

Nonparametric two-sample  
tests について

熊本大 理 田村 亮二

§1. 序

2標本問題とは、2つの cdf  $F(x), G(x)$  からの標本  $X_1, \dots, X_m; Y_1, \dots, Y_n$  に基いて、帰無仮説  $H_0: F(x) \equiv G(x)$  を検定する問題であることは良く知られている。F, G には必要に応じて、連続性とか、更に強いところの確率密度の絶対連続と Fisher の情報量の存在等を仮定する。2標本問題で用いられる統計量を適当に拡張したり、修正したりすることによって、多標本-多変量検定、多重比較、更に censored samples による手法に適用されるし、1標本問題も2標本問題として形式化しなよすことができる場合が多いという意味で、2標本問題は Nonparametric statistics において最も基本的でかつ重要な分野であろう。

さて、2標本問題は確率模型の仮定の仕方とか対立仮説の取り方によって、異なる手法を生ずる。 §2 では典型的な

模型, 対立仮説の下で, Bell等による asymptotic minimax procedures についての結果を紹介し, §3において, location と scale に対する rank tests の class について論述する.

## §2. Asymptotically minimax procedures.

この節では次の3つの対立仮説  $K_1, K_2, K_3$  について考察する.

$K_1$ :  $Y$  は  $X$  より確率的に大である. これは

$$G(x) < F(x) \text{ とおけるが, この意味は } G(x) \leq F(x), \forall x$$

として  $G(x) < F(x)$ , 正の measure の集合の上で.

定理. ([1], [2] 参照)

$$\Omega(\Delta) = \left\{ (F, G) \mid G(x) < F(x), \sup_x [F(x) - G(x)] \geq \Delta, \right. \\ \left. F(x) : \text{連続} \right\}$$

$$\mathcal{T} = \left\{ \text{rank tests } \phi \text{ of level } \alpha \mid mT_N = \sum_{i=1}^m F_N\left(\frac{r_i}{N+1}\right), \right.$$

棄却域:  $T_N < z_\alpha$ ,  $r_i$  は combined sample における  $X_i$

の rank,  $N = m+n$ ,  $F_N$  は Chernoff-Savage の条件

$$\text{を満たし, } F_N(t) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} F(t), 0 < t < 1 \left. \right\}$$

$\beta_\phi(F, G)$  = test  $\phi$  の power.

$$\varphi_0: \text{Wilcoxon test, 可及ならば } mT_N^{\varphi_0} = \sum_{i=1}^m r_i / (N+1).$$

$\Delta_N N^{\frac{1}{4}} \rightarrow c(>0)$  ならば  $\varphi_0$  は  $\Omega(\Delta_N)$ ,  $\mathcal{T}$  の上で

asymptotically minimax である.

$$\sup_{\mathcal{J}} \liminf_N \inf_{\Omega(\Delta_N)} \beta_{\varphi}(F, G) = \liminf_N \inf_{\Omega(\Delta_N)} \beta_{\varphi_0}(F, G).$$

この証明は [2] にのべられている。また 1 標本問題については上と同様な定理が [3] にある。

$K_2$  :  $P_n(X < Y) > P_n(X > Y)$ . これは

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) dG(x) = p \text{ と } p < \frac{1}{2} \text{ と } p > \frac{1}{2} \text{ とかける.}$$

定理 ([4] 参照)

$$\Omega(p) = \{ (F, G) \mid \int_{-\infty}^{\infty} F(x) dG(x) = p \}$$

$$\Omega^*(p_1) = \bigcup_{p \geq p_1} \Omega(p), \quad p_1 > \frac{1}{2}$$

$\mathcal{J}^* = \{ \text{test } \phi \text{ of level } \alpha \}$ ,  $\varphi_0$  : Wilcoxon test

$$\alpha < \liminf_N \inf_{\Omega^*(p_1)} \beta_{\varphi_0}(F, G) = \beta < 1 \text{ なる } p_1 \text{ に対して}$$

$\varphi_0$  は  $\Omega^*(p_1)$ ,  $\mathcal{J}^*$  の上で asymptotically minimax である。

$$\sup_{\mathcal{J}^*} \liminf_N \inf_{\Omega^*(p_1)} \beta_{\varphi}(F, G) = \liminf_N \inf_{\Omega^*(p_1)} \beta_{\varphi_0}(F, G).$$

$K_3$  :  $G(x) = F(x - \Delta)$  という model を仮定したとき,  
 $\Delta > 0$  (または  $\Delta < 0$ ,  $\Delta \neq 0$  等も考えられる)。

この問題は location problem とか shift problem と呼ばれる、多くの研究がこの問題に集中している。その理由は、この model では漸近相対効率という物指して、検定方式 (φ) の比較ができるからであろう。同じような意味であるが、局所的

最強力, 漸近的最強力順位検定の理論もでき上がっている.

asymptotically minimax については次の定理がある.

