数理解析研究所講究録
第169巻 1972年 1-16

p-setによるfunction algebraの分解について

北大 理　林 実樹広

§1. 序

Šilovが[6]においてfunction algebraのantisymmetricなものへの分解を試み, Bishop[2], Glicksberg[4]が一応これに成功した. しかし, その方法はmaximal antisymmetric分解を越えて更に細い分解に使えることがArenson[1], 西沢[5]によって示された。ここでは, これら二つの方法の関係を$C(X)$のclosed subspaceに拡張して述べ, ついでfunction algebraの場合について述べる. とくに§4ではmaximal antisymmetric分解とそれよりも細い分解の差が位相的なものであること, また§5では$R(X)$の場合についてantisymetricなもので更に細かく分解する例を上げる.

<u>記号及び言葉の定義</u>　Xをかってな集合, $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}_\alpha$はXのsubsetからなる族とする。二つの族$\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$について

$$\forall E_1 \in \mathscr{E}_1 \Rightarrow E_1 \subset E_2 \text{ となる } \exists E_2 \in \mathscr{E}_2$$

となっているとき，"$\mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_2$"と書き，$\mathcal{E}_1$は$\mathcal{E}_2$よりも細い，又は$\mathcal{E}_2$は$\mathcal{E}_1$よりも粗いという．更に$\mathcal{E}_2 < \mathcal{E}_1$も成立するときは，$\mathcal{E}_1$と$\mathcal{E}_2$は"同値な族"であるということにする．$\mathcal{E}_\alpha$の族$\{\mathcal{E}_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$に対して

$$\bigwedge_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{E}_\alpha = \{ \bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} E_\alpha : \quad E_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha \}$$

とおいて，これを"$\{\mathcal{E}_\alpha\}$の共通分族"という．

$\mathfrak{M}$をXのsubsetからなる他の族として，subset Sが次の性質

$$S \cap M \neq \phi \ , \ M \in \mathfrak{M} \Longrightarrow \quad M \subset S$$

をみたすとき，Sは"$\mathfrak{M}$で充満しているといい，族$\mathcal{E}$の各元が$\mathfrak{M}$で充満しているとき，"族$\mathcal{E}$が$\mathfrak{M}$で充満している"ということにする．次の性質は明らか

1] $\mathcal{E}_\alpha$がXの分割 $\Longrightarrow$ $\bigwedge_\alpha \mathcal{E}_\alpha$も$X$の分割

2] $\mathcal{E}_\alpha \succ \mathfrak{M}$ $\Longrightarrow$ $\bigwedge_\alpha \mathcal{E}_\alpha \succ \mathfrak{M}$

3] $\mathcal{E}_\alpha$が$\mathfrak{M}$で充満している $\Longrightarrow$ $\bigwedge_\alpha \mathcal{E}_\alpha$も$\mathfrak{M}$で充満している

4] $\mathcal{E}$がXの分割となっているときは，

$$\mathcal{E}\text{が}\mathfrak{M}\text{で充満している} \Longleftrightarrow \mathcal{E} \succ \mathfrak{M}$$

以下つねにXはcompact Hausdorff空間として，X上の連続複素数値関数の全体を$C(X)$，Bを$C(X)$のclosed subspaceとしておく．更に次の記号を用いる．

$M(X)$: X 上の有界正則 Borel measure の全体

$B^{\perp}$: B の anihirator の全体 $\subset M(X)$

$b(B^{\perp})$: $B^{\perp}$ の unit ball

$b(B^{\perp})^e$: $b(B^{\perp})$ の端点の全体

また E を X の closed set として

$M(E)$: $M(X)$ のうち E に support をもつものの全体

$B|_E$: B の E への制限全体 $= \{ f|_E \,;\, f \in B \}$

B_E : $B|_E$ の $C(E)$ における uniform closure

μ_E : $\mu \in M(X)$ を E に切ったもの $= \chi_E \mu$

§2. $C(X)$ の closed subspace の分解

B を $C(X)$ の closed subspace, $\mathcal{E}$ を X の closed set からなる族として次の性質を考える.

