\bar{z}, \quad (4.4)$$

kaj

$$C_M = \left(\frac{L}{l} \right)^2 \left[4 \Re \oint_C \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)^2 z dz - \oint_C z \bar{z} dQ \right] + \frac{L}{l} \left[\frac{2}{R_l} \Im \oint_C \omega \bar{z} dz - \frac{4}{R_l} \Gamma(C) \right], \quad (4.5)$$

kie

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy, \quad (4.6)$$

$$dQ = -\omega d\Psi + \frac{2l}{LR_l} \Im \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} dz \right), \quad (4.7)$$

$$\Gamma(C) = \oint_C (u dx + v dy), \quad (4.8)$$

kaj C estas ia ajn fermita kurbo ĉirkaŭiranta la cilindron en kontraŭhorloĝa senco.

§ 5. Nombraj rezultoj kaj diskutoj

Ni faris kalkuladon pri tiuj valoroj de diversaj parametroj kiuj estos priskribataj sube.

La ratio l/L de la laterlongo de la cilindro-kversekco al duonlarĝo de la kanalo estis fiksita kiel egala al $2/5$ en ĉiuj okazoj, dum la pozicio de cilindro estis tiel variigata kiel $d/L = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ kaj 0.6 . (Tiu ĉi ratio estus 0.8 se la cilindro ĵus tuŝus la muron.)

Ĉiu kalkulo estis farata por la serio de Reynolds'a nombro $R_l = 0, 0.4, 2, 4, 10, 20$ kaj 40 (la lasta nur kiam $d/L = 0$.)

La limo de flukampo estis prenata kiel $\alpha_{-\infty} = 1.4 - 2.0$ kaj $\alpha_{+\infty} = 1.6 - 4.2$.

La maŝlongo h estis prenata kiel egala al 0.1 aŭ 0.05 . (Laterlongo de la cilindro-kversekco estas respektive kvarobla aŭ okobla maŝlongo.) La totala nombro de maŝpunktoj uzitaj en ĉiu kalkulo variis el 852 ĝis 4912 .

La parametro por provi konverĝon estis elektata kiel egala al 10^{-4} aŭ 10^{-5} .

Ni montris en tabelo 1 kaj tabelo 2 niajn nombrajn rezultojn kune kun la valoroj de diversaj parametroj. Ankaŭ en fig.5 estas donitaj serio da desegnoj de flulinioj kaj linioj de egalvorticeco por kelke da tipaj okazoj.

Kiel videble el la tabeloj, la valoro de Ψ_s kreskas kun R_L . Tio ĉi signifas ke la kvanto de fluido trafluanta sub la cilindro relative kreskas kun kreskanta R_L , kiel ekspektate el fizika konsidero.

El tabelo 1 kaj fig.6 ni povas konkludi ke la koeficiento de trenforto C_D estas esprimata kiel funkcio de R_L per la formulo

$$C_D = \frac{36.3}{R_L}, \quad (5.1)$$

pri malgranda R_L kiam $d/L = 0$. Ni notos ke Wakiya (1959) kalkulis analitikan solvon de du-dimensia malrapida kanalfluo ĉirkaŭ cilindro de elipsa kversekco. Laŭ lia kalkulo, C_D por speciala okazo de cirkla cilindro de diametro δ estas esprimata kiel

$$C_D = \frac{32.3}{R_s}, \quad R_s = \frac{\rho U \delta}{\mu}, \quad (5.2)$$

kiam $\delta/L = 2/5$. Kvankam ne troviĝas eksperimentaj nek analitikaj rezultoj kompareblaj en strikta senco kun nia formulo, proksimeco de nombraj valoroj de la numeratoroj en ambaŭ formuloj estas rimarkinda.

Fig.6 ankaŭ montras ke la Stokes'a aproksimado estas valida

kiam $R_l \lesssim 4$. Fig. 7, 8 kaj 9 montras kiamaniere dependas la koeficientoj C_D , C_L kaj C_M de la pozicio de la cilindro.

Kiel estas videble el la diagramo por C_L , la koeficiento de levforto havas nenulan limiton kiam R_l proksimiĝas al nulo. Se ni alprenus la Stokes'an aproksimadon, la levforto estus kalkulata kiel idente nulo, t.e., C_L ne estus korekte kalkulebla en Stokes'a aproksimado. Tial ni vidas ke la levforto havas ĝian kaŭzon esence en la inercitermoj neglektitaj en la ekvacioj de Stokes.

Por la Reynolds'a nombro de 0 ĝis 20, C_L estas kalkulita ĉiam pozitiva, t.e., la cilindro spertas levforton ĉiam direktiĝantan al la centra parto de la kanalo. Tamen, estas notinde ke troviĝas karakteriza diferenco inter la kurbo de C_L por $R_l = 20$ kaj tiuj por aliaj valoroj de R_l . Ni diskutos pri la signo de C_L pli detale en la sekvanta paragrafo.

§ 6. Pri transversa migrado

Kiel menciite en § 1, Segré kaj Silberberg eltrovis ke sferformaj partikloj suspensantaj en fluo tra vertikale metita ronda tubo kolektiĝas en difinita cilindraforma surfaco (ĝia radiuso estas ĉirkaŭ 0.6-obla tubradiuso por Reynolds'a nombro de grado de 1 ĝis 10 en rilato al la dimensio de partiklo kaj pligrandiĝas kun kreskanta nombro de Reynolds), sendepende de la komencaj pozicioj kaj koncentriteco de la partikloj. Tio okazas kompreneble pro tio, ke la fluo puŝas la partiklojn drivantajn apud la tubakso al la muro kaj tiujn apud la muro al la tubakso.

Aliflanke, Oliver (1962) montris ankaŭ per eksperimento pri sola partikleto (Reynolds'a nombro estas ĉirkaŭ $1 \sim 10$) ke la loko de kolektiĝo moviĝas en la direkto al la tubakso, (i) kiam la partikleto fluas pli malrapide ol la fluido en la ĉirkaŭo, aŭ (ii) kiam la partikleto ne povas libere rotacii.

Estas bone konate ke fluoj de malgranda Reynolds'a nombro estas priskribataj per la ekvacioj de Stokes, kaj la (nenulaj) trenfortoj de la fluido estas korekte kalkulebla en tiu aproksimado. Kontraste al ĉi tio, ĝi ofte donas levforton kiu estas idente nulo. Ekzemple, estas facile demonstrate pro lineareco kaj izotropeco de la Stokes'aj ekvacioj ke neniam spertas levforton la objekto kiu estas fiksita en fluo simetria almonte-alvale kaj kies formo estas sammaniere simetria. (Per la sama rezonado oni povas ankaŭ demonstri ke nenian levforton spertas sfero aŭ ronda cilindro eĉ se ĝi estas metita en rotacio.) Sekve, oni devas iel pripensi la inercitermojn por klarigi eksperimentojn de Segré k.a. Kvankam oni havas analitikajn esplorojn de Rubinow kaj Keller (1961), Saffman (1965), k.a., ili estas neniel kontentigaj kaj la fenomeno de transversa migrado ankoraŭ ne estas klarigita teorie.

Nun, koncerne al niaj nombraj solvoj, ili ankaŭ ne estas kontentigaj ĉar ili ne estas kompareblaj kun eksperimentoj pro multe simpligita geometria kondiĉo. Malgraŭ tio, estas notinde ke niaj rezultoj kvalite konformiĝas al eksperimentaj observaĵoj en la jenaj sencoj:

- (i) Niaj solvoj montras ke la transversa forto por $R_L \leq 20$

Ĉiam havas direkton el muro al kanalcentro. Tamen, la aparta aspekto de la kurbo de C_L por $R_\lambda = 20$ (fig.8) sugestas ke eĉ en du-dimensia fluo eble aperus negativa transversa forto, konforme al la observaĵoj de Segré k.a., por malgrandaj valoroj de d/L se la Reynolds'a nombro pligrandiĝas super 20.

(ii) Se ni supozas ke la tendenco observita en la eksperimento de Oliver troviĝas ankaŭ en du-dimensia fluo, la fluo ĉirkaŭ fiksita objekto kiun ni esploras en ĉi tiu traktato estos rigardata kiel tia pri kiu renversiĝo de transversa forto okazas la plej malfacile.

Ĉio ĉi tio sugestas la eblecon ke renversiĝo okazus por pli malgranda Reynolds'a nombro, se ni solvus la ekvaciojn de Navier-Stokes sub pli reala situacio kaj kondiĉo.

§ 7. Elekto de parametroj kaj la rapido de konverĝo.

Determini teorie la optimumajn valorojn de la parametroj α , β kaj λ en (3.6), (3.5) kaj (3.10) estas preskaŭ neeble. Tial ni konjektis ilin per la metodo de provi-kaj-erari, surbaze de kelkaj nombraj eksperimentoj.

Unue ni priskribos la rezulton de nombra eksperimentado kiu servis por determini α kaj β .

Ni difinos $\delta\Psi^{(n)}$ kaj $\delta\omega^{(n)}$, grandojn de korektiĝo ĉe la n -a ŝtupo de iteraciado kiel jene:

$$\delta\Psi^{(n)} = \sum_{i,j} |\Psi_{i,j}^{(n)} - \Psi_{i,j}^{(n-1)}|, \quad (7.1)$$

kaj

$$\delta\omega^{(n)} = \sum_{i,j} |\omega_{ij}^{(n)} - \omega_{ij}^{(n-1)}|, \quad (7.2)$$

kie la sumoj estas prenataj pri ĉiuj maŝpunktoj. Plie estu N_ϵ la minimumo de la nombro n por kiu ni havas neegalajojn $\delta\Psi^{(n)} < \epsilon$ kaj $\delta\omega^{(n)} < \epsilon$. N_ϵ estas la nombro de iteracioj necesaj por konverĝo de la procedo.

