数理解析研究所講究録
第170巻 1973年 128-137

三次元の孤立商特異点の解消について

京大 数研 藤木 明

複素多様体 X に有限群 G が作用する時,商空間 X/G が正規解析空間の構造を持つことが知られている。$\dim X = 3$ の場合には,X/G の特異点の解消を,G の作用を利用して構成しうる。この note では,これを述べる。

基本的なのは,次の場合である。G を位数 n の巡回群とし,その generater g が,複素3次元空間 $\mathbb{C}^3 = \mathbb{C}^3(z_1, z_2, z_3)$ に,

(1) $\quad g : (z_1, z_2, z_3) \longmapsto (e_n z_1, e_n^p z_2, e_n^q z_3) \qquad (n, p) = (n, q) = 1$

$0 < p, q < n$, で作用するとする。ここで,$e_n^p = \exp \frac{2\pi i p}{n}$。

$N_{n,p,q} = \mathbb{C}^3/G$ とおくと,これは原点に対応する点 P で孤立特異点を持つ。

定理 1

$N_{n,p,q}$ の解消,$f : \tilde{X} \longrightarrow N_{n,p,q}$ で次の性質を持つものが存在する。

1) $\tilde{X}$ の有限開被覆 $\{U_i\}_{i=1,\dots,e}$ で次の性質を満たすものが存在する。

イ) $U_i \cong \mathbb{C}^3 = \mathbb{C}^3(u_i, v_i, w_i)$

ロ) $f^{-1}(P)=\Theta$ とおくと, $\Theta\cap\mathcal{U}_i$ の既約成分は, (イ)の同型の意味で,) $\mathcal{U}_i$ の座標平面, たとえば $u_i=0$ に一致する。

ハ) $\mathbb{C}^3(z_1,z_2,z_3)$ に, $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\alpha_i\in\mathbb{C}^*$ $i=1.2.3$, で作用する*) 自己同型 A_0 は, $N_{n,p,q}$ の自己同型 A を誘導するが, これが $\tilde{X}$ の自己同型 $\tilde{A}$ に拡張し, (i.e. $\tilde{X}$ の自己同型 $\tilde{A}$ が存在して $\tilde{f}\tilde{A}(\tilde{x})=A\tilde{f}(\tilde{x})$, $\forall\tilde{x}\in\tilde{X}$ が成立する) 各 $\mathcal{U}_i$ で, イ)の同型の意味で $(\alpha_1^{(i)},\alpha_2^{(i)},\alpha_3^{(i)})$, $\underbrace{\alpha_\mu^{(i)}\in\mathbb{C}^*}_{\text{for some}}$ $i=1,\cdots,l$, $\mu=1,2,3$, で作用する。

2) (本質的に上のイ), ロ)により) $\Theta=\bigcup_{i=1}^{t}\Theta_i$ を既約成分への分解とする時, ① Θ_i は非特異有理曲面 for $i=1,\ldots,t$ ② $\Theta_i\cap\Theta_j\neq\phi$ $(\text{for } i\neq j)$ なら $\Theta_i\cap\Theta_j\cong\mathbb{P}^1$ かつ, 交わりは transversal. ③ $\Theta_i\cap\Theta_j\cap\Theta_k\neq\phi$, for $i\neq j\neq k\neq i$, なら, それらは一点で transversal に交わる。④ 異なる4つの Θ_i は交わらない。⑤ $\Theta_i\neq\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$, $\neq\Sigma_1$ (ただし Σ_n は degree n の Hirzebruch 曲面) ⑥ $\pi_1(\Theta)=\{e\}$ (基本群)

*) 一般に $\mathbb{C}^3$ への action が $(z_1,z_2,z_3)\longmapsto(\alpha_1z_1,\alpha_2z_2,\alpha_3z_3)$ $\alpha_i\in\mathbb{C}^*$ で表される時, これを $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ と表す。