(D) : $f \in C(X)$, $f|_E \in B_E$ ($^\forall E \in \mathcal{E}$) $\Rightarrow$ $f \in B$

(BN) : $\mu \in b(B^{\perp})$, $f \in C(X)$, $\mu(f) \neq 0$ $\Rightarrow$ $^\exists E \in \mathcal{E}$, $^\exists \nu \in b(B^{\perp})$

s.t. $|\nu(f)| \geq |\mu(f)|$, $\mathrm{supp}(\nu) \subset \mathrm{supp}(\mu) \cap E$

(GA) : $\mu \in b(B^{\perp})^e$ $\Rightarrow$ $^\exists E \in \mathcal{E}$ s.t. $E \supset \mathrm{supp}(\mu)$

B に含まれる関数 f は, すべて $f|_E \in B_E$ となっており, (D) は逆に, $f_E \in B_E$ ($^\forall E \in \mathcal{E}$) が, X 上連続につながって一つの関数 $f \in C(X)$ が定まれば, $f \in B$ となる. つまり B_E を X 上連続に貼り合せたものが B であることを主張する. この意味で,

Bは$\{B_E\}$に分解していると考えるのである.

(GA), (BN)は明らかに(D)よりも強い条件である。以下では, (GA) $\Rightarrow$ (BN)となること, (GA)及び(BN)については, ある意味で最も細い分解の存在することを示す.

$\mathcal{E}_1 \prec \mathcal{E}_2$ のとき, $\mathcal{E}_1$ が性質(D), (BN)または(GA)のいずれかをみたせば, $\mathcal{E}_2$ も同じ性質をみたすことがすぐわかる. また $\mathcal{E}$ が(GA)をみたすための条件は $\mathcal{E} \succ \{\mathrm{supp}(\mu)\ ;\ \mu \in b(B^\perp)^e\}$ となることである. よって§1に述べたことから

$$\mathcal{E}_{GA} = \bigwedge \{\mathcal{E}\ ;\ \mathcal{E}\text{は(GA)をみたす closed set の族}\}$$

$$\mathcal{E}^*_{GA} = \bigwedge \left\{\mathcal{E}\ :\ \begin{array}{l}\mathcal{E}\text{は(GA)をみたす closed set の族}\\ \text{でXの分割となっている}\end{array}\right\}$$

とおけば, $\mathcal{E}_{GA}$, $\mathcal{E}^*_{GA}$ も性質(GA)をみたす. よって $\mathcal{E}_{GA}$ は(GA)をみたす最も細い(といっても $\{\mathrm{supp}(\mu) : \mu \in b(B^\perp)^e\}$ と同値な族である)族であり, $\mathcal{E}^*_{GA}$ は(GA)をみたす最も細いXの分割である. 同じことが(BN)についても成立する.

<u>補題1</u> EをXの closed set として

$$B_E^\perp = B^\perp \cap M(E), \quad b(B_E^\perp)^e = b(B^\perp)^e \cap M(E)$$

(証明) $b(B_E^\perp)^e \subset b(B_E^\perp)^e \cap M(E)$ を除いては容易にわかる. これを証明するには $B \neq C(X)$ のときを考えればよい. $\mu \in b(B_E^\perp)^e$ とすれば $\mu \in b(B^\perp) \cap M(E)$ である. よって $\nu, \lambda \in b(B^\perp)$, $0<t<1$ として $\mu = t\nu + (1-t)\lambda$ と書けたとすれば,

$$\mu = \mu_E = t\nu_E + (1-t)\lambda_E$$

よって $\|\mu\| = 1 \leq t\|\nu_E\| + (1-t)\|\lambda_E\| \leq 1$ となるから $\|\nu_E\| = \|\lambda_E\| = 1$ つまり $\nu_E = \nu$, $\lambda_E = \lambda$ はいずれも $b(B_E^\perp)$ に含まれ, μ は端点であったから $\nu = \lambda = \mu$. 故に $\mu \in b(B^\perp)^e \cap M(E)$.