Kelke da rezultoj de nia nombra eksperimento estas montritaj en fig.10 kaj fig.11.

Fig.10 montras kiamaniere $\delta\Psi^{(n)}$ kaj $\delta\omega^{(n)}$ malkreskas kun kreskanta n kaj kiamaniere la rapido de malkreskado dependas de α kaj β (en la okazo de $\alpha = \beta$), dum fig.11 montras la dependecon de N_ϵ de α kaj β . Kvankam la nombraj valoroj akirataj per tia eksperimento ne havas grandan signifon per si mem ĉar ili dependas de la nombro de maŝpunktoj, la valoroj de ϵ , R_L , ktp., tamen ni povas konkludi el ĉi tie montritaj kaj aliaj eksperimentoj la jenajn:

(i) $\delta\Psi^{(n)}$ kaj $\delta\omega^{(n)}$ malkreskas preskaŭ eksponenciale kiel funkcio de n pri malgranda R_L . (En efektiveco, ili malkreskos precize eksponenciale kiam $R_L = 0$, ĉar tiam ni havas sistemon de linearaj ekvacioj.)

(ii) Pri ne tre malgranda R_L , la rapido de malkreskado supreskribita malkreskas kun kreskanta n .

(iii) Grado de kreskado de N_ϵ estas pli granda por super-taksitaj ol por subtaksitaj valoroj de α kaj β . Tiu ĉi karakterizaĵo estas en kontrasto kun tiu observata en la solvado de Laplace'a ekvacio (ekz. Young 1954), kaj estas

observita ankaŭ en alia ekzemplo (Takami 1968).

(iv) Pri relative granda R_λ ni povas ricevi, kiel ekspektate, pli grandan rapidon de konverĝo per variigi α kaj β sendepende unu la alian.

Nun ni transiros al la diskuto pri la parametro λ aperinta en (3.10). La esenca fakto estas ke λ devas esti elektata kiel pozitiva. Tion sugestas la jena rezonado.

Estu 1, 2, 3 kaj 4 la verticoj de la orta-kvarangula integralvojo C (fig.4) Do ni havas

$$\oint_C dp = \int_1^2 dp + \int_2^3 dp + \int_3^4 dp + \int_4^1 dp. \quad (7.3)$$

El fizika konsidero pri la direkto de fluo estus supozeble ke ambaŭ integraloj $\int_2^3 dp$ kaj $\int_4^1 dp$ estas malgrandaj kompare kun la aliaj du integraloj, kaj sekve ni havas proksimume

$$\begin{aligned} \oint_C dp &\approx \int_1^2 dp + \int_3^4 dp \\ &= (p_2 - p_1) + (p_4 - p_3). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Tial, se $\oint_C dp > 0$, aŭ pli precize se $\sum_C \Delta p > 0$ ĉe iu ŝtupo de iteraciado, ni ricevus

$$p_4 - p_3 > p_1 - p_2. \quad (7.5)$$

Tamen, tio ĉi signifas ke la flukvanto tra la interspaco supraflanke de la cilindro estas tro granda kompare kun tiu de la ekzakta solvo, ĉar flukvanto tra kanalo estas proporcia al la falo de premo. Tial ni devas pligrandigi Ψ_s por ricevi pli bonan proksimuman valoron. Tute same ni devas pli malgrandigi Ψ_s kiam $\oint_C dp < 0$. Ĉiuokaze λ devas esti elektata pozitiva.

Tiamaniere, ankaŭ λ ludas la rolon de parametro de malstreĉo similan al tiu de α kaj β .

Nombraj eksperimentoj montras ke la valoro de λ ne multe influas sur la rapidon de konverĝo, se ĝi ne superas iun valoron determinatan de la Reynolds'a nombro kaj aliaj parametroj.

§ 8. Taksado de la ekarto en la nombra solvo pri fluo ĉirkaŭ konvekso angulo

Pro ĉeesto de konveksaj anguloj de la cilindro estus suspektate ke la precizeco de nia nombra solvo estus pli malgranda ol en la solvo de problemo kun objekto de glata formo, aŭ eĉ ke la metodo de finita diferenco mem fariĝus senvalorigita.

En ĉi tiu paragrafo, ni kalkulos nombran solvon de la ekvacioj de Stokes pri fluo ĉirkaŭ ortangulo, kaj komparos ĝin kun la ekzakta analitika solvo donita de Moffatt (1964).

La ekvacioj de Stokes pri fluo ĉirkaŭ angulo de granda $2(\pi - \phi)$ havas la jenajn specialajn solvojn (vidu fig.12):

$$\begin{cases} \Psi(r, \theta) = r^\sigma \{ \cos(\sigma-2)\phi \cos \sigma\theta - \cos \sigma\phi \cos(\sigma-2)\theta \}, & (8.1) \\ \omega(r, \theta) = 4(\sigma-1) r^{\sigma-2} \cos \sigma\phi \cos(\sigma-2)\theta. & (8.2) \end{cases}$$

kie σ estas iu ajn radiko de la transcenda ekvacio

$$\sin 2(\sigma-1)\phi + (\sigma-1) \sin 2\phi = 0. \quad (8.3)$$

Ni donis en tabelo 3 valorojn de kelkaj radikoj σ_n pri kiu

$\Re \sigma_n > 1$, por $2\phi = (3/2)\pi$ (respondanta al angulo de granda $\pi/2$).

Ni interesigas precipe en tia speciala solvo kia estas laŭeble malregula ĉe la angulo (la flurapido tamen devas stari finita ĉe la sama punkto), ĉar la ekarto en nombra solvo pri fluo ĉirkaŭ angulo kredeble estus atribuebla ĉefe al tia komponanto entenata en la tuta solvo. Al tia solvo respondas la radiko σ_1 en la tabelo kiu havas minimuman realan parton pli granda ol 1.

Ni studis pri la angulo $2\phi = (3/2)\pi$ la specialajn solvojn respondantajn al σ_1 kaj ankaŭ al σ_2 (por komparo), t.e., ni solvis nombre la diferenco-analogon de la limvalora problemo de la ekvacioj de Stokes pri la interna regiono OABCDE skizita en fig.13. La valoroj de Ψ kaj ω de specialaj solvoj (8.1) kaj (8.2) respondantaj al σ_1 kaj σ_2 respektive estis uzata kiel la limvaloroj sur ABCDE, dum kondiĉoj $\Psi = 0$ kaj $\partial\Psi/\partial n = 0$ estis postulitaj sur la limo EOA. La rezultoj de nombra kalkulado estas donitaj en fig.14. Tie ni difinis la ekartojn por ambaŭ la flufunkcio kaj la vorticeco kiel jene:

$$\left\{ \begin{array}{l} e_\Psi = \frac{1}{N_\Delta} \sum_{\substack{\hat{c}_{i,j} \\ \text{maŝpunktoj}}} |\Psi_\Delta - \Psi|, \end{array} \right. \quad (8.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e_\omega = \frac{1}{N_\Delta} \sum_{\substack{\hat{c}_{i,j} \\ \text{maŝpunktoj}}} |\omega_\Delta - \omega|, \end{array} \right. \quad (8.5)$$

kie Ψ kaj ω estas la analitika, Ψ_Δ kaj ω_Δ estas la respondanta nombra solvo, dum N_Δ signifas la totalan nombron de maŝpunktoj.

Ni vidas el fig.14 ke ambaŭ e_Ψ kaj e_ω kondukas kiel $O(h^\nu)$ pri malgranda h . La valoro de ν estas egala proksimume al 1.1 pri la solvo respondanta al σ_1 kaj proksimume al 2 pri la solvo respondanta al σ_2 . Tial ni povas esperi, ke la

ekarto en la nombra solvo, kvankam malrapide, konverĝos al nulo ne tro malrapide eĉ pri la plej malregula solvo.

Dankesprimo

La aŭtoroj esprimas ilian koran dankon al Profesoro Isao Imai kaj la membroj de lia seminario por iliaj multevaloraj konsiloj kaj diskutoj. La nombra kalkulado estis plenumita de HITAC 5020E de Universitato de Tokio. Ĉi tiu esploro povis esti efektivigita per la subvencio de la Ministerio de Eduko.

Referencoj

- 1) Brenner, H. 1966: *Advances in Chemical Engineering*, Vol.6 (ed. Drew, T.B. et al.), Academic Press, 287.
- 2) Goldsmith, H. & S.G. Mason 1967: *Rheology*, Vol.4 (ed. Eirich, F.R.), Academic Press, 85.
- 3) Imai, I. 1951: *Proc. Roy. Soc. A* 208, 487.
- 4) Matunobu, Y. 1972: *Nihon Butuligaqkaisi* 27, 107.
- 5) Moffatt, H.K. 1964: *J. Fluid Mech.* 18, 1.
- 6) Oliver, D.R. 1962: *Nature*, Lond. 194, 1269.
- 7) Poiseuille, J.L.M. 1836: *Ann. Sci. Nat.* (2), 5, 111.
- 8) Rubinow, S.I. & J.B. Keller 1961: *J. Fluid Mech.* 11, 447.
- 9) Saffman, P.G. 1965: *J. Fluid Mech.* 22, 385.
- 10) Segré, G. & A. Silberberg 1961: *Nature*, Lond. 189, 209.
- 11) Segré, G. & A. Silberberg 1962: *J. Fluid Mech.* 14, 136.
- 12) Takami, H. 1968: *Res. Inst. Math. Sci.*, Kyoto Univ., Rep. 37, 53.