これを群 G の位数に関する帰納法で証明するためには situation を今少し一般にする必要があるが, ここではそれはのべずに, その際に上の situation を群 G の位数が p と q の場合に帰着する方法をのべる。すなわち複素空間 X_1 と正則写像 $f_1: X_1\to X$ で次の性質を持つものを構成する。: X_1 の3枚の開被覆 $\{\mathcal{U}_0,\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2\}$ が存在し, $\mathcal{U}_0\cong\mathbb{C}^3$, $\mathcal{U}_1\cong\tilde{\mathcal{U}}_1/H_1$, $\mathcal{U}_2\cong\tilde{\mathcal{U}}_2/H_2$ となる。ここ

で，$\tilde{U}_1$，$\tilde{U}_2$ は複素多様体，$\check{H}_1$. $\check{H}_2$ は各々位数 p, q の巡回群である。さらにこの時 X_2 の singular locus T は T_1 と T_2 の disjoint union となる。ただし T_1 (resp. T_2) は U_1 (resp. U_2) の singular locus である。*)

証明)(略証) 3次元 t-空間 $\mathbb{C}^3(t)$ から $\mathbb{C}^3(z)$ への被覆写像 φ を

(2) $\varphi : (t_1, t_2, t_3) \longmapsto (z_1, z_2, z_3) = (t_1, t_2^p, t_2^q)$

で定義すれば，この被覆変換群 H は $H \cong H_1 \oplus H_2$ $H_1 = \{h_1\}$. $H_2 = \{h_2\}$

$$(3)\begin{cases} h_1 : (t_1, t_2, t_3) \longmapsto (t_1, e_p t_2, t_3) \\ h_2 : (t_1, t_2, t_3) \longmapsto (t_1, t_2, e_q t_3) \end{cases}$$

と表される。よって $N_{n,p,q} \cong \mathbb{C}^3(t)/G \cdot H$.

ただし，G の $\mathbb{C}^3(t)$ への action は (e_n, e_n, e_n) で定義する。G の action は φ と equivariant, i.e $g \cdot \varphi = \varphi \cdot g$。 $\sigma : W_0 \longrightarrow \mathbb{C}^3(t)$ を原点での monoidal 変換とすると，もちろん W_0 は $\mathbb{P}^2$ 上の line bundle で，hyperplane bundle の inverse と同型。 W_0 への G の action，(G. H_1. H_2 の action は自然に W_0 のそれへ拡張される。) の仕方から W_0/G は $\mathbb{P}^2$ 上の degree $(-n)$ の line bundle と同型。これを W とする。$\pi : W \longrightarrow \mathbb{P}^2$ を射影とし，(t_1, t_2, t_3) を $\mathbb{P}^2$ の同次座標と考え，$t_i \neq 0$ で定義される open set を U_i とする。 $V_i = \pi^{-1}(U_i)$ $i = 1, 2, 3$, とおけば，$W = \bigcup_{i=1}^{3} V_i$ $V_i \cong \mathbb{C}^3$ が成立する。V_i の自然な座標に関して，H_1. H_2 の作用は次の形をとる。

$$(4)\begin{cases} & V_1 & V_2 & V_3 \\ h_1 & (1, e_p, 1) & (e_p^n, e_p^{-1}, e_p^{-1}) & (1, 1, e_p) \\ h_2 & (1, 1, e_q) & (1, 1, e_q) & (e_q^n, e_q^{-1}, e_q^{-1}) \end{cases}$$

*) f は proper modification になるようにとる。

ここでもし $p=8$ なら、容易にわかるように、$\bar{V}_2/H$, $\bar{V}_3/H$ の解消は、2次元の場合のそれに帰着され、$\bar{V}_1/H$ は非特異だから、これにより、$\bar{W}/H$ の非特異化 $f_{a_0}: \widehat{\bar{W}/H} \to \bar{W}/H$ が得られ、$\bar{W}/H$ から $N_{n,p,8}$ への自然な写像とこれとを合成すれば、$N_{n,p,8}$ の resolution が得られる。これは[2]で構成されたものと一致する。さて $p=8$ の場合の結果を利用して、$\bar{V}_2/H_1$ の resolution を explicit に構成し、これを今 $\psi_2: Z_2 \to \bar{V}_2/H_1$ と表わす。Z_2 は、$2s+1$ 個、for some $s \geq 0$ の開被覆 $\{U_0, \bar{W}_k^{(2)}, \bar{W}_k^{(3)}, k=1, \ldots, s\}$ で覆われ、(c.f [2]) Z_2 に拡張された、H_2 の作用は各 $\bar{W}_k^{(i)}$, U_0 で次の形をとることが確められる。