定理 ([2])

$$\Gamma(\Delta, \sigma) = \{(F, G) \mid G(x) \leq F(x-\Delta), \sigma_F^2 \leq \sigma\}$$

$$\varphi_1 : \text{Normal scores test, } mT_N = \sum_{i=1}^m E[Z(r_i) | \Phi]$$

$Z(1) < \dots < Z(N) : N(0,1)$  (cdf重)  $\sigma$  の  
順序統計量

$\Delta_N N^{\frac{1}{2}} \rightarrow c (>0)$  ならば " $\varphi_1$  は  $\Gamma(\Delta_N, \sigma)$ ,  $J^*$  の上での

asymptotically minimax である.

$$\sup_{J^*} \inf_{\Gamma(\Delta_N, \sigma)} \lim_N \beta_{\varphi} (F, G) = \inf_{\Gamma(\Delta_N, \sigma)} \lim_N \beta_{\varphi_1} (F, G).$$

$K_3$  と同様な model として  $G(x) = F(\frac{x}{\sigma})$  といふ scale problem について多くの procedures が議論されているが minimax については知られていない.

§3. Location and scale problem.

§2 の  $K_3$  は  $F(x)$ ,  $G(x)$  は分布関数として同じ型で location parameter のみ異なるという model であるが,  $F, G$  が同じ型であるということは, 実際的に納得のゆく場合は多いと思われる. しかし scale parameter まで同じという仮定は強すぎる場合は多いだろう.  $K_3$  より少し一般的な model  $G(x) = F(\frac{x-\theta}{\sigma})$  で考えてみよう. このとき,  $H_0$  は

$\theta=0, \sigma=1$  と取り, 対立仮説  $K: \theta>0, \sigma>1$ .

この検定問題に対して location tests である Wilcoxon, Normal scores tests 等は効率の良, 不良はともかくとして, 一定考えることができる。(棄却域は  $K_3$  のときと同じ)

しかし  $K$  の中に  $\sigma$  の命題が入っているので, scale problem に対する配慮も必要になる。このことは次の事実から分る。

combined sample において  $i$  番最小値が  $X$  ( $Y$ ) のとき  $Z_{N,i} = 1$  ( $0$ )  $i=1, \dots, N$  なる確率変数,  $Z_{N,i}$  ( $i=1, \dots, N$ ) は 1 または 0 にとり,  $N$  個のうち  $m$  個だけが 1.

例之は Lehmann<sup>[6]</sup> にも記載されている如く,

$$Pr [ Z_{N,i} = z_{N,i}, i=1, \dots, N ] = \binom{N}{n}^{-1} E \left[ \prod_{i=1}^N \left\{ \frac{g(V_N^{(i)})}{f(V_N^{(i)})} \right\}^{1-z_{N,i}} \right]$$

$V_N^{(1)} < \dots < V_N^{(N)}$  :  $F(x)$  からの 順序統計量

$$g(x) = \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right)$$

$H_0$  の下では上の値は  $\binom{N}{n}^{-1}$ ,  $K$  の下での値は  $P(\theta, \sigma)$  とおく。

$$P(\theta, \sigma) = \binom{N}{n}^{-1} \left\{ 1 - \theta \sum_{i=1}^N z_{N,i} E \left[ \frac{f(V_N^{(i)})}{f(V_N^{(i)})} \right] - (\sigma-1) \sum_{i=1}^N z_{N,i} \times E \left[ -1 - V_N^{(i)} \frac{f'(V_N^{(i)})}{f(V_N^{(i)})} \right] + o(\theta, \sigma-1) \right\}.$$