- 13) Wakiya, S. 1959: Fac. Engg., Niigata Univ., Rep. 8, 31.
 14) Young, D. 1954: Trans. Amer. Math. Soc. 76, 92.

R_L	C_D	$\alpha_{-\infty}$	$\alpha_{+\infty}$	N_{mas}	$\alpha(=\beta)$	N_E
0	(36.30)	2.0	2.0	3272	1.2	638
0.4	90.81	2.0	2.0	3272	1.2	607
1	36.47	2.0	2.0	3272	1.2	617
2	18.45	1.4	1.6	2452	1.3	470
4	9.60	1.6	2.4	3272	1.3	670
10	4.51	1.6	2.4	3272	1.2	488
20	2.85	1.6	3.4	4092	0.8	928
40	1.95	1.8	4.2	4912	0.5	2180

tabelo 1

Koeficiento de trenforto, ktp. $d/L = 0$, $h = 0.05$, $\varepsilon = 10^{-5}$.
 N_{mas} : totala nombro de maŝpunktoj. N_E : nombro de iteracioj necesaj por konverĝo. La valoro (36.30) de C_D por $R_L = 0$ devas esti legata kiel la limitvaloro de C_D/R_L^{-1} kiam $R_L \rightarrow 0$.

d/L	C_D/R_L^{-1}	C_L/R_L^{-1}	C_M/R_L^{-1}	Ψ_s	$\alpha(=\beta)$	N_E	λ
0.0	31.1	0	0.00	0.000	1.2	55	
0.1	30.4	0	-0.58	-0.175	1.3	131	0.001
0.2	28.6	0	-1.09	-0.332	1.3	126	0.001
0.3	26.0	0	-1.49	-0.459	1.3	110	0.001
0.4	23.0	0	-1.81	-0.552	1.3	136	0.001
0.5	19.7	0	-2.01	-0.612	1.2	167	0.001
0.6	16.6	0	-2.14	-0.646	1.1	201	0.001

tabelo 2(a)

Koeficientoj de fortoj kaj de fortmomanto, ktp. $R_L = 0$,
 $h = 0.1$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $\alpha_{\pm\infty} = 2.0$, $N_{mas} = 852$.

d/L	C_D	C_L	C_M	Ψ_s	$\alpha(=\beta)$	N_ϵ	λ
0.0	77.7	0.00	0.00	0.000	1.2	37	
0.1	76.0	1.18	-1.40	-0.175	1.3	48	0.001
0.2	71.6	2.06	-2.68	-0.332	1.3	74	0.001
0.3	65.0	2.53	-3.72	-0.459	1.3	53	0.001
0.4	57.5	2.59	-4.50	-0.552	1.3	58	0.001
0.5	49.5	2.33	-5.03	-0.612	1.2	73	0.001
0.6	41.7	1.91	-5.34	-0.646	1.1	85	0.001

tabelo 2(b)

Koeficientoj de fortoj kaj de fortmomanto, ktp. $R_L = 0.4$,
 $h = 0.1$, $\epsilon = 10^{-4}$, $\chi_{\pm\infty} = 2.0$, $N_{mas} = 852$.

d/L	C_D	C_L	C_M	Ψ_s	$\alpha(=\beta)$	N_ϵ	λ
0.0	31.3	0.00	0.00	0.000	1.2	55	
0.1	30.6	1.11	-0.53	-0.173	1.3	71	0.001
0.2	28.8	1.97	-1.03	-0.329	1.3	79	0.001
0.3	26.2	2.41	-1.45	-0.456	1.3	85	0.001
0.4	23.2	2.49	-1.77	-0.550	1.3	89	0.001
0.5	20.0	2.26	-2.00	-0.611	1.2	85	0.001
0.6	16.9	1.86	-2.13	-0.646	1.1	101	0.001

tabelo 2(c)

Koeficientoj de fortoj kaj de fortmomanto, ktp. $R_L = 1$,
 $h = 0.1$, $\epsilon = 10^{-4}$, $\chi_{\pm\infty} = 2.0$, $N_{mas} = 852$.

d/L	C_D	C_L	C_M	Ψ_s	$\alpha(=\beta)$	N_ϵ	λ
0.0	15.9	0.00	0.00	0.000	1.3	138	0.001
0.1	15.7	0.95	-0.23	-0.167	1.3	140	0.001
0.2	14.7	1.70	-0.46	-0.319	1.3	145	0.001
0.3	13.5	2.15	-0.62	-0.447	1.3	144	0.001
0.4	12.0	2.25	-0.81	-0.543	1.3	181	0.001
0.5	10.3	2.07	-0.97	-0.608	1.1	282	0.001
0.6	8.7	1.72	-1.06	-0.645	1.2	243	0.001

tabelo 2(d)

Koeficientoj de fortoj kaj de fortmomanto, ktp. $R_L = 2$,
 $h = 0.1$, $\epsilon = 10^{-5}$, $\chi_{\pm\infty} = 2.0$, $N_{mas} = 852$.

d/L	C_D	C_L	C_M	Ψ_s	$\alpha (= \beta)$	N_ε	λ
0.0	2.54	0.00	0.00	0.000	0.7	1001	0.0002
0.1	2.53	0.01	-0.01	-0.110	0.6	496	0.0002
0.2	2.45	0.05	-0.02	-0.220	0.6	598	0.0002
0.3	2.33	0.11	-0.03	-0.328	0.6	702	0.0002
0.4	2.05	0.23	-0.07	-0.437	0.6	735	0.0002
0.5	1.86	0.47	-0.12	-0.538	0.6	926	0.0002
0.6	1.50	0.58	-0.14	-0.616	0.6	1000	0.0002

tabelo 2(e)

Koeficientoj de fortoj kaj de fortmomanto, ktp. $R_L = 20$,
 $h = 0.1$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $\alpha_{-\infty} = 2.0$, $\alpha_{+\infty} = 5.0$, $N_{mas} = 1482$.

n	σ_n
1	1.5444839
2	2.6292574 + 0.2312505 i
3	3.9718437 + 0.3739312 i
4	5.3103773 + 0.4554936 i
5	6.6471118 + 0.5136838 i
6	7.9828704 + 0.5591083 i

