

Burgers 乱れから Turbulence へ (Energy dissipation の物理的描像を中心にして)

電波研究所 田中 浩

§ 1. はじめに

Homogeneous かつ Isotropic な乱れの中心的な問題は、やはり closure problem であると考えられるが、これを attack する方法として大きく分けて現在 2 種類考えられる。第 1 の方法は伝統的な逐次近次を使ういわゆる weak coupling の方法であり、Reynolds 数展開、Cumulant 展開をはじめとして Gram-Charlier 展開や Wiener-Hermite 展開なども含まれる。しかしながらこれらの展開は、たとえば Reynolds 数展開ならば第 0 次近似として Reynolds 数が 0 である場合をとり、一方他の展開方式は概括的にいえば第 1 次近似は正規分布を仮定し、高次展開は正規分布からのずれを求めている。このために現象が正規分布に近ければこれらの展開で十分であるけれども、現象が正規分布から大きくずれている場合は十分ではない (Crow and Canavan, 1970)。

この欠点を補うために第0近似として非線型解を考え、それに適当な random collection を施すことによりエネルギー・スペクトルを求めようというものである。Burgers 乱れに関しては厳密解として saw-tooth wave をとればよい。これは非粘性の極限に現われる shock wave である。現実の乱れに関しては渦層なり渦糸なりを非線型解として使えばよいが、不幸にもそれらの厳密解は比較的単純な場合を除いてわかっていない。そしてその単純な解では現実の乱れを十分表現できないのである。

このように element としての非線型解がわかっていない以上、何らかの方法でその性質だけでも知ることは重要であろう。この小論は Burgers 乱れと現実の乱れの相違をエネルギー減衰過程を中心に考察することを目的としている。そして特に Saffman (Topics in non-linear Physics, 1966) に負うところが多い。

§ 2. Burgers 乱れの性質

Burgers 乱れの性質を種々の側面から検討してみる。

1次元 Burgers 方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2-1)$$

とかける。ただし $u = u(x, t)$ で速度、 ν は動粘性係数を表

わす。この方程式は2つの意味を持つ。すなわち

- Turbulence の 1次元 model
- Compressible fluid 中の weak shock の形成と減衰の model

である。

(a) Burgers 乱流において Kolmogoroff の仮説は妥当であるか?

方程式 (2-1) を使えば mean energy dissipation rate は

$$\varepsilon = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{U^2}{2} \right) = \nu \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} = \nu \overline{\omega^2} \quad (2-2)$$

とかける。ここで $\omega = \partial u / \partial x$ とする。

(i) Scale analysis による検討

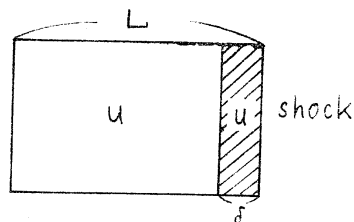


Fig. 1

Fig. 1 は (2-1) の厳密解よりでてくる saw-tooth wave の 1 波長を模式的に表現したものである。斜線の部分は shock の厚さを表わしている。ここで u は shock 内外の特徴的な速度, L は saw-tooth wave の波長, δ は shock の厚さを表わし、これは

$$\delta \sim \nu / u \quad (2-3)$$

と書ける。いま shock 内外の energy dissipation rate を見積ると

◦ shock外の energy dissipation rate

$$\varepsilon_0 = \nu \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \sim \nu \left(\frac{u}{L}\right)^2 = \frac{1}{Re} \frac{u^3}{L} \rightarrow 0 (Re \rightarrow \infty) \quad (2-4)$$

◦ shock内の energy dissipation rate

$$\varepsilon_1 = \nu \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \sim \nu \left(\frac{u}{\delta}\right)^2 \left(\frac{L}{\delta}\right) = \frac{u^3}{L} (Re \ll 1 \text{ 独立}) \quad (2-5)$$

