数理解析研究所講究録
第170巻 1973年 88-93

小平次元の加法公式について

名大理　中村　郁

以下扱うのは　コンパクトな複素多様体です。コンパクトな複素多様体 X の小平次元 (κ) は次の様に定義されます。X の canonical line bundle K (X を複素 n 次元とすれば　正則 n 型式の芽の層といってもよい) をとり　$P_m = \dim H^0(X, K^{\otimes m})$ とします. 任意の m に対して　$P_m = 0$ ならば　$\kappa(X) = -\infty$,
ある m_0 に対して　$P_{m_0} = 1$ で　任意の m に対して　$P_m \leqq 1$ ならば　$\kappa(X) = 0$ とします。次に　$\exists m_0$ に対して　$P_{m_0} \geqq 2$ となる場合は.

<u>定理(飯高)　$\exists \kappa > 0$ (integer), $\exists \alpha, \beta > 0$, 十分大な m_1</u>

<u>s.t.　$\alpha m^{\kappa} \geqq P_{m m_1} \geqq \beta m^{\kappa}$　for $\forall m > 0$</u>

によって　$\kappa(X) = \kappa$ とします. この κ は幾何学的には次のような意味をもちます. $H^0(X, \mathcal{O}(K^{\otimes m})) = \{\varphi_0, \cdots, \varphi_N\}$ (基底) $N+1 = P_m$
基底を一つ定めるごとに　有理写像

$$\Phi_{mK} : X \longrightarrow \mathbb{P}^N_{\mathbb{C}} \ (N\text{次元複素射影空間})$$

が定まります　即ち $x \longmapsto (\varphi_{0j}(x), \cdots \varphi_{Nj}(x)) \in \mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$ が well-defined. このとき　$\kappa = \max_m \dim \Phi_{mK}(X)$ となります

この κ に関しては 飯高さんの基本的結果がいくつかありますが 文献[1] を参照して頂くことにして ここでは省きます。P_m や κ は2次元(複素)の場合 分類上非常に重要な役割を果たしてきました。(実際 2次元の分類は P_m でなされるといってもよい位) 高次元の分類理論(に近い理論)を進めるにあたって 2次元までの結果を拡張してみようというのが基本的立場です ここでは 飯高さんの問題(それはしばしば否定的に解かれているが) で比較的肯定的に解かれた例を述べます. (X, F, B はコンパクト複素多様体)

問題 X を底を B, ファイバーを F とする解析的ファイバーバンドルとする そのとき $\kappa(X) = \kappa(B) + \kappa(F)$ か?

答は F が代数多様体なら正しく 一般の場合には反例がある (反例は飯高さんによる)

詳しくは

I. Nakamura and K. Ueno An addition formula for Kodaira dimensions of algebraic fiber bundle (to appear in J. Math Soc. Japan).

を参照して下さい.

※ V (コンパクト複素多様体) の双有理自己同型写像 g は 自然に $\underbrace{g^*}_{\text{同型写像}}$: $H^0(V\ \mathcal{O}(K_V^{\otimes m})) \longrightarrow H^0(V\ \mathcal{O}(K_V^{\otimes m}))$ を引き起こします

即ち　各 m に対して　準同型写像

$$\rho_m : Bim(V) \longrightarrow GL(H^0(V, \mathcal{O}(K_V^{\otimes m})))$$

が定義されます.

定理 1　V を代数多様体とすれば　任意の m, $g \in Bim V$ に対して　$\rho_m(g)$ は位数有限

ところで群論の結果

定理 (Schur)　$GL(N, \mathbb{C})$ の部分群が　有限生成かつ任意の元が位数有限ならば　実はその部分群は有限群.

から

系　X を F をファイバーとするファイバーバンドル（底 B: コンパクト）とする. G をこのファイバーバンドルの構造群（有限生成と仮定してよい）とする時　任意の m に対して　$\rho_m(G)$ は有限

この系により

定理 2.　X, B, F を前の通りとすれば

$$\kappa(X) = \kappa(B) + \kappa(F)$$　が成り立つ.

が証明されます.