$$
(5) \quad \begin{cases} (1, 1, e_8) & \text{on } \bar{W}_k^{(2)} \\ (e_8^{-\mu_k}, e_8^{\mu_{k+1}}, e_8^{-1}) & \text{on } \bar{W}_k^{(3)} \qquad \text{for some } \mu_k, \mu_{k+1} \in \mathbb{Z} \\ (1, 1, e_8) & \text{on } U_0 \end{cases}
$$

この式から、Z_2/H_2 の singular locus は、compact。さらに、$\bar{V}_3$ から同様に構成した Z_3 に対し、$\bar{V}_1/H \cup Z_2/H_2 \cup Z_3/H_1$ が1つの複素空間を定義することがわかる。これを X_1 とおき、$U_0 = \bar{V}_1/H$, $U_1 = Z_2/H_2$, $U_2 = Z_3/H_1$, $\tilde{U}_1 = Z_2$, $\tilde{U}_2 = Z_3$, $\check{H}_1 = H_1$, $\check{H}_2 = H_2$ とおけばよい。この時 singular locus に関する statement は満たされている。morphism f_1 は自然に構成される。

q.e.d.

上の証明の detail ならびに、induction の完全な遂行は、座標の explicit な計算によってなされる。同様の方法で、X の次元に関する帰納法を加えることにより、$\dim X > 3$ の場合にも定理1に

対応する事実を証明できることがほぼ確実である。

次に定理1を$\mathbb{C}^*$-actionを持つ特異点の解消に応用する。Lを、非特異曲面S上のline bundleとし、$\sigma: \mathbb{C}^*\times L \to L$ をLの自然な$\mathbb{C}^*$-actionとする。Gを、$\mathrm{Aut}_S L$の有限部分群で、σと可換なものとする。(ここで$\mathrm{Aut}\,L$は、Lの自己同型群を表す。) 今 $X=L/G$ が0-sectionのimageの外では、特異点を持たないとする。

<u>Theorem 2</u>

Xの解消 $f:\tilde{X}\longrightarrow X$ で次の性質を満たすものが存在する。

1) $\tilde{X}$の$\mathbb{C}^*$-actionが存在し、(denoted by $\tilde{\sigma}$) $f\cdot\tilde{\sigma}(\tilde{x})=\bar{\sigma}f(\tilde{x})$ for $\forall\tilde{x}\in\tilde{X}$ が成立する。ここで$\bar{\sigma}$は、Lの$\mathbb{C}^*$-action σにより誘導されたXの$\mathbb{C}^*$ action。

2) TをXのsingular locusとし、$f^{-1}(T)=\Theta=\bigcup_{\alpha=1}^{t}\Theta_\alpha$. Θ_α irreducible, とおくと、①各Θ_αは、非特異線織面 ② $\Theta_\alpha\cap\Theta_\beta\neq\phi$ for $\alpha\neq\beta$ なら、$\Theta_\alpha\cap\Theta_\beta$は非特異曲面で、$\Theta_\alpha$と$\Theta_\beta$の交わりはtranversal ③ $\Theta_\alpha\cap\Theta_\beta\cap\Theta_\gamma\neq\phi$ for $\alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\alpha$ なら、それらは有限個の点でtransversalに交わる。④どの4つのΘ_αも1点を共有しない。

略証) Tに属する点xに対し、任意に $s\in\pi^{-1}(x)$ をとる。ここでπは、自然な商写像 $L\to X$。Lの0-sectionを同じくSで表すと、仮定より $s\in S$。G_sをsのstability groupとすると、$\forall g\in G_s$は、s上のLのfibreの近傍での、Lの~~勝手~~適当なtrivializationに対し、(これを $\varphi_U: L_U \simeq \mathbb{C}\times U$, $U\ni s$ で表す。) 次の形で作用する。i.e. ζをφ_Uに対応す