$\theta, \sigma-1$  が十分小さいところでは,

$$\theta \sum_{i=1}^N z_{N,i} E \left[ \frac{f(V_N^{(i)})}{f(V_N^{(i)})} \right] + (\sigma-1) \sum_{i=1}^N z_{N,i} E \left[ -1 - V_N^{(i)} \frac{f'(V_N^{(i)})}{f(V_N^{(i)})} \right]$$

が小さいとき  $P(\theta, \sigma)$  は大きくなる。しかもこの式の

$$\sum_{i=1}^N z_{N,i} E \left[ -\frac{f'(\bar{v}_N^{(i)})}{f(\bar{v}_N^{(i)})} \right], \quad \sum_{i=1}^N z_{N,i} E \left[ -1 - \bar{v}_N^{(i)} \frac{f'(\bar{v}_N^{(i)})}{f(\bar{v}_N^{(i)})} \right] \quad \text{の } z_{N,i}$$

と  $z_{N,i}$  にかゝる統計量はそれぞれ, location および scale problem に対する test statistic である (Hájek [7]).

以上の議論から  $K$  に対する test statistics を定義する.

$$m T_{N,r} = \sum_{i=1}^N J_{N,r} \left( \frac{i}{N+1} \right) z_{N,i}, \quad r=1,2$$

$$J_{N,r}(t) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} J_r(t), \quad 0 < t < 1$$

$J_{N,r}$ ,  $J_r$  は Chernoff-Savage の条件を満たす. 更に

$J_{N,1}$  は location problem に対する weight function  $\times 1$ , 例之

は " $J_1(t)$  とし  $t$ ,  $\Phi^{-1}(t)$  を用いる. また  $J_{N,2}$  は scale

problem に対するものとして, 例之は " $(t - \frac{1}{2})^2$ ,  $\{\Phi^{-1}(t)\}^2$  等.

実際に用いる rank test statistic の class は

$$T_N = \sqrt{\frac{N}{2}} \left\{ \frac{T_{N,1} - \mu_1}{\sigma_{N,1}} + \frac{T_{N,2} - \mu_2}{\sigma_{N,2}} \right\}$$

$$\mu_r = \int_0^1 J_r(t) dt$$

$$\sigma_{N,r}^2 = \frac{1 - \lambda_N}{\lambda_N} \left[ \int_0^1 J_r^2(t) dt - \left\{ \int_0^1 J_r(t) dt \right\}^2 \right], \quad r=1,2$$

$$\left( = \frac{1 - \lambda_N}{\lambda_N} \sigma_r^2 \text{ とおく} \right), \quad \lambda_N = \frac{m}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \lambda$$

棄却域は  $T_N \leq z_{N,2}$  (水準  $\alpha$ ).

$H_0$  に近い  $K$  として,  $K_N: \theta = \Delta/\sqrt{N}, \sigma = 1 + \delta/\sqrt{N}, \Delta, \delta > 0$

で表えていく。

定理.  $T_N$  の漸近分布は  $H_0$  では  $N(0, 1 + \sigma_{12})$ ,

$K_N$  では  $N(\mu, 1 + \sigma_{12})$ .

$$\sigma_{12} = \left[ \int_0^1 J_1(t) J_2(t) dt - \mu_1 \mu_2 \right] / \sigma_1 \sigma_2$$

$$\mu = -\sqrt{\frac{\lambda_0 \lambda}{2}} \sum_{r=1}^2 \frac{1}{\sigma_r} \left\{ \Delta \int_{-\infty}^{\infty} J_r'(F(x)) f^2(x) dx + \delta \int_{-\infty}^{\infty} x J_r'(F(x)) f^2(x) dx \right\}$$

証明.

$$T_N = \sqrt{N} \left[ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N J_N \left( \frac{i}{N+1} \right) Z_{N,i} - \mu_N \right]$$

$$J_N \left( \frac{i}{N+1} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \sum_{r=1}^2 \sigma_{N,r}^{-1} J_{N,r} \left( \frac{i}{N+1} \right) \right]$$

$$\mu_N = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r=1}^2 \sigma_{N,r}^{-1} \mu_r$$

Chernoff-Savage の定理より、結果が“得られる”、

$\sigma_{12}$  の計算は少々面倒である。Chernoff-Savage の  $\sigma_2^2$  と同様の方法で上の結果がえられる。

なお、 $\sigma_{12} = 0$  とする  $J_1(t)$  を求めると、

$$(i) \quad J_1(t) = t, \Phi^{-1}(t) \quad \text{と} \quad J_2(t) = (t - \frac{1}{2})^2, \{\Phi^{-1}(t)\}^2$$