となる。すなわち ε_1 は ν に独立で、shockの scale は一見 Kolmogoroff の仮説を満足しているようである。

(ii) 厳密解による検討

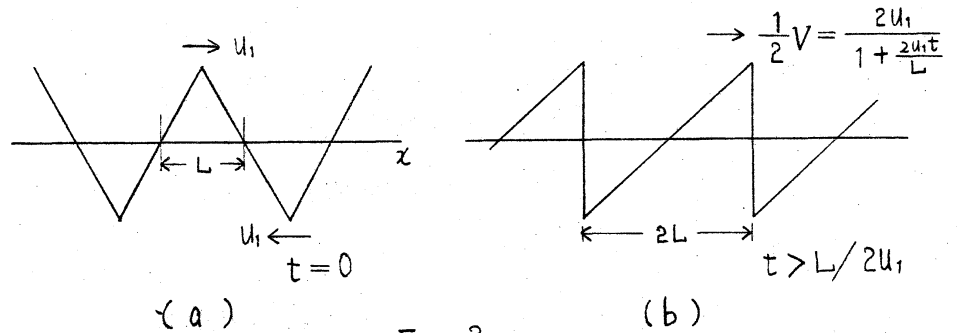


Fig. 2

Fig. 2 に示されるように初期に (a) のような三角波を与えると、ある時間経過すると (b) のような saw-tooth wave に変形する。この場合 (2-1) の厳密解は、

$$u(x, t) = \frac{V(t)}{2} \left[-\tanh \frac{Vx}{4\nu} + \frac{x}{L} \right], \quad -2L < x < 2L \quad (2-6)$$

となる。これを使うと

$$\varepsilon = V^3 / 24L \quad (r \ll L) \quad (2-7)$$

となる。すなわち いったん shock が形成される

と energy dissipation は ν に独立で、初期条件すなわち何個の shock が存在するか (L) また shock がどのように移動するか (V) によって energy dissipation が決まる。この性質は inertial subrange における ε が ν に独立であるという性質に類似している。

(b) Burgers 乱れのエネルギー・スペクトル

(a) で調べたように Burgers 乱れの性質は energy dissipation rate が ν に独立であるということから Turbulence における inertial subrange の性質に非常に良く似ている。それでは Burgers 乱れで $-\frac{5}{3}$ 乗則が成立するかといえは否である。厳密解 (2-6) を使った計算では

$$E(k) \propto \frac{V^2}{L} k^{-2} \quad (k \ll \frac{V}{\nu}) \quad (2-8)$$

のように -2 乗則に従い、 $-\frac{5}{3}$ 乗則にはならないからである。

(c) Burgers 乱れと Turbulence の一般的相違

いままでの簡単な考察で Burgers 乱れと Turbulence とは何らかの点で異なっていることがわかる。その一般的な原因ははっきりしないが、いくつかの原因が挙げられる。

(i) Turbulence における多次元性

いままでは 1 次元の Burgers 乱れを

考えてきたので、2次元・3次元に拡張するとその性質が変化する可能性は十分考えられる。このためには3次元 Burgers 乱れを表わす式

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + (u_i \cdot \nabla) u_i = \nu \Delta u_i \quad (2-9)$$

の解を求めてみれば良い。J. D. Cole (1951) によれば、もし $\theta(x, y, z, t)$ が

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nu \Delta \theta \quad (2-10)$$

の解ならば

$$u_i = -2\nu \text{grad}(\log \theta) \quad (2-11)$$

が(2-9)の解である。しかしこの解は $\text{rot } u = 0$ となるために irrotational flow を与えているにすぎない。よってこの方法では shock を表現することはできるが、vortex sheet を表現することは不可能であり、そのためには rotational flow の解が求められなければならない。しかしながら少くとも irrotational flow に関しては3次元 Burgers 方程式の解が analytic に求まり、かつその形が1次元 Burgers 方程式の解とそれほど本質的な差がないということから、3次元性が直接に $-\frac{1}{3}$ 乗則を導くとは限らない。すなわち3次元性は必要条件ではあるが十分条件で

はよいようである。

(ii) Turbulence における Incompressibility

3次元性は Kolmogoroff の仮説を満すための必要条件ではあっても決して十分条件ではないということ述べたが、では十分条件としては何が考えられるだろうか？ Burgers 方程式と Navier-Stokes 方程式の基本的な相違は後者に圧力項が含まれており、そのために連続の条件がついていることである。すなわち流体の Incompressibility の条件である。このように圧縮性流体と非圧縮性流体の相違を微分方程式の characteristics の理論を用いて簡単に述べる。