る fibre coordinate とする時, $g: \zeta \mapsto \alpha(g)\zeta$, $\alpha(g) \in \mathbb{C}^*$。従って, $G_3 \to \mathbb{C}^*$ なる準同型を $g \mapsto \alpha(g)$ で定義すれば, G_3 は cyclic group の small group による extension であることがわかる。従って x の適当な近傍は, $D^3/G(x)$ と同型である。ここで D^3 は3次元の polycylinder $|z_i|<1$ $i=1,2,3$, $G(x)$ はこれに作用する有限巡回群. $D^3/G(x)$ の特異点の解消は, 群 $G(x)$ の位数に関する帰納法により, 定理1に着帰される。各点 x の近傍に対して構成した resolution が1つの複素多様体 $\tilde{X}$ をなすことをみるために次の lemma が必要である。

Lemma

X を3次元の V-manifold, $\{U_\alpha, G_\alpha\}$ を対応する X の被覆とする。G_α を有限群とし, U_α を polycylinder とする. U_α/G_α の, Theorem 1 に従い次の系で構成される resolution を $\tilde{\varphi}_\alpha: (\widetilde{U_\alpha/G_\alpha}) \to U_\alpha/G_\alpha$ とすると, $U_\alpha/G_\alpha \cap U_\beta/G_\beta \neq \phi$ in X なら共通部分でそれらは一致する。(by abuse of language everywhere)

略証) G_α は small subgroup を含まないとしてよい。さら U_α の原点は U_β, $\beta \neq \alpha$ に含まれないとして差しつかえない。従って $U_\alpha/G_\alpha \cap U_\beta/G_\beta$ の singular locus は, $D^2/G \times D$, (D^2: 2次元の polycylinder, D: unit disc の内部) と local に同型。$\tilde{\varphi}_\alpha$ は, D^2/G の minimal resolution $\times\, id_D$ であり, 一方これは, $D^2/G \times 0$, $(0 \in D)$, を support とする適当な ideal の sheaf の blowing up である。blowing up は ideal が決まれば座標のとり方に無関係だから $\tilde{\varphi}_\alpha$ と $\tilde{\varphi}_\beta$ は一致する。

q.e.d. q.e.d.

Remark　n次元の場合(たとえば3次元)の Theorem 1 の resolution は,

非特異中心の有限回のmonoidal変換に分解できることが言えれば、同じlemmaは高次元でもそのanalogyを持つ。しかしこれはむつかしい。// さてLをnegativeとすれば、$\pi(S)$ exceptional。

<u>Corollary 3</u> Yを、Xにおいて$\pi(S)$をcontractして得られるanal. spaceとする時、これはisolated singularity with $\mathbb{C}^*$-actionであるが、これのresolutionで定理2の1)と2)②③④を満たすものが存在する。条件①は、1つのΘ_i, say Θ_1を除いて非特異線織面、~~[illegible]~~ という条件でおきかえられる。

<u>Corollary 4</u> 3次元のpolycylinder D^3に有限群Gが作用し、D^3/Gが原点に対応する点でisolated singularityを持つ時、このresolution $f: \tilde{X} \to X$で定理1の1)2)をみたすものが存在する。

略証) $G \subset GL(3, \mathbb{C})$と考えてよい。$\rho: W \to D^3$を原点でのmonoidal変換とする。GのactionはWのactionにextendする。Wは$\mathbb{P}^2$上のline bundleの0-sectionの近傍と同一視されるからcorollary 3の証明方法が適用しうる。この際$\pi(S) \cong \mathbb{P}^2/G$でこれはrational。$f^{-1}[\pi(S)]$がnonsingularになる事等は、定理1の際の計算による。//

Remark. もっと一般に、他の有限群HがD^3にactしている時、これがXのactionをもinduceするならば、H-equivariantなresolutionが存在する。

例) 系3の例として、Brieskorn varietyのresolutionが可能である。実際式 $z_0^{a_0}+z_1^{a_1}+z_2^{a_2}+z_3^{a_3}=0$ から、労をいとわなければ

explicit に resolutionを constructする方法がある。(c.f [/])。たとえば、これから K が topological sphere なら resolution の結果である surfaceは すべて rational に限ることができる。この時は前頁の記号で $\pi(S)=\mathbb{P}^2$ となる。