tabelo 3

Kelkaj radikoj σ_n de (8.3) pri kiuj

$$\Re \sigma_n > 1. \quad 2\phi = (3/2)\pi.$$

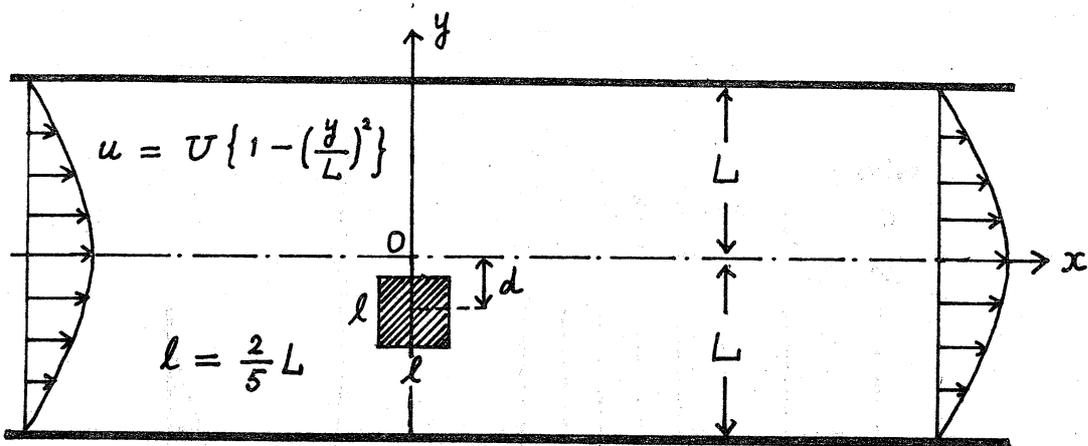


fig. 1

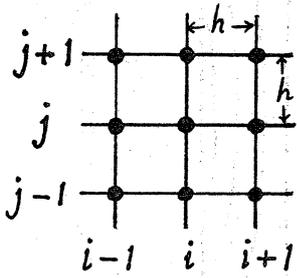


fig. 2

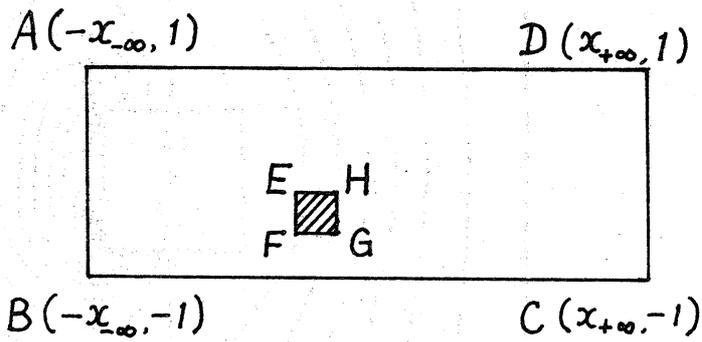


fig. 3

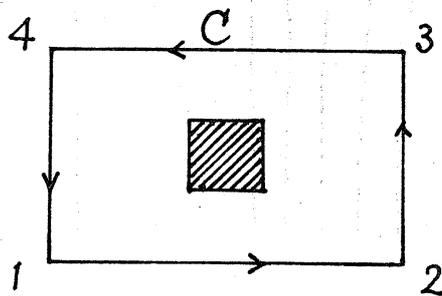


fig. 4

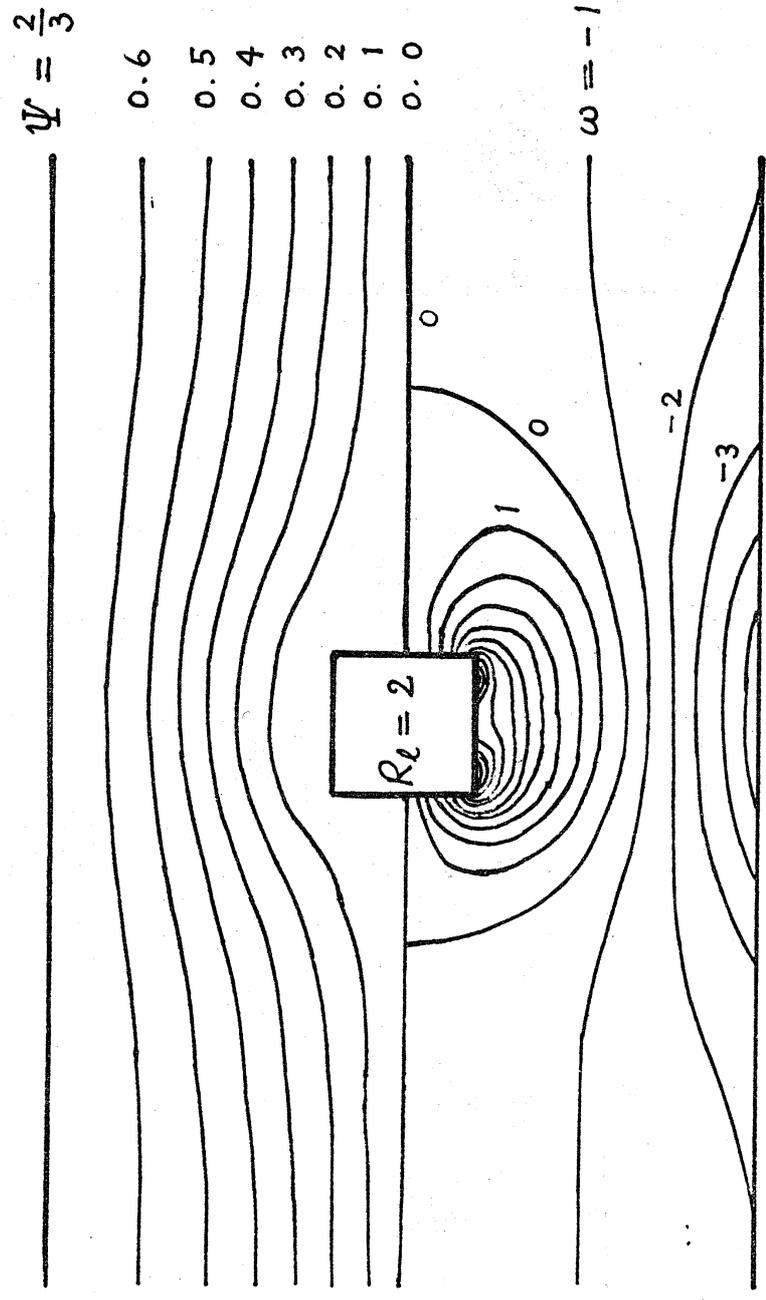


fig. 5(a)
 Flulinioj kaj linioj de egalvorticeco.
 $R_L = 2$ $d/L = 0$

$$\Psi = \frac{2}{3}$$

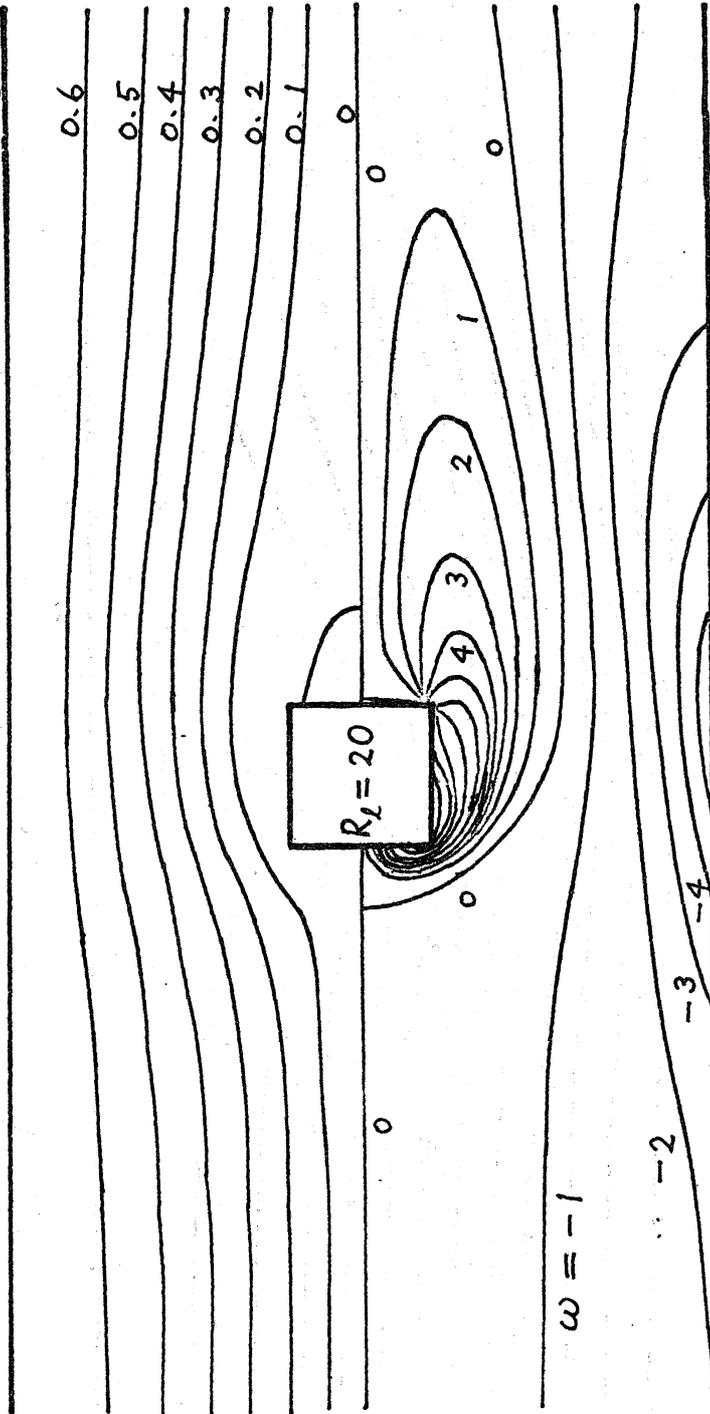


fig. 5(b)