<u>補題2</u>　$\mathcal{E}$ が性質(BN)をみたすclosed setの族とすれば, Xの任意のclosed set S に対して, $\mathcal{E}_S$ は B_S に対して性質(BN)をみたす. ただし $\mathcal{E}_S = \{S \cap E : E \in \mathcal{E}\}$

<u>定理1</u>　$\{\mathcal{E}_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ を性質(BN)をみたす $\mathcal{E}_\alpha$ の族とすると, $\bigwedge_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathcal{E}_\alpha$ もまた性質(BN)をみたす.

(証明)　α を超限順序数として $\{\mathcal{E}_\alpha\}$ は整列されているものと考えてよい. 更に $\mathcal{E}_0 = \{X\}$ として $\alpha = 0$ のときも考える. そこで $\mathfrak{F}_\alpha = \bigwedge_{\beta<\alpha} \mathcal{E}_\alpha$ とおけば, 超限過程の切れるところで $\mathfrak{F}_\alpha$ は $\bigwedge_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathcal{E}_\alpha$ と一致する. よって各 α に対して $\mathfrak{F}_\alpha$ が(BN)をみたすことを示せばよい. $\mu \in b(B^\perp)$, $f \in C(X)$, $\mu(f) \neq 0$ とする. はじめに $\mu_\alpha \in b(B^\perp)$, $E_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha$ を次の性質をみたすように決める.

$$(\star)\begin{cases} \mu_0 = \mu \\ \beta < \alpha \Rightarrow \operatorname{supp}(\mu_\alpha) \subset \operatorname{supp}(\mu_\beta) \cap E_\beta, \quad |\mu_\alpha(f)| \geq |\mu_\beta(f)| \end{cases}$$

これは $\{\mu_\alpha\ (\alpha \leq \gamma),\ E_\alpha\ (\alpha < \gamma)\}$ に対して $(\star)$ をみたすようにできることを γ による超限帰納法で次のようにやる. $\gamma = 0$ のときは $\mu_0 = \mu$ として明らか. $\gamma' < \gamma$ なる γ' に対しては出来たとして, γ が直前の元 γ_0 をもつときには, $S = \bigcap_{\alpha<\gamma_0} E_\alpha$, μ_{γ_0}

及び $\mathcal{E}_{\gamma_0}$ に対して補題3を用いれば，(☆) をみたすような E_{γ_0} と μ_γ を定めることが出来る．γ が直前の元をもたなければ，μ_γ だけを定めればよく，$\{\mu_\alpha\}_{\alpha<\gamma}$ の w*-cluster point を取ればよい．こうして $\nu_\alpha=\mu_\alpha$，$F_\alpha=\bigcap_{\beta<\alpha}E_\alpha$ とおけば，

$F_\alpha\in\mathfrak{F}_\alpha$，$\nu_\alpha\in b(B^\perp)$，$|\nu_\alpha(f)|\geqq|\mu(f)|$，$supp(\nu_\alpha)\subset supp(\mu)\cap F_\alpha$

となっている（証明終）．

これより (GA) のときと同様に，(BN) をみたす $\mathcal{E}$ のすべての共通分族を $\mathcal{E}_{BN}$，分割に限ったときの共通分族を $\mathcal{E}_{BN}^*$ と書くことにする．このとき，族 $\mathcal{E}$ が性質 (BN) をみたすための条件は $\mathcal{E}\supset\mathcal{E}_{BN}$ となることである．