最後に簡単な Brieskorn variety の, resolution の例をあげておく。これは上でのべた定理とは関係がない。

<u>例1</u> $z_0^{a_0}+z_1^{a}+z_2^{a}+z_3^{a}=0$ の resolution$_g$ $f: \widetilde{V}_a \longrightarrow V_a$ で次の性質をもつものが存在。$f^{-1}(p)=\Theta_0\cup\cdots\cup\Theta_t$ と既約成分に分解する時 (i) Θ_0 は $\mathbb{P}^2$ の l 枚の branched covering でその branch locus C は、$\mathbb{P}^2$ 内で (z_1, z_2, z_3 を $\mathbb{P}^2$ の同次座標とみて) $z_1^a+z_2^a+z_3^a=0$ で定義される非特異曲線。$\Theta_i \cong \mathbb{P}^1$-bundle over C $i=1\cdots t$。$\Theta_i\cap\Theta_{i+1}\cong C$ for $i=0,\cdots,t-1$

(ii) $\Theta_1\cap\Theta_0=\overline{C}$ とおくと、$N_{\Theta_0/\widetilde{V}_a}\cong-\dfrac{a'p'+1}{a'a_0'}[\overline{C}]$, $N_{\Theta_i/\widetilde{V}_a}\Big|_{F_i}\cong-b_iH_{F_i}$ $(i=1\cdots t)$ が成立する。ここで、$l=(a_0,a)$ $a_0=a_0'l$ $a=a'l$。p' は $(a'p'+1)\equiv 0 \pmod{a_0'}$ $0<p'<a_0'$ により決まる数。b_i は、$n=a_0'$ と p から Hirzebruch [ ] の algorithmにより決まる数。ただし p は $p\equiv -a' \pmod{a_0'}$ $0<p<a_0'$ により決まる数。F_i は $\mathbb{P}^1$-bundle Θ_i の任意の fixed fibre。N は normal bundle。

(a) 特に $l=1$ なら $\Theta_0\cong\mathbb{P}^2$ (ii) から $N_{\Theta_0/\widetilde{V}_a}\cong-\dfrac{ap'+1}{a_0}H_{\Theta_0}$。ただし H_{Θ_0} は、Θ_0 の hyperplane bundle。よって Θ_0 が第一種例外曲面 $\longleftrightarrow ap'+1=a_0$ $\longleftrightarrow a\,|\,a_0-1$

(b) $l=1$ の時さらに $b_i=2$ $\forall i \longleftrightarrow a-1\,|\,a_0$ 従って Θ_0 が第一種例外曲面かつ $\forall i$ に対して $b_i=2 \longleftrightarrow a_0=(sa-1)(a-1)$, $s=1,2,3,\cdots\cdots$。

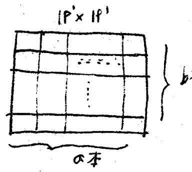
(c) $a=2$ の時, イ) d が奇数の時 a) より $\Theta_0 \cong \mathbb{P}^2$ で第一種例外曲面。$\Theta_i \cong \Sigma_2$ $(i=1, \cdots s)$ で $b_i=2$。ロ) d が偶数の時, $\Theta_0 \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $\Theta_i \cong \Sigma_2$ $(i=1, \cdots, s)$ で $b_i=2$。$N_{\Theta_0/\hat{V}_a} = -[\bar{C}]$. $\bar{C}$ は Θ_0 の diagonal だから Θ_0 は第一種例外曲面。$b_1=2$ より Θ_0 を contract すれば次に Θ_1 が第一種例外曲面になる。以下順々 Θ_i を contract すると最后に $\mathbb{P}^1$ がのこる。(a) の場合を除き Θ_0 が ruled surface, ($\mathbb{P}^1$-bundle) になるのはこの場合しかない。よって Θ が curve に contract できるのはこの場合しかない。