Flulinioj kaj linioj de egalvorticeco

$$R_L = 20 \quad d/L = 0$$

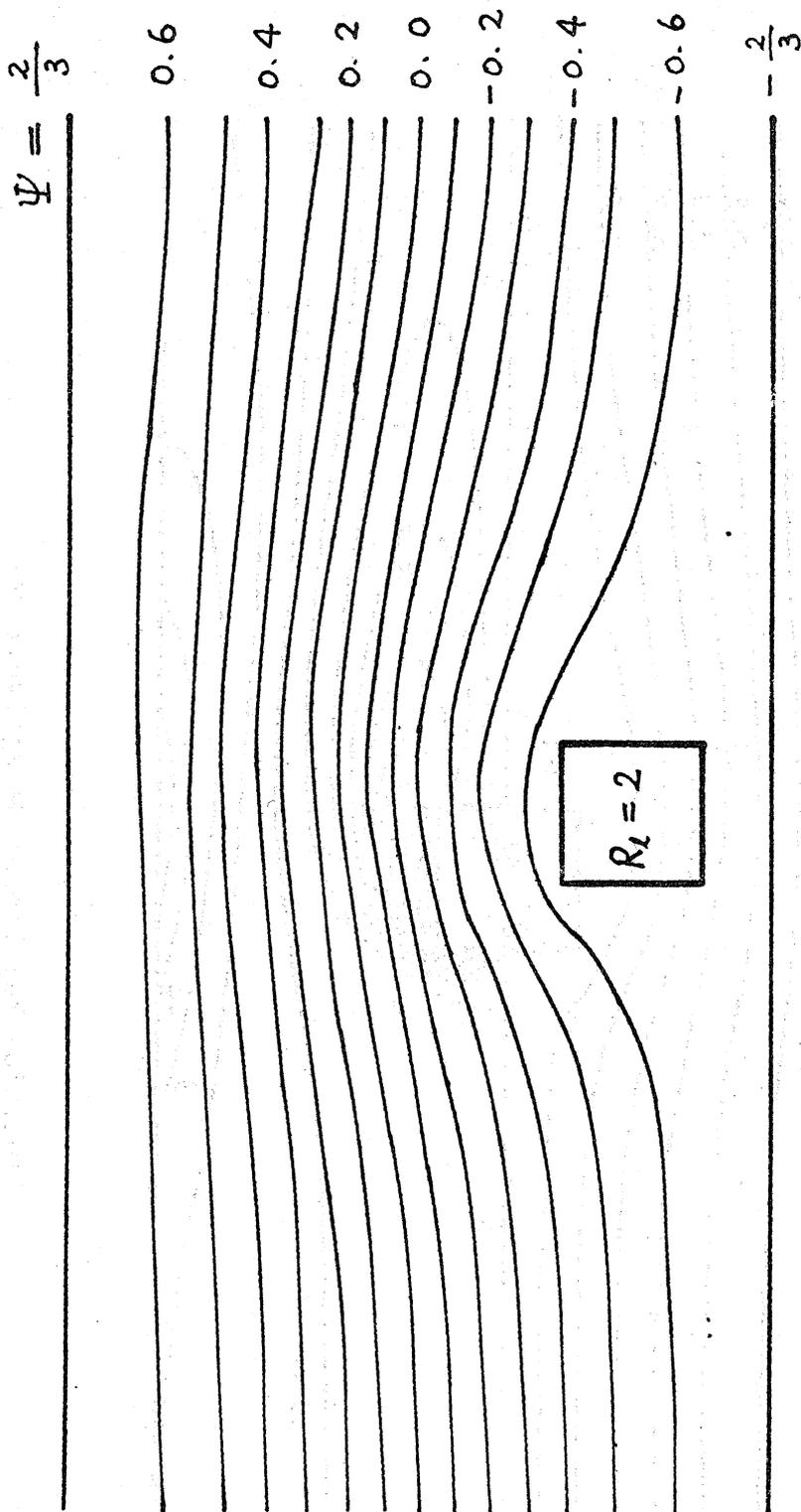


fig. 5(c)

Flulinioj

$R_L = 2 \quad d/L = 0.6$

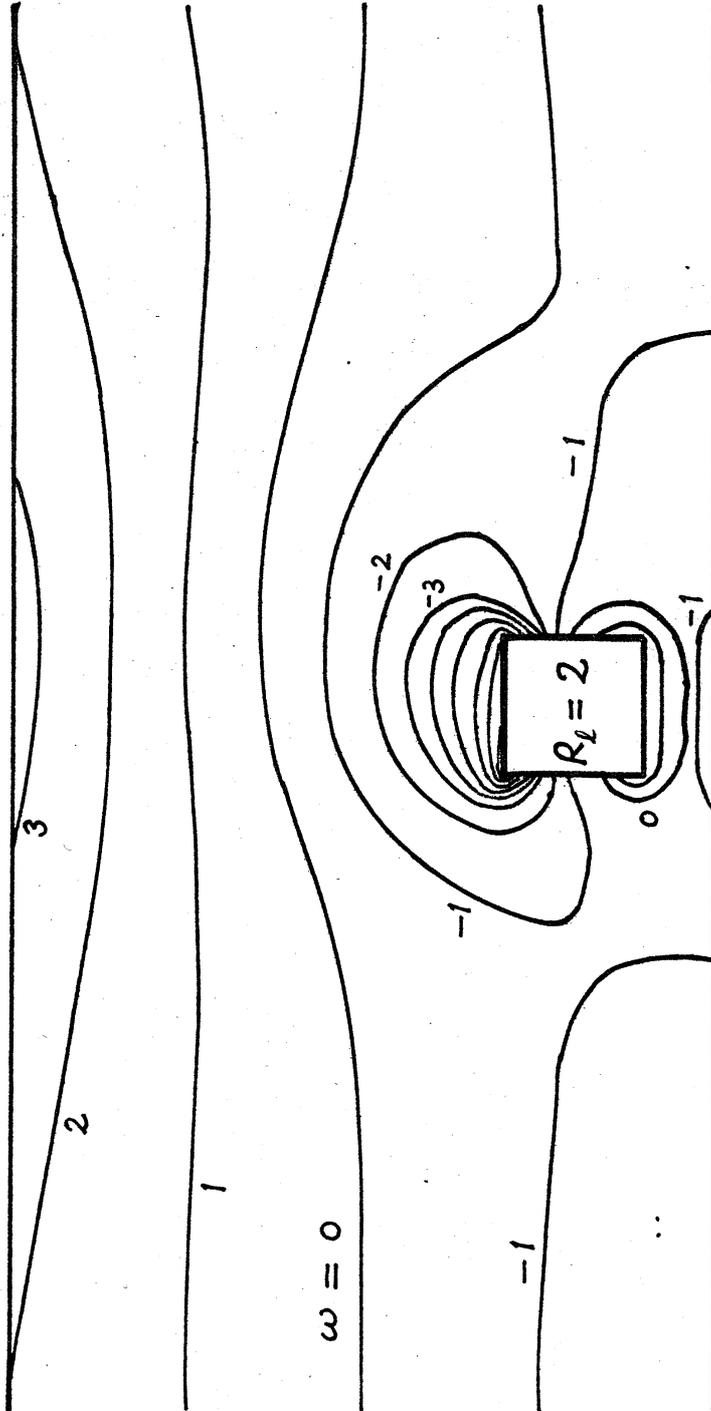


fig. 5(d)

Linioj de egalvorticeco

$$R_L = 2 \quad d/L = 0.6$$

$$\Psi = \frac{2}{3}$$

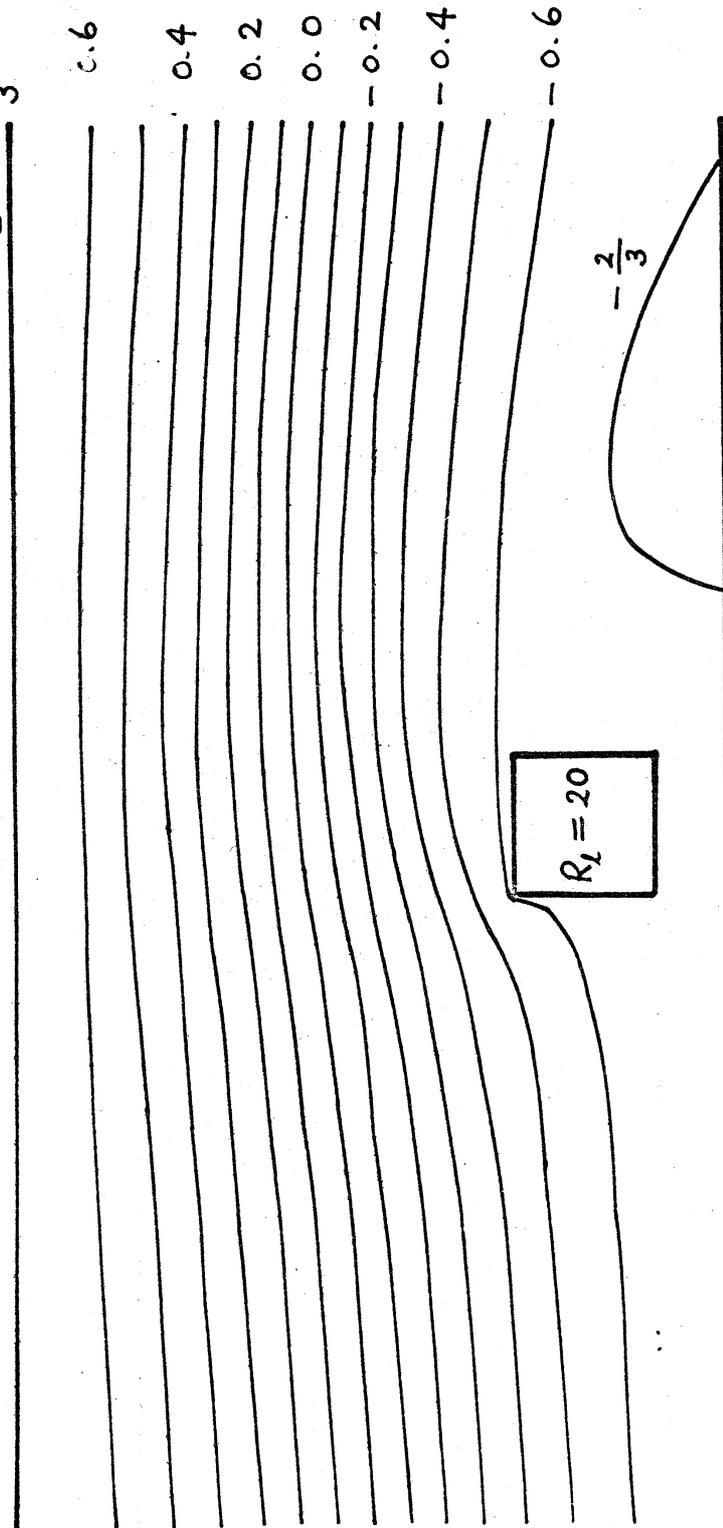


fig. 5(e)