次に (GA) ⇒ (BN) を証明する．

<u>補題3</u>　$\mathcal{E}$ が (GA) をみたす closed set の族ならば，S を X の任意の closed set として，$\mathcal{E}_S$ は B_S について (GA) をみたす．

<u>定理2</u>　$\mathcal{E}$ が (GA) をみたすならば，(BN) をみたす．

（証明）$\mu\in b(B^\perp)$，$f\in C(X)$，$\mu(f)\neq 0$ とする．上の補題を $S=supp(\mu)$ のときに用いれば，$|\nu(f)|$ $(\nu\in b(B_S^\perp))$ の最大値は $\nu\in b(B^\perp)^e$ 上で取れ，今述べたことから ${}^\exists S\cap E\in\mathcal{E}_S$，$supp(\nu)\subset E\cap S$．すなわち，$|\nu(f)|\geqq|\mu(f)|$，$supp(\nu)\subset E\cap supp(\mu)$（証明終）

以上のことは，B に関する p-set（i.e. closed set E で，$\mu_E\in B^\perp$ for ${}^\forall\mu\in B^\perp$ となっているもの）からなる族 $\mathcal{P}$ を求

えても，p-set の共通分は再び p-set となることより全く同様に成立する．従って $\mathcal{P}_{GA}$, $\mathcal{P}_{GA}^*$, $\mathcal{P}_{BN}$, $\mathcal{P}_{BN}^*$ が定義される．なお function algebra の場合には，p-set とは peak set の共通分としてあらわせるものと同じことになる．更にこの場合は，$\mathcal{E}_{GA}^*$, $\mathcal{P}_{GA}^*$, $\mathcal{E}_{BN}^*$, $\mathcal{P}_{BN}^*$ はいずれも antisymmetric な集合から出来ている．

<u>Remark</u>　(GA) をみたす closed set による X の分割 $\mathcal{E}$ は，$b(B^\perp)^e$ の support で充満しているから，$\mathcal{E}$ の元がすべて G_δ-set であれば，$\mathcal{E}$ の元は p-set となっている（[4] Th 3.3）．とくに，X が metrizable の場合には $\mathcal{E}_{GA}^* = \mathcal{P}_{GA}^*$．

[Question]　$\mathcal{P}_{GA}^* = \mathcal{P}_{BN}^*$　?

<u>Remark</u>　性質 (D) は次のものと同値

$$(D'):\quad B^\perp = w^*\text{-closed linear span of } \bigcup_{E\in\mathcal{E}} B_E^\perp$$

ただし，(D) において "$f|_E \in B|_E$" としたのでは同値性は得られない．

<u>Remark</u>　定理 1 の証明は "$\mathrm{supp}(\nu) \subset \mathrm{supp}(\mu) \cap E$" となっていることが重要で，Bishop [2] は単に "$\mathrm{supp}(\nu) \subset E$" となっている．しかし，西沢 [5] は，Bishop が上の形をも証明していることに注目して，(BN) をみたす最も細い p-set 分割 $\mathcal{P}_{BN}^*$ を考えた．なお定理 1 は，$M(X)$ の w^*-compact convex set K を $b(B^\perp)$ の換りに考えることが出来る．しかし補題 3 は成立しないので (GA) ⇒

(BN) となることは証明出来ない.

<u>Remark</u> Arenson [1] は weakly analytic set なるものを考え, これで充満した最も細い closed set による分割を考えた. これは (GA) をみたしている. また antisymmetric function algebra で, 更にこの意味で細く分解される例を上げている. 従って定理2により (BN) をみたす p-set 分割 (X: metrizable) ともなっている. 後で $R(X)$ の場合について別な例を上げる.