(d) $a_0 | a$ の時, $n=1$ の時 $f^{-1}(0) = \Theta_0$. $N_{\Theta_0/\hat{V}_a} = -[\bar{C}]$。実際 $\hat{V}_a \cong$ ($-[\bar{C}_0]$ なる line bundle の bundle space)

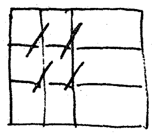
例の証明) $\mathbb{C}^4$ 内の line L: $z_1 = z_2 = z_3 = 0$ は V_a と原点のみを共有する。$\sigma: W \longrightarrow \mathbb{C}^4$ を L に沿っての monoidal 変換, $\bar{V}_a$ を σ による V_a の proper transform とする。$\sigma^{-1}(0) \cap \bar{V}_a \cong \mathbb{P}^2$ で, $\sigma|_{\bar{V}_a - \sigma^{-1}(0) \cap \bar{V}_a}$ は isomorphism である。$\bar{V}_a$ の $\mathbb{P}^2$ に沿う singularity をはずせばよい。monoidal 変換の定義から $\bar{V}_a$ の方程式は local に $Z_0^{a_0} = \zeta Z_1^{a}$, (ここで ζ は $\bar{V}_a \cap (\sigma^{-1}(z_1^a + z_2^a + z_3^a = 0)$ の local equation) と書ける。これから Θ_i, $i = 0, \cdots s$ に関する statement がでる。ii) の normal bundle に関しては, たとえば函数 z_0 が $\hat{V}_a$ 上に induce する divisor が linearly equivalent to 0 を利用して証明できる。

<u>例 2</u> $Z_0^{a_0} + Z_1^{a_0} = Z_2^{b} + Z_3^{b}$ $\quad V_{a,b}$ の resolution $f: \tilde{V}_{a,b} \longrightarrow V_{a,b}$ が次のように構成される。1) $Z_0 = Z_1 = 0$ による $\mathbb{C}^4$ の monoidal 変換, followed by $Z_2 = Z_3 = 0$ の proper transform を center とする monoidal 変換。これを $\sigma: W_1 \longrightarrow V_{a,b}$ とすると, $\sigma^{-1}(0) \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$。2) $Z_0^a + Z_1^a = 0$, $Z_2^b + Z_3^b = 0$ に

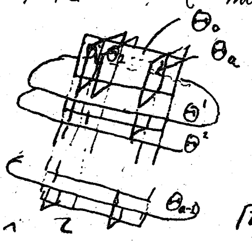
対応する$\sigma^{-1}(0)$上のab個の点の各々において、対応する2平面の交わりをcenterとするblowing upを行う。これとσとの合成を$\sigma_1 : W_1 \longrightarrow V_{a,b}$と表すと、$\sigma_1^{-1}(0)$は$\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$から上のab個の点でmonoidal変換して得られる非特異曲面。$\sigma^{-1}(0)$:



b本 ← $\sigma_1^{-1}(0)$



3) W_1をnormalizationすると、a+b本のlineのproper transformに沿って(これらは今や互いに交わらない)$x^n=\zeta y^p$ $(n,p)=1$ typeの特異点を生ずる。これによって$V_{a,b}$のresolutionを得る。これは定理2でconstructしたBrieskorn varietyのresolutionとは異なる。実際その方法では$\sigma^{-1}(0)$のab個の点の逆像は2次元でなければならない。$b=a-1$の時は上の方法を少しmodifyして次の絵のようなresolutionができる。



ここで$\Theta_0 \cong \mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$, Θ_i $i=1,\dots,a$ は $\mathbb{P}^1$-bundle over $\mathbb{P}^1$ ですべて同型。Θ^i ~~は rational~~ はすべて同型。

これらからたとえば3次元のresolutionが全然uniqueでないことが観察できる。

reference

[1] Hirzebruch-Jänich : Involutions and Singularities ; Algebraic geometry . papers presented at the Bombay Colloquium. (1968)

[2] Ueno : On fibre spaces of normally polarized abelian varieties of dim 2. I. Singular fibres of the 1st kind. Journal of the Faculty of Science . Sec I A Vol 18 No 1 p 37-95 (1971)