3次元の非粘性 Navier-Stokes 方程式と連続の式はそれぞれ

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + (u_i \cdot \nabla) u_i = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p \quad (2-12)$$

$$\text{div } u = 0 \quad (2-13)$$

と書ける。この方程式の特性条件は3次元の characteristics を

$$\mathcal{Y}(x, y, z, t) = 0 \quad (2-14)$$

とすれば

$$\frac{d\mathcal{Y}}{dt} (\mathcal{Y}_x^2 + \mathcal{Y}_y^2 + \mathcal{Y}_z^2) = 0 \quad (2-15)$$

となる。 $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2 = 0$ はまた、 $t-x-y-z$ 超空間において

$$t = \text{const.} \quad (2-16)$$

なる超平面を表わす。これは $t-x-y-z$ 超空間における特性錐が超平面に縮退した極限の状況であり、圧力信号が無限大の速度で伝播することを意味する。この条件は不連続面とは直接関係がない。

一方 (2-15) におけるもう一つの条件

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad (2-17)$$

は不連続面が流線に沿っていることを示している。そして流体中に生じる不連続的現象は全てこの面に関係している。粘性の存在する流体中に生じる内部境界層はたとえば vortex sheet として現われる。粘性が次第に小さくなると、その sheet もそれにつれてうすくなり得る。非粘性の極限ではこの sheet はたぶん不連続面になるであろう。すなわち現実の Turbulence での singular surface は非粘性方程式の characteristics になっている。これは現象的には singular surface を横切つてではなく、それに沿つて流体が効くことに

対応する。

一方非粘性 Burgers 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2-18)$$

の characteristics の t - x 平面への投影は $\frac{dx}{dt} = u$ の勾配を持つ直線である。したがってある時点での u の値がわかれば、その後の解は characteristics を辿ることによって求めることができる。すなわち

$$u = f(x-ut) \quad (2-19)$$

が解である。しかしながらこの関係は多価解が現われる有限時間後には成立しなくなる。粘性のある Burgers 方程式はたとえ粘性がわずかでも多価にはならず連続性を保つ。その意味では粘性を持つ場合と非粘性の場合では十分時間が経過するとかなりの相違が現われる。あまり相違の目立たないのは steepening 現象がそれほど顕著でない場合であり、Burgers 方程式で $\nu=0$ とおくことの有効性もそのような場合である。かくて大域的な意味で小さな粘性を持つ Burgers 乱れに出現する shock は非粘性 Burgers 方程式の特性面ではない。現象的には shock を横切って流体が

移動するということがある。

このように Burgers 乱れと Turbulence では singular surface の性質が異なるために、Burgers 乱れの研究が直接的に Turbulence のそれに結びつくとは考えにくい。

これまでの議論は、まず Burgers 乱れの性質が一見 Kolmogoroff の仮説を満足しているようでありながら、実はかなり違ったものであり、その相違が次元と Incompressibility の2つによるものであろうという推定をした。かくして以下の section では 2次元 Turbulence および 3次元 Turbulence の energy dissipation の物理的(直観的?)描象によって、それらの相違を具体的に明らかにすると同時に、非線型基本波として Burgers 乱れの場合は saw-tooth wave をとるに、2次元・3次元 Turbulence では何を採用したら良いかをあわせて検討する。

§ 3. 2次元 Turbulence の性質

1次元 Burgers 乱れから 3次元 Turbulence に進む前にその中間にある 2次元 Turbulence の性質について近年興味ある結果が導かれているのでそれについて若干説明を加えておく。

Navier-Stokes 方程式より

$$\frac{d}{dt} \frac{\overline{u_i^2}}{2} = -\nu \overline{w^2}$$

となる。3次元 Turbulence では ν が小さくなっても vortex line の stretching により $\overline{w^2}$ が増大し、 ε は $\nu \rightarrow 0$ しても 0 にならない。これは Kolmogoroff の仮説に対応する。しかしながら 2次元 Turbulence では vortex line stretching の現象は期待できないため $\nu \rightarrow 0$ で $\varepsilon \rightarrow 0$ になってしまうだろう。