§3. function algebra の分解

A を X 上の function algebra として, その maximal antisymmetric 分解を $\mathcal{K}$ とする. $\mathcal{K}$ は (GA) をみたす p-set 分割であるから, $\mathcal{K} \succ \mathcal{P}^*_{GA} \succ \mathcal{P}^*_{BN}$ となっている. E を X の closed set として, $\mathcal{M}(A)$ を maximal ideal space とするとき,

$$\widetilde{E} = \{\, a \in \mathcal{M}(A) : |\hat{f}(a)| \leq \|f\|_E \text{ for } {}^\forall f \in A \,\}$$

を E の A-convex hull という. ここで, $\hat{f}$ は f の Gelfand 変換を表わす. このとき $\mathcal{M}(A_E) = \widetilde{E}$ であり, 従って $a \in \widetilde{E}$ は

"a の表現 measure μ で $\mathrm{supp}(\mu) \subset E$ となるものが存在する"

と同値になる. ([L] §7.2)

そこで maximal antisymmetric 分解 $\mathcal{K}$ については次のことが知られている. ([L] §7.3)

a) $\tilde{\mathcal{K}}=\{\tilde{K}: K\in\mathcal{K}\}$ は $\hat{A}$ の $\mathcal{M}(A)$ 上での maximal antisymmetric分解と一致する．

b) $\tilde{K}$ は Gleason part で充満している．

b) については p-set を考えれば一般の場合にも云えるが，a) についてはいまのところ成功していないのでこの問題点についてのべる．

<u>補題4</u>　E を X の p-set とすれば，$a\in\tilde{E}$ に対するすべての表現 measure の support は E に含まれる．

<u>系1</u>　S を closed set，E を p-set として

$$E\cap S=\phi \quad\Rightarrow\quad \tilde{E}\cap\tilde{S}=\phi$$

<u>系2</u>　E を p-set とすれば，$\tilde{E}$ は Gleason part で充満している．

<u>定理3</u>．E，F をそれぞれ A 及び $\hat{A}$ に関する p-set とすれば，$\tilde{E}$ 及び $F\cap X$ はそれぞれ $\hat{A}$ 及び A に関する p-set で

$$\tilde{E}\cap X=E,\qquad \widetilde{F\cap X}=F$$

が成り立つ．よって A に関する p-set と $\hat{A}$ に関する p-set はこの対応で 1：1 に対応する．

(証明) はじめに peak set の場合に peaking function を用いて証明する．一般の場合は peak set の共通分としてやれば，補題2を用いて証明される．

<u>Remark</u> 補題4及び定理3の E に関する部分を除いては，

上記[L] に述べられている．

<u>定義</u>　§1の1] によって $\mathcal{M}(A)$ の p-set からなる最小の分割が存在し，これを $\{\hat{L}_a\}$ と書く．ただし，$\hat{L}_a$ は $a \in \mathcal{M}(A)$ を含む同値類とする．また $\hat{L}_a \cap X = L_a$ とおく．

<u>命題1</u>　L_a は次の性質をもつ

a) A_{L_a} は antisymmetric である．

b) $\{L_a\}$ は X の p-set による分割で，表現measure の support で充満した最も細いものとして特徴付けられる．

そこで $\mathcal{P}$ を X の p-set 分割とするとき，次は同値となる．

(i) $\tilde{\mathcal{P}} = \{\tilde{E} : E \in \mathcal{P}\}$ は $\mathcal{M}(A)$ の分割である．

(ii) $\mathcal{P} \succ \{L_a\}$

(iii) $\mathcal{P}$ は表現measure の support で充満している．

maximal antisymmetric 分解 $\mathcal{K}$ については，この条件は表現measure の support が antisymetric ということにより容易に得られたが，$\mathcal{P}^*_{GA}$ の場合でも $\tilde{\mathcal{P}}^*_{GA}$ が $\mathcal{M}(A)$ の中で dense となるかどうかどうかもわかない。しかし次の命題が成立する．

<u>命題2</u>　E を A の p-set とすれば，

a) μ : 表現 measure $\Longrightarrow$ $\mathrm{supp}(\mu) \subset E$ または $\mu(E) = 0$

b) $\mu \in b(A^{\perp})^e$ $\Longrightarrow$ $\mathrm{supp}(\mu) \subset E$ または $|\mu|(E) = 0$