定理 1 の証明のために

補題 1　$\rho_m(g)$ の固有値の絶対値は 1　（~~X~~ V 代数的と仮定しないでよい）

補題 2　$\rho_m(g)$ は対角化可能　（　〃　）

補題 3　$\rho_m(g)$ の固有値は代数的整数　（　〃　）

補題 4　X 代数的ならば　$\rho_m(g)$ の固有値は　1 の巾根

$\left.\begin{array}{l}\pi: \tilde{V} \to V \text{ 正則かつ全射写像} \\ \tilde{V}\text{の双有理同型写像 } \tilde{g}\end{array}\right\}$ とがあって

$$\begin{cases} \tilde{g}^*\omega = \beta\omega, \ \beta^m = \alpha \\ \omega^{\otimes m} = \varphi \end{cases}$$

とできる。を証明します。これより V に対する $m=1$ の場合と同様にして β は（従って α も）代数的整数が導かれる。詳しいことは省きますが、$\tilde{V}$ としては canonical line bundle の全空間 $\mathbb{K}$ に φ の零点として定義される部分空間の非特異モデルをとり、$\tilde{g}$ は g により $\mathbb{K}$ に自然に引き起こされる変換を（の制限）とります。

補題4の証明）補題1から補題3までは V の代数的なことを全く用いていませんが、ここでは用います。V が $\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$ に埋蔵されている場合に証明すればよいことが知られています（Moisezon の定理）。証明には整数論の良く知られた補題（定理?）

"α：代数的整数とする。α の $\mathbb{Q}$ 上の任意の共役の絶対値が 1 ならば α は 1 のベキ根"

従って $\rho_m(g)$ の 1 つの固有値 α に対して その共役 α^σ に対して 適当に 代数多様体 V^σ とその双有理写像 g^σ 及び $H^0(V^\sigma, \mathcal{O}(K_{V^\sigma}^{\otimes m}))$ の元 φ^σ で $(g^\sigma)^*\varphi^\sigma = \alpha^\sigma\varphi^\sigma$ となるものの存在を示せば すでに示した補題1より $|\alpha^\sigma| = 1$ となって証明がおわります。そのために V の $\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$ での定義式を

$f_1 = \cdots = f_\ell = 0$, とします。$f_i$ は多項式。

従って 補題2と補題4により $\rho_m(g)$ は有限位数が結論されます. また ここでは不要ですが 補題1と2を併せると $\mathrm{Bim}\,V$ の(単位元の)連結成分 $(\mathrm{Bim}\,V)^0$ に対して $\rho_m(\mathrm{Bim}(V)^0)=1$ となることもわかります

補題1の証明) $\varphi\in H^0(V\ \mathcal{O}(K_V^{\otimes m}))$ に対して ノルム $\|\ \|$ を次の様に定義する. $\varphi=\{\varphi_j(dz_j^1\wedge\cdots\wedge dz_j^n)^{\otimes m}\}$ とすると

$$\|\varphi\| = (\sqrt{-1})^{-n^2}\int_V |\varphi_j|^{\frac{2}{m}}\, dz_j^1\wedge\cdots\wedge dz_j^n\wedge d\bar{z}_j^1\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_j^n$$

明らかに $\|g^*\varphi\|=\|\varphi\|$. $\rho_m(g)$ の固有値の一つを α, α に対応する固有ベクトルを $\varphi\,(\neq 0)$ とすれば

$\|g^*\varphi\|=|\alpha|^{\frac{2}{m}}\|\varphi\|$, $\|\varphi\|>0$ 従って $|\alpha|=1$

補題2の証明) 上と同じノルムを用います. 今 $\rho_m(g)$ が対角化可能でないとすると $\varphi_1, \varphi_2\in H^0(V\ \mathcal{O}(K_V^{\otimes m}))$ $\varphi_i\neq 0$ で $g^*\varphi_1=\alpha\varphi_1+\varphi_2$, $g^*\varphi_2=\alpha\varphi_2$ となるものが存在します. $\|\varphi_1\|=\|(g^l)^*\varphi_1\|$ | (任意の整数 l に対して)

$(g^l)^*\varphi_1=\alpha^l\varphi_1+l\alpha^{l-1}\varphi_2$.. 右辺は l を大きくすると無限大になる(矛盾)。

補題3の証明) $m=1$の時 $H^0(V\ \mathcal{O}(K_V))\hookrightarrow H^n(V\ \mathbb{C})$ と見なせる. また $H^n(V\ \mathbb{C})=H^n(V\ \mathbb{Z})\otimes\mathbb{C}$ で g^*の固有値が代数的整数となることは明らか。$m>1$ に対しては $\rho_m(g)$ の固有ベクトル φ (固有値 α) に対して $\tilde{V}$ (コンパクト n次元複素多様体) と $\tilde{V}$ 上の正則 n 型式の

αをその共役α^σに移すような$\mathbb{Q}$上の体$\overline{\mathbb{Q}(\alpha)}$ Galois closure の自己同型σの$\mathbb{C}$までの拡張を再びσで表わし $f_1^\sigma = \cdots = f_\ell^\sigma = 0$ で定義される代数的集合を V^σとすれば 容易に g^σ, g^σ などが構成されて 必要な条件を満たすことがわかります(証明終)

文献

[1] 飯高 茂　代数多様体の種数と分類　数学 24 (1972) 14−27