数理解析研究所講究録
第170巻 1973年 138-142

$S^4\times S^2$ 上の free involution について

中央大 理工　松 江 広文

$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ とする。
$\alpha : S^2 \longrightarrow S^2$ を $\alpha(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, -x_3)$ により定義する。

$T : \Sigma^4 \to \Sigma^4$ を homotopy 4-sphere 上の smooth free involution とし (T, Σ^4) と書くことにする。

$A : S^4 \to S^4$ を antipodal map とする。

$T\times\alpha : \Sigma^4\times S^2 \longrightarrow \Sigma^4\times S^2$ を $(T\times\alpha)(x, y) = (Tx, \alpha y)$ により定義する.

$A\times\alpha : S^4\times S^2 \longrightarrow S^4\times S^2$ も同様に $(A\times\alpha)(x, y) = (Ax, \alpha y)$ により定義する。

すると次の定理が云える。

定理. 任意の (T, Σ^4) に対し、
$(\Sigma^4\times S^2)/(T\times\alpha)$ は $(S^4\times S^2)/(A\times\alpha)$ に diffeomorphic である。

（証明）

$\Sigma^4 \to \Sigma^4/T$ の mapping cylinder を M^5 とする。

$\partial M^5 = \Sigma^4$, $\exists W^5$: contractible manifold.

s.t. $\partial W^5 = \Sigma^4$

$M^5 \underset{\Sigma^4}{\cup} W^5 = N^5$ とすると N^5 は $\mathbb{R}P^5$ に homotopy equivalent.

$\mathbb{R}P^5$ と homotopy type の等しい smooth 5-manif. は，次の Brieskorn involution の orbit space に diffeo.

$V_{2k+1} = \{(z_0, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^4 \mid z_0^{2k+1} + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0\}$

$S^7 = \{(z_0, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^4 \mid z_0\bar{z}_0 + z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + z_3\bar{z}_3 = 1\}$

$k = 0, 1, 2, 3, \cdots\cdots$ とすると，

$V_{2k+1} \cap S^7$ は S^5 に diffeo. それらを S^5_{2k+1} とかき，

free involution $T_{2k+1} : S^5_{2k+1} \to S^5_{2k+1}$ を

$T_{2k+1}(z_0, z_1, z_2, z_3) = (z_0, -z_1, -z_2, -z_3)$ により

定義する。 すると homotopy $\mathbb{R}P^5$ は S^5_{2k+1}/T_{2k+1} $(k = 0, 1, 2, 3)$

のどれかに diffeo であることがわかっている。

上で作った N^5 を S^5 の free involution の orbit space と考えると，その involution は明らかに desuspend することがわかるから S^5_1/T_1 か S^5_7/T_7 のどちらかに diffeo.

これらのことから次の２つの場合について定理を証明すれ

ばよい。

(i) $N^5 = S_1^5/T_1$，この場合は Σ^4/T と S^4/A が *h-cobordant* であることより明らかに定理は云える。

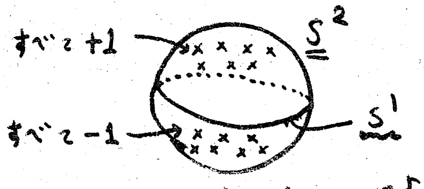
(ii) $N^5 = S_7^5/T_7$，この場合は次のようにする。

$$S^7 \supset \underline{\underline{S}}^2 = S^7 \cap \{ \mathrm{Im}\, z_1 = z_2 = z_3 = 0 \}$$

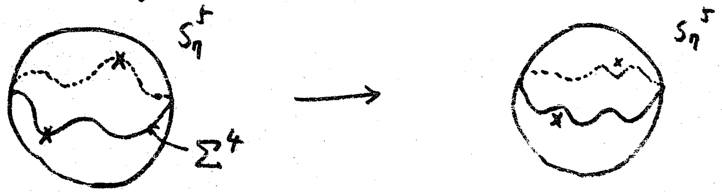
$$\supset \underset{\sim}{S}^1 = S^7 \cap \{ z_1 = z_2 = z_3 = 0 \}$$