<u>Remark</u>　a), b) いずれも $\mathrm{supp}(\mu)$ が weakly analytic という Arenson の結果の直接の証明となっている．従って Arenson の

考えたものは，$\mathcal{M}(A)$の分割となることを要求している．

よって(GA)をみたすp-set分割$\mathfrak{P}$で，$\bigcup_{P\in\mathfrak{P}}\tilde{P}$が$\mathcal{M}(A)$の分割にならないとすれば，補題3により$a\notin\bigcup\tilde{P}$なる$a$のminimal supportをもつ表現measure λ_aのsupportがXに等しいとして考えれば次の性質をもつ．　M_aはaの表現measureの全体とする．

a) $\lambda\in M_a \Rightarrow \mathrm{supp}(\lambda)=X,\quad \lambda(E)=0$ for $\forall E\in\mathfrak{P}$

b) $\mu\in b(A^{\perp})^e \Rightarrow \exists E\in\mathfrak{P},\ \mathrm{supp}(\mu)\subset E$

従って$\mathfrak{P}$は可算ではなく，更に$\mathfrak{P}$の元Eは内点をもつpeak setの共通分では表わされない．

[Question] p-set分割$\mathfrak{P}$が(GA)をみたすとするなら，$\tilde{\mathfrak{P}}$は，$\mathcal{M}(A)$の分割となるか？　また$\tilde{\mathfrak{P}}$は$\hat{A}$に関して(GA)をみたすか？

なお次のようなことはわかっている．

1] $\mathfrak{P}$をp-set族で，$\tilde{\mathfrak{P}}$が$\hat{A}$に関して(D)をみたすとき

$$\bigcup\tilde{\mathfrak{P}}=\mathcal{M}(A) \Rightarrow \mathfrak{P}\text{は(D)をみたす}$$

2] 1]で$\bigcup\tilde{\mathfrak{P}}\neq\mathcal{M}(A)$ならば反例がある．

3] $\mathfrak{P}$を(D)をみたすp-set族とするとき，

$$\tilde{\mathfrak{P}}\text{が}\hat{A}\text{で(D)をみたす} \Leftrightarrow \bigcup\tilde{\mathfrak{P}}\text{が}\hat{A}\text{のessential setでdense}$$

4] 3]で，たとえ$\mathfrak{P}$が(D)の分割であっても，$\bigcup\tilde{\mathfrak{P}}$が$\mathcal{M}(A)$のessential setでdenseとならない例がある．

§4. maximal antisymmetric分解と(H)-分解

すでに述べたように$\mathcal{E}^*_{BN}$, $\mathcal{E}^*_{GA}$などは$\mathcal{K}$よりも細いfunction algebraの分解となるが，以下ではこれが位相的なもので決定されることを述べる．このために新にclosed setの族$\mathcal{E}$に対して次の性質を考える．

(H)： Sを$\mathcal{E}$で充満した任意のp-setとすれば，$\mathcal{E}_S = \{E : E \subset S,\ E \in \mathcal{E}\}$は$A_S$に関して性質(D)をみたす．

補題2，定理2によって結局次の関係が得られる

$$\mathcal{K} \Rightarrow (GA) \Rightarrow (BN) \Rightarrow (H) \Rightarrow (D)$$

次にΔを一般の位相空間として，$C_R(\Delta)$をΔ上の連続実数値関数の全体，Δの2点δ_1，δ_2が$\mathcal{H}$-同値ということを

$$\forall f \in C_R(\Delta) \text{ に対して } f(\delta_1) = f(\delta_2)$$

によって定義する．この同値関係による商空間はHausdorffとなる．また各同値類はclosed setである．次に超限順序数αに対して，Δの分割$\mathcal{D}_\alpha = \{\Delta_a\}_{a \in \alpha}$を以下のように定める．