Flulinioj

$$R_L = 20 \quad d/L = 0.6$$

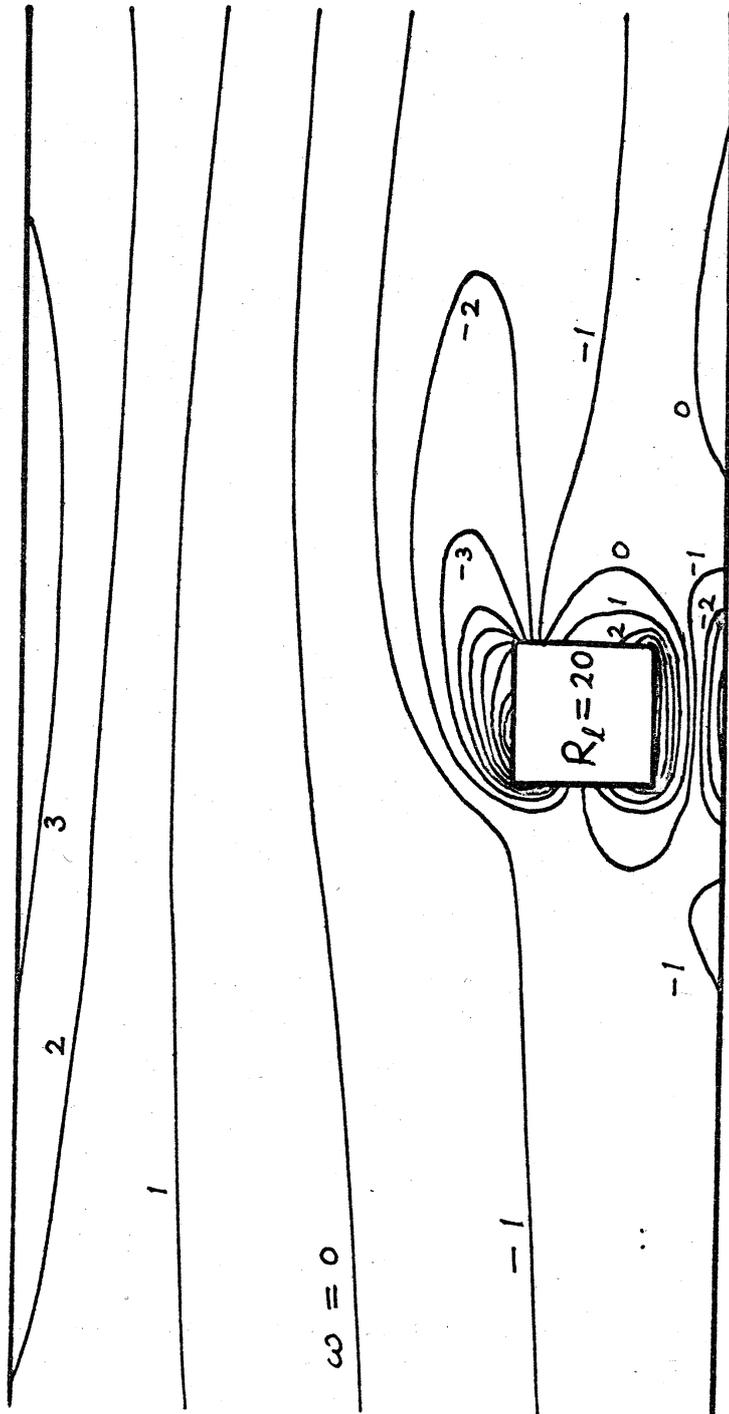


fig. 5(f)