(iii)  $F(x), G(x)$  は  $\alpha=0$  に因して対称な任意の分布関数とするとき、

$$J_1(x) = -\frac{f[F^{-1}(x)]}{f[F^{-1}(x)]}, \quad J_2(x) = -1 - G^{-1}(x) \frac{g[G^{-1}(x)]}{g[G^{-1}(x)]}$$

$(T_{N,1}, T_{N,2})$  は漸近的に2次元正規分布であるから、上のそれぞれ  $w_1, w_2$  の weight をもつた  $T_{N,1}, T_{N,2}$  は漸近的に独立となる。

$\sigma_{12} = 0$  とする  $T_N, \sigma \geq 1$  とし,  $T_N \leq T_{N,1}$  とする.

系.  $T_N, T_{N,1}$  (location problem における rank test statistics) による水準  $\alpha$  の rank tests の large sample powers  $\beta$  と  $\beta_1$  と

れ  $\beta(\Delta, \delta), \beta_1(\Delta, \delta)$  とおくと,

$$\beta(\Delta, \delta) = \Phi\left(z_\alpha + \sqrt{\frac{\lambda(\alpha)}{2}} \sum_{\sigma=1}^2 \frac{1}{\sigma} \left\{ \Delta \int_{-\infty}^{\infty} J_\sigma'(F(x)) f^2(x) dx \right. \right. \\ \left. \left. + \delta \int_{-\infty}^{\infty} x J_\sigma'(F(x)) f^2(x) dx \right\} \right)$$

$$\beta_1(\Delta, \delta) = \Phi\left(z_\alpha + \sqrt{\lambda(\alpha)} \frac{1}{\sigma_1} \left\{ \Delta \int_{-\infty}^{\infty} J_{\sigma_1}'(F(x)) f^2(x) dx \right. \right. \\ \left. \left. + \delta \int_{-\infty}^{\infty} x J_{\sigma_1}'(F(x)) f^2(x) dx \right\} \right) \\ \Phi(z_\alpha) = \alpha.$$

証明.  $\beta(\Delta, \delta)$  は上の定理から容易に得られる.

$F(x) = \Phi(x)$  のとき,  $\beta(\Delta, \delta)$  と  $\beta_1(\Delta, \delta)$  の比較をする.

(i)  $J_1(x) = \Phi^{-1}(x)$ ,  $J_2(x) = \{\Phi^{-1}(x)\}^2$  とすれば,

$$\beta(\Delta, \delta) \geq \beta_1(\Delta, \delta) \Leftrightarrow \frac{\delta}{\Delta} \geq 0.293.$$

(ii)  $J_1(x) = x$ ,  $J_2(x) = (x - \frac{1}{2})^2$  とすれば

$$\beta(\Delta, \delta) \geq \beta_1(\Delta, \delta) \Leftrightarrow \frac{\delta}{\Delta} \geq 0.327.$$

$\frac{\delta}{\Delta}$  が 0 に近くなりときは,  $T_{N,1}$  による検定よりも scale parameter のことも考慮に入れ  $T_N$  による検定の方が large sample power は大きいという 1 つの例である.

最後に  $G(x) = F\left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right)$  という model をおいて, われわれの関心が  $\theta = 0$  か否かということにあるとすれば, 2 標本



問題ではなくなりが、いわゆる Behrens-Fisher の問題の一般化となる。これについては余り知られていない。

### 文 献

- [1] Bell, Moses, Thompson (1966) : Goodness criteria for two-sample distribution-free tests. *AMS.* 37. 133-142
- [2] Doksum (1966) : Asymptotically minimax distribution-free procedures. *AMS.* 37. 619-628
- [3] Doksum, Thompson (1971) : Power bounds and asymptotic minimax results for one-sample rank tests. *AMS.* 42. 12-34
- [4] Holm (1971) : On non-parametric asymptotically minimax tests. *AMS.* 42. 497-508
- [5] Chernoff, Savage (1958) : Asymptotic normality and efficiency of certain nonparametric test statistics. *AMS.* 29. 972-994
- [6] Lehmann (1959) : *Testing statistical hypothesis.* J. Wiley
- [7] Hájek, Šidák (1967) : *Theory of rank tests.* Academic Press.