(i) $\alpha = 0$ のとき $\mathcal{D}_0 = \{\Delta\}$

(ii) αに直前の元βがあれば，$\mathcal{D}_\beta = \{\Delta_e\}_{e \in \mathcal{B}}$として，各$\Delta_e$を$\mathcal{H}$-同値関係により分割したものを$\{\Delta_{e,t}\}_t$として，これらをよせ集めた$\Delta$の分割を$\mathcal{D}_\alpha = \{\Delta_{e,t}\}_{e,t}$とする．

(iii) αに直前の元のないとき $\mathcal{D}_\alpha = \bigwedge_{\beta < \alpha} \mathcal{D}_\beta$とおく．

この超限過程はどこかで切れて$\mathcal{D}_\alpha=\mathcal{D}_{\alpha+1}$となるところがある。このとき$\alpha<\beta$であれば$\mathcal{D}_\alpha=\mathcal{D}_\beta$となるから，このような$\alpha$のうち最小の数を$\rho(\Delta)$と書く．$\alpha<\rho(\Delta)$に対しては，$\mathcal{D}_{\alpha+1}\subsetneqq\mathcal{D}_\alpha$となっている．また$\mathcal{D}_{\rho(\Delta)}=\{\Delta_p\}$として$C_R(\Delta_p)$はconstantのみからなっている．

<u>定理4</u>　$\mathcal{E}$を性質(H)をみたす，$\mathcal{K}$よりも細いclosed setによるXの分割とすれば，$\mathcal{E}$から定まるXの商空間をΔとして，Δの分割$\mathcal{D}_{\rho(\Delta)}$から定まるXの分割は$\mathcal{K}$と一致する．

(証明) まず$\mathcal{D}_\alpha$から定まるXの分割$\widetilde{\mathcal{D}}_\alpha=\{\widetilde{\Delta}_a\}_{a\in\mathfrak{A}}$ ($\xi: X\to\Delta$をquotient mapとして，$\widetilde{\Delta}_a=\xi^{-1}(\Delta_a)$とする) が$\mathcal{K}$よりも粗い$\mathcal{E}$で充満しているp-set族となることを超限帰納法により示める．このために仮定(H)が必要である．こうすれば，$\rho=\rho(\Delta)$として，$\widetilde{\mathcal{D}}_\rho$は$\mathcal{K}$よりも真に粗くはなれない。つまり$\widetilde{\Delta}_p$がantisymmetricでなければ，$\widetilde{\Delta}_p$上にnonconstantな実数値連続関数でAに含まれるものがあり，Δ_pの性質に反する (証明終)

<u>系</u>　$\mathcal{E}^*_{GA}$, $\mathcal{E}^*_{BN}$, $\mathcal{P}^*_{GA}$, $\mathcal{P}^*_{BN}$が$\mathcal{K}$と一致するためには，それぞれによるXの商空間Δにおいて，$\mathcal{D}_{\rho(\Delta)}$が1点からなる$\Delta$の分割となることが必要かつ十分．

§5.　R(X)について

ここではXは複素平面内のcompact setとしてX上に極そも

たない有理関数で一様近似されるX上の連続関数の全体R(X)を考える。

<u>定理5</u>　$\mathcal{E}_G = \{\bar{P} : P$ はR(X)のGleason part$\}$ は性質(GA)をみたすclosed setの族となる。

(証明)　$\mu \in b(R(X)^{\perp})^{e}$ とする。[G] Chap VI Th. 3.4 によって、

$$\mu = \Sigma \mu_n, \quad \mu_n \ll (\text{表現measure}\ \lambda_n), \quad \mu_n \perp \mu_m \ (n \neq m)$$