Linioj de egalvorticeco

$R_L = 20$ $d/L = 0.6$

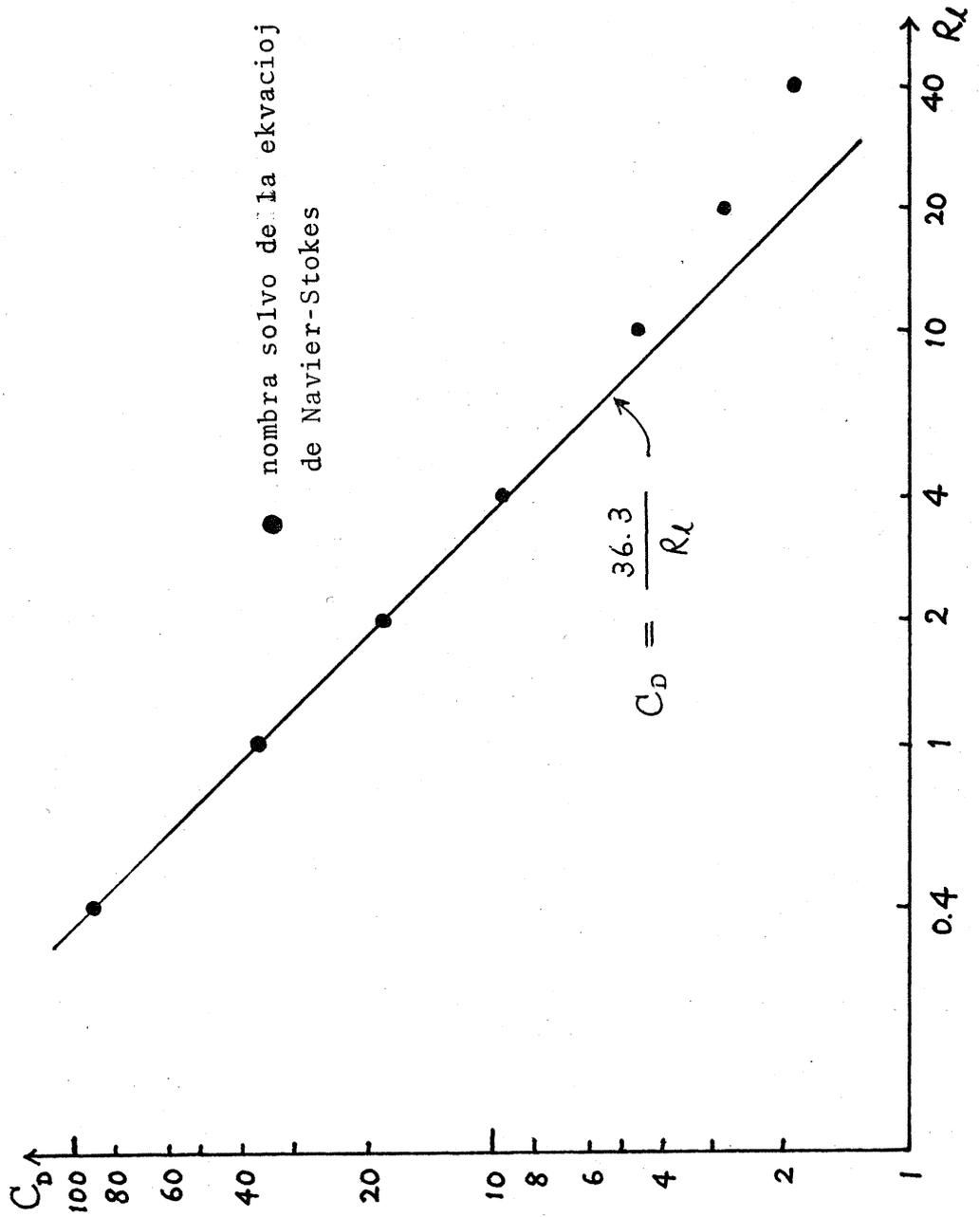


fig. 6

Koeficiente de trenforto. $d/L = 0$

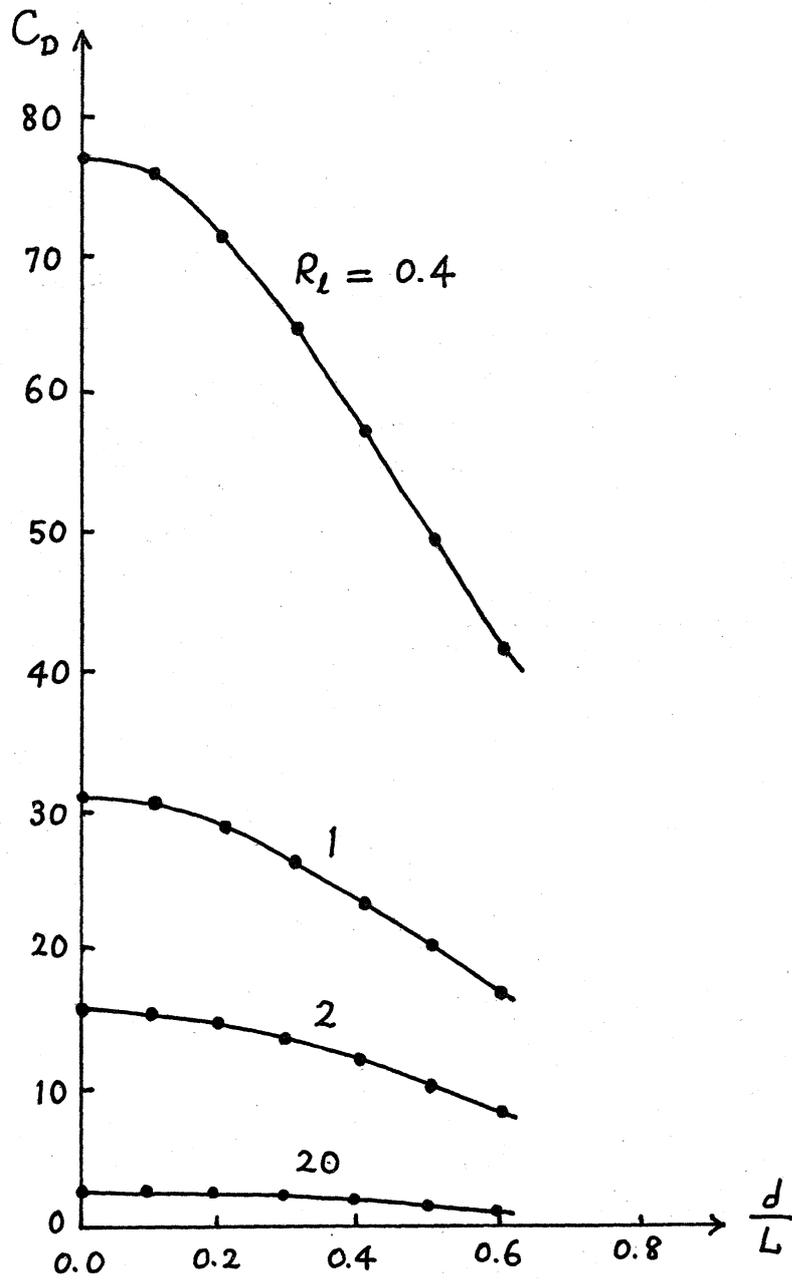


fig. 7

Koeficiente de trenforto
 kiel funkcio de d/L

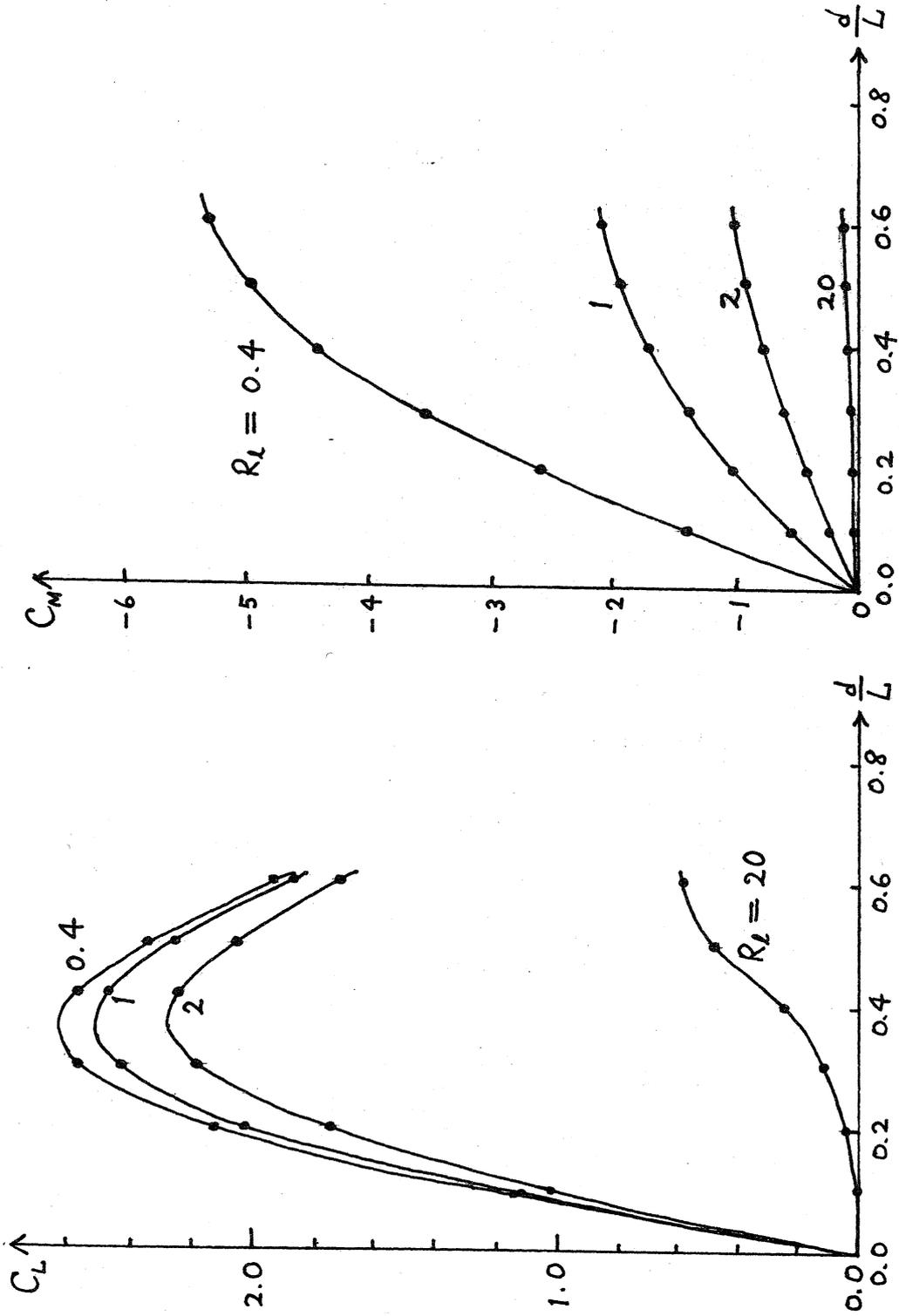
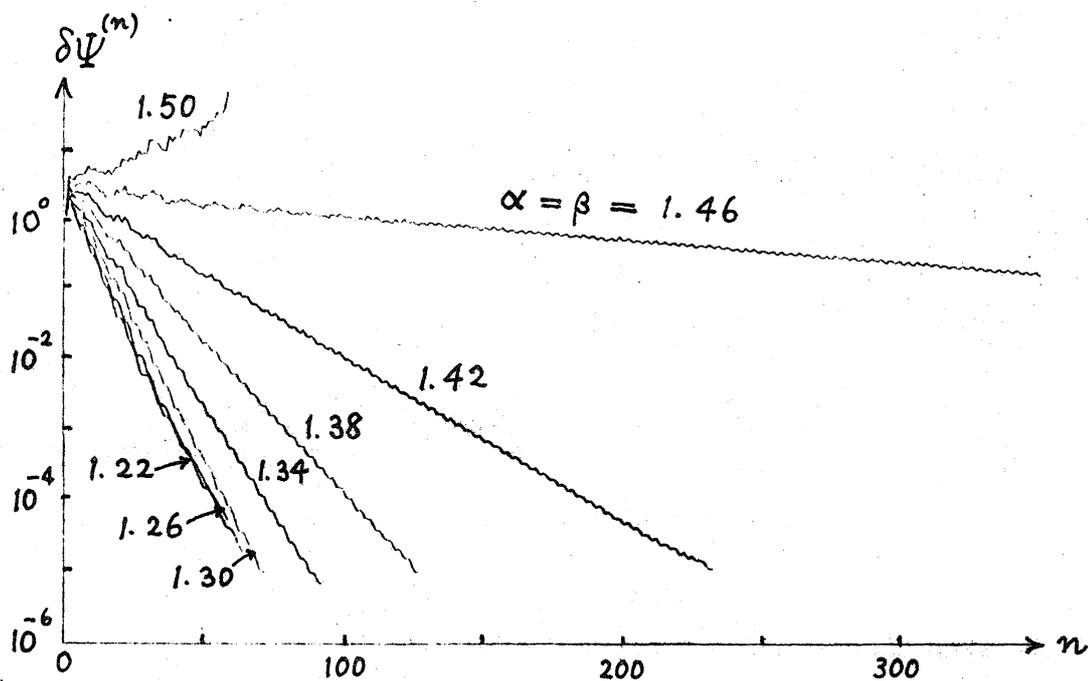


fig. 8

Koeficiente de levforto

fig. 9

Koeficiente de fortmomanto



$R_L = 2, \quad d/L_L = 0$
 $h = 0.2, \quad x_{\pm\infty} = \pm 1$
 $\varepsilon = 10^{-5}$

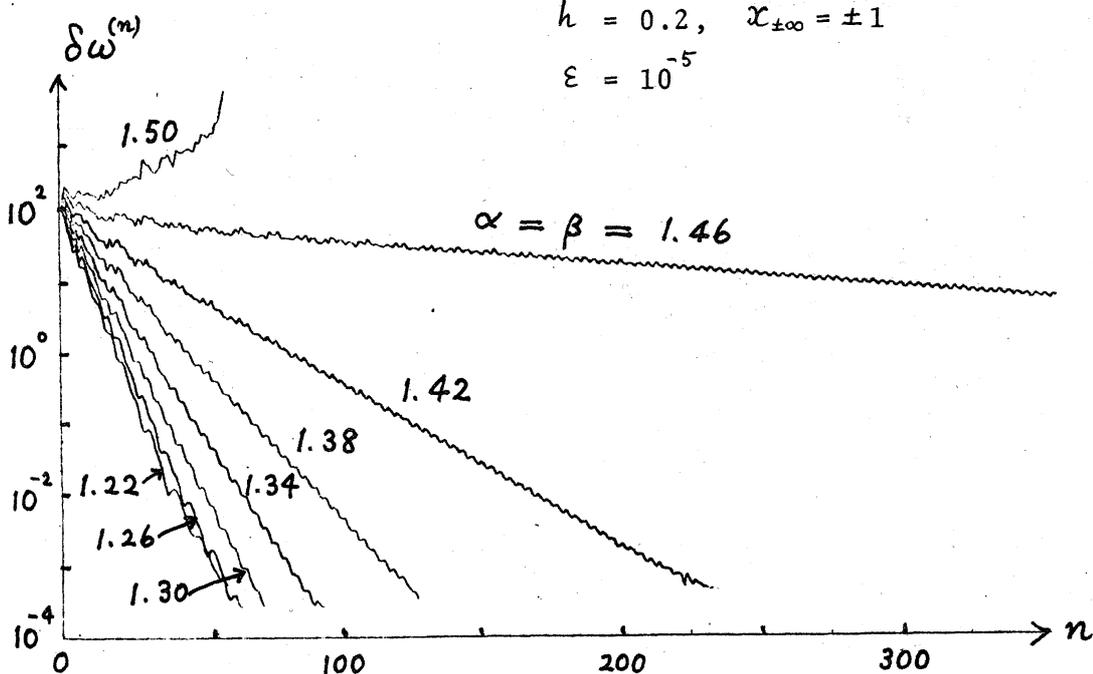


fig. 10

Maniero de malkreskado de la grandoj de korektiĝo por Ψ kaj ω . Komencvaloroj estas tiuj de Poiseuille'a fluo.