$(S^7 - S_7^5) \longrightarrow S^1$ なる Milnor *fibering* の1つの *fiber* と $\underset{\sim}{S}^1$ との交わりを調べることにより $\underset{\sim}{S}^1$ と S_7^5 は S^7 の中で *linking number* 7 で *link* していることがわかる。

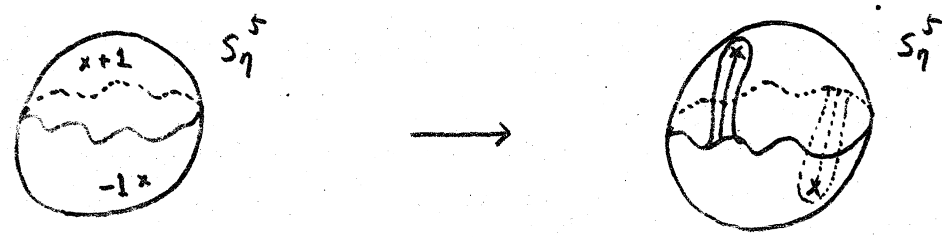
一方 $\underline{\underline{S}}^2 \cap S_7^5 = \{14\text{個の点}\}$ であり，これらの点は T_7-*invariant* である。$\underline{\underline{S}}^2$ と S_7^5 に適当に向きをつけてその交わりを調べてみると，$\underset{\sim}{S}^1$ と S_7^5 の *link* の状態より次の図のようになる。



又，$N^5 = S_7^5/T_7$ としていることより (T_7, S_7^5) の中に *invariant* (T, Σ^4) があると考えてよい。まず最初に，(T, Σ^4) を *equivariant* に $S^2 \cap S_7^5$ からはずしてやる。



次に下図の操作をする。



この操作により S^5_η の中に (T, Σ^4) と equivariant diffeo. で，T_η-invariant な $(T', \Sigma^{4'})$ で且つ，$\underline{\underline{S}}^2$ と $\Sigma^{4'}$ とは S^7 の中で linking number 1 で link しているということをみたす $(T', \Sigma^{4'})$ が得られる。

そこで，S^7 から，$\underline{\underline{S}}^2$ と $\Sigma^{4'}$ の equivariant tubular nbhd. を取りさったもの X^7 は，$S^4 \times \underline{\underline{S}}^2$ と $\Sigma^{4'} \times S^2$ の間の T^7-invariant な h-cobordism を与えている。

一方 $T^7 | S^4 \times \underline{\underline{S}}^2$ は $A \times \alpha : S^4 \times \underline{\underline{S}}^2 \to S^4 \times \underline{\underline{S}}^2$ であり，

$T^7 | \Sigma^{4'} \times S^2$ は $T' \times \alpha : \Sigma^{4'} \times S^2 \to \Sigma^{4'} \times S^2$ となっていることは明らかである。 故に $X^7 / (T^7 | X^7)$ は，$(S^4 \times \underline{\underline{S}}^2)/(A \times \alpha)$ と $(\Sigma^{4'} \times S^2)/(T' \times \alpha)$ との間の h-cobordism.

(T, Σ^4) と $(T', \Sigma^{4'})$ が equivariant diffeo. であることより $(\Sigma^4 \times S^2)/(T \times \alpha)$ と $(S^4 \times S^2)/(A \times \alpha)$ とは diffeomorphic.　　　　Q.E.D.

この定理は homotopy $\mathbb{R}P^5$ は Brieskorn involution の orbit space として，すべて表わされるという結果を用

いて証明したのであるが、次の事が云えていれば、ただちに出る結果である。「homotopy $\mathbb{RP}^4$ はすべて $\mathbb{RP}^4$ に h-cobordant」。

ところが Cappell と Shaneson は、$\mathbb{RP}^4$ に、いくつかの $S^2 \times S^2$ を connected sum したものに関しては、homotopy type が等しいが h-cobordant でないものが存在することを証明した。

しかし著者は、$\mathbb{RP}^4$ に関する結果に関しては何らの手がかりを得ていない。