と分解されるが、端点であることから $\mu = \mu_{n_0}$ となる。よって

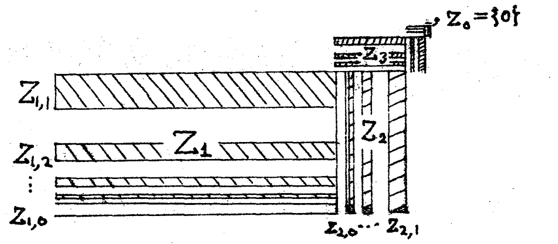
$$\mathrm{supp}(\mu) = \mathrm{supp}(\mu_{n_0}) \subset \mathrm{supp}(\lambda_{n_0}) \subset {}^{\exists}\bar{P} \quad (\text{証明終})$$

<u>系1</u>　Xの任意のp-setによる被覆$\mathcal{P}$は(GA)をみたす。とくに$\{L_a\}$は(GA)をみたす。

最後の部分は次のことからも導びかれる。

<u>命題3</u>　$\mu \in A^{\perp}$ ですべての表現measureに対してsingularなものが $\mu = 0$ に限るようなfunction algebraでは、$\{L_a\}$は(GA)をみたす。

最後にantisymmetricなfunction algebraで、更に(GA)をみたすp-setにより細く分解する例をR(X)について上げる。Xとして図の如きものを考える。たとえば次のように作くる。辺の比が2：1の矩形の底辺を$Z_{1,0}$として、あとは矩形の中に矩形$Z_{1,1}, Z_{1,2}, \cdots$を図の様に$Z_{1,0}$に収束する



ようにとる。このときできる図形を $Z_1=\bigcup_{n=0}^{\infty} Z_{1n}$ とする．次に Z_2 を Z_1 の相似形として，その長辺は Z_1 の短辺に等しいものとする．こうして Z_{2p} を Z_1 の短辺にはりつける．以下これを繰り返えして，最後に収束する点を o として $Z_0=\{o\}$ とおく．そうして $X=\bigcup_{m=0}^{\infty} Z_m$ とおく．このとき $Z_{i,n}$ ($n\neq 0$) はすべて peak set となり残りの X の点はすべて peak point となる．これを示すには，$\mathbb{C}\setminus X$ が connected より，$R(X)=A(X)=P(X)$ となっており，これと [G] Chap II Th.12.5 を用いて直接示してやる。従って $\{Z_{i,n}\}_{n\neq 0}$ とこれに含まれない点 $\{x\}$ によって X の peak set による分割となり，明らかに最も細いものすなわち $\{L_\alpha\}$ と一致している。しかも $R(X)$ が antisymmetric であることは容易に確かめることが出来る。

参考文献

[1] E. L. Arenson : Certain properties of algebras of continuous functions, Soviet Math. Dokl. 7 (1966) 1522-1524

[2] E. Bishop : A generalization of the Stone-Weierstrass theorem, Pac. J. Math. 11 (1961), 777-783

[3] de Branges : The Stone-Weierstrass theorem, Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), 822-824

[4] I. Glicksberg : Measures orthogonal to algebras

and sets of antisymmetry, Trans. Amer. Math. Soc. 105 (1962) 415-435

[5] 西沢清子 : C(X) の closed subalgebra $\mathfrak{A}$ の antisymmetric -decomposition について, 数学 20 (1968), 167-171

[6] G. E. Šilov : On rings of functions with uniform convergence, Ukrain. Mat. Z. 3 (1951) 404-411 (Russian)

[7] ——— : On certain problems of the general theory of commutative normed rings, Amer. Math. Soc. Transl (2) 16, 471-475 (Uspechi Mat. Nauk 12 (1957), 245-249)

[L] G. M. Leibowitz, Lectures on Complex Function Algebras, Scott, Foresman and Company (1970)

[G] T. W. Gamelin, Uniform Algebras, Prentice-Hall (1969)

[G-R-Š] Gelfand-Raikov-Shilov : Commutative Normed Rings, Chelsa (1964)