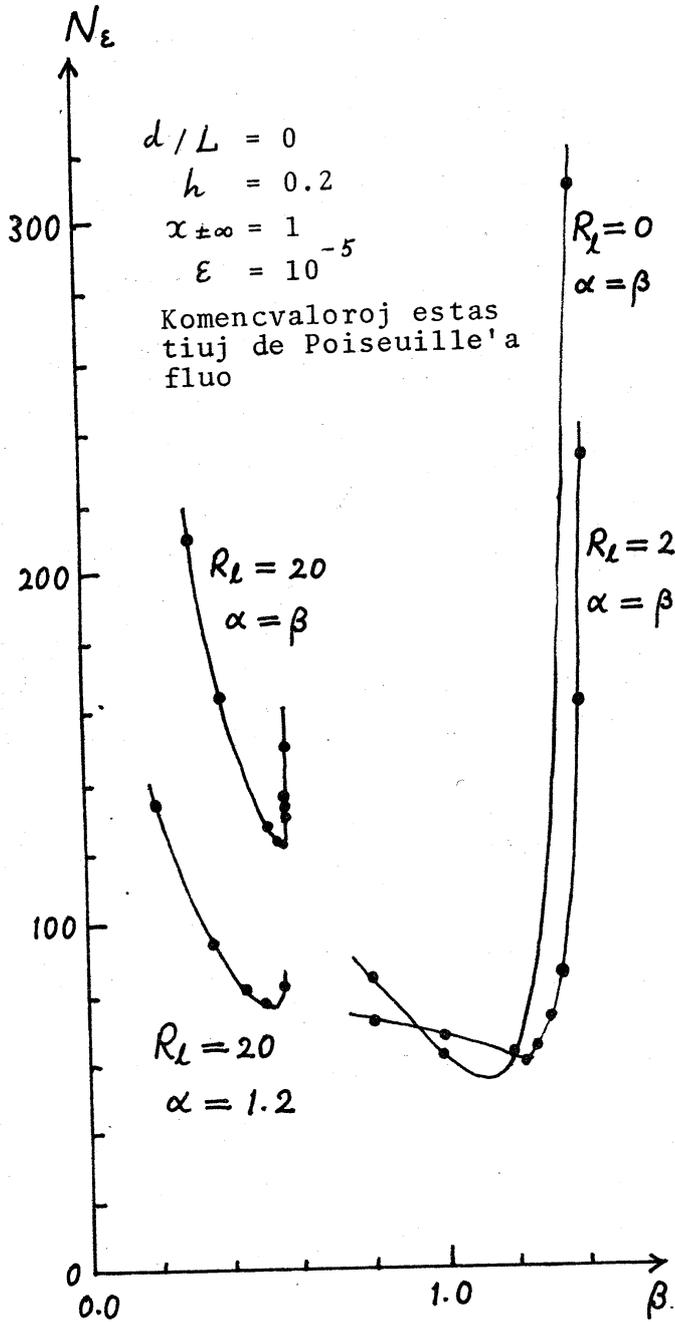


fig. 11

Rilato inter la rapido de konverĝo kaj la parametroj α kaj β .

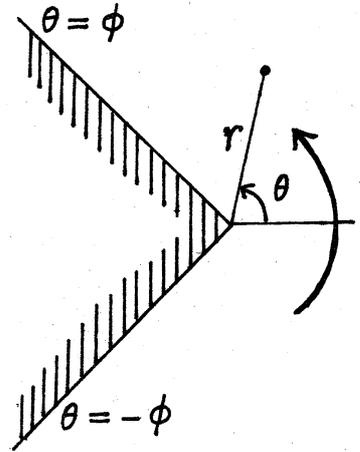


fig. 12

Fluo ĉirkaŭ angulo de granda $2(\pi - \phi)$

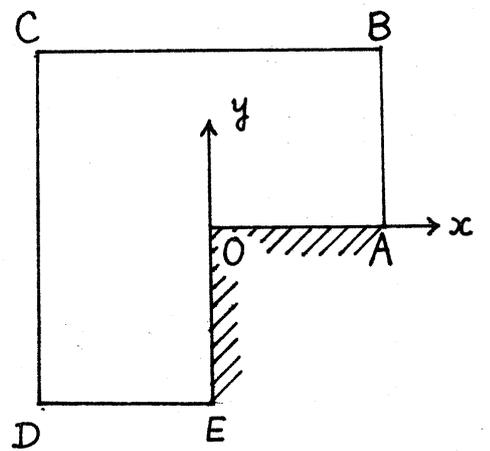


fig. 13

Limvalora problemo de la ekvacioj de Stokes pri la interna regiono OABCDE.

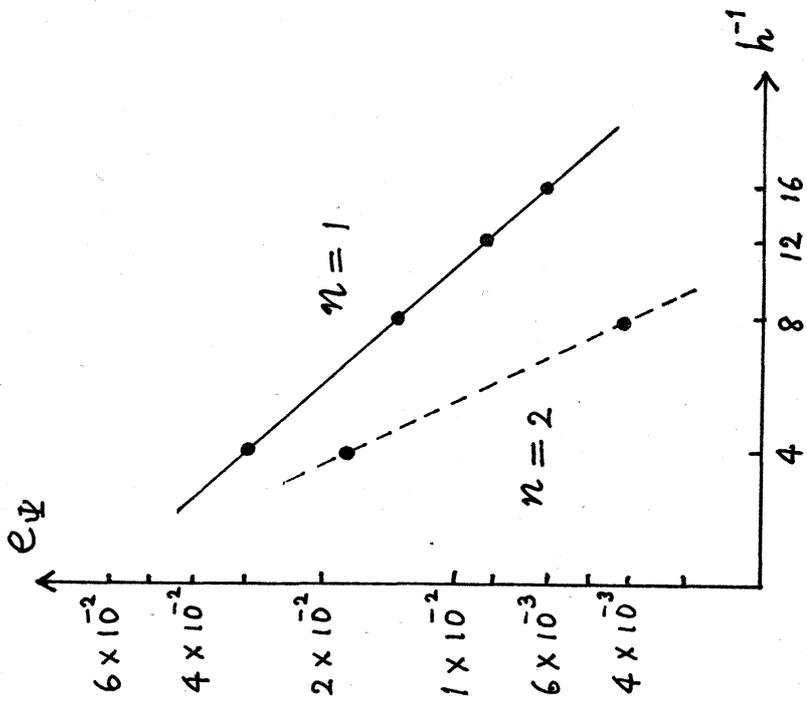
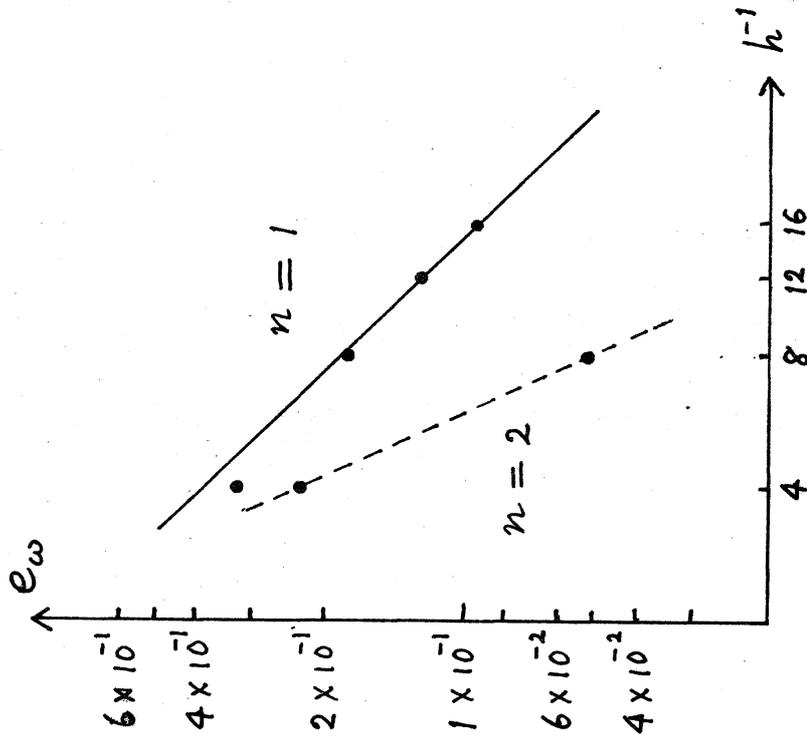


fig. 14

Ekartoj por Ψ kaj ω malgrandiĝas kun malkreskanta h kiel $O(h^\nu)$, kie $\nu \cong 1.1$ pri la speciala solvo por $n = 1$ kaj $\nu \cong 2$ pri tiu por $n = 2$.