Onsager (1949) は統計力学の手法を用いて 2次元流体中に初期渦度の偶然分布から小数の強い孤立した渦が形成されることを発見した。このように小数の強い孤立した渦の形成はそれらの Amalgamation によると考えられる。これは Burgers 乱れで初期の多くの小さな不連続が合体して小数の強い singularity (i.e. shock) になる過程に類似している。

2次元乱れの場合は $\frac{1}{2} \overline{u_i^2}$ (energy) のかわりに $\frac{1}{2} \overline{w^2}$ (enstrophy) を考えた方がよい。enstrophy の時間変化は

$$\frac{d}{dt} \frac{\overline{w^2}}{2} = -\nu \overline{\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)^2} \quad (3-1)$$

で記述され、これは粘性以外では変化しない。ここでもし小数の強い孤立した渦が形成されるならば、式(3-1)の右辺で $\nu \rightarrow 0$ となっても、渦度の勾配が増加して、それを埋めあわせる可能性がある。すなわち

$$\nu \overline{\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)^2} \rightarrow \chi \quad (\nu \text{ は独立}) \quad (\nu \rightarrow 0) \quad (3-2)$$

これはあくまでも直観的議論で、数学的に証明するには何ら

かの厳密解が必要である。要するに3次元Turbulenceのenergyと2次元Turbulenceのenstrophyは形式的に対応関係を持つ。

3次元Turbulenceではinertial subrangeの特徴的な長さとしてKolmogoroffのmicroscaleを考えたいのであるが、2次元Turbulenceでは境界層の厚さ $\delta = \sqrt{\nu L/u}$ を特徴的長さと考えれば十分である。 χ は ν に無関係であるから

$$\chi \propto u^3/L^3 \quad (3-3)$$

よって

$$\delta = \sqrt{\nu L/u} = (\nu^3/\chi)^{1/6} \quad (3-4)$$

と書ける。いまenstrophyのスペクトルを $\Omega(k)$ とすれば、これは一般に ν, χ, k によって表わされるだろう。したがって次元解析から

$$\Omega(k) = \nu^{1/2} \chi^{1/2} f(\delta k) \quad (3-5)$$

と書ける。ここで f は普通関数である。いま $\Omega(k)$ が ν に独立であるとすれば

$$\Omega(k) = c \chi^{2/3} k^{-1} \quad (3-6)$$

となる。エネルギー・スペクトルは $k^2 E(k) = \Omega(k)$ から容易に

$$E(k) = c' \chi^{2/3} k^{-3} \quad (3-7)$$

となる。このスペクトル形はKraichnan(1967), Leith(1968)およびBatchelor(1969)などによって求められ、simulationの手法でBatchelor(1969)とLilly(1969)によって検出されている。また

大規模な大気運動も2次元的存在であるため、そこにもこのスケール形が求められている。

1次元 Burgers 乱れは、その特徴的長さとして内部境界層（すなわち shock）の厚さを考えれば良かったのであるが、2次元乱れでもやはりその特徴的長さとして内部境界層の厚さを考えれば良い。このように2次元 Turbulence の特徴は大規模運動によって作られる内部境界層であるために、3次元 Turbulence におけるほどの局所性は要求されない。これは2次元 Turbulence においては energy が高波数方向のみに移動するのではなくて、低波数にも移るために、高範囲の波数にわたって励起されることにも通じている。また2次元 Turbulence でも $-\frac{5}{3}$ 乗則が存在するが、これと -3 乗則の関連については Kraichnan (1967) に説明されている。

§ 4. 3次元 Turbulence の性質

1次元 Burgers 乱れと2次元 Turbulence について検討して、その特徴的長さとしてともにそれぞれの境界層の厚さを考えれば良いということが結論であった。すなわち1次元 Burgers 乱れでは shock の厚さは ν に、また2次元 Turbulence では境界層の厚さは $\nu^{\frac{1}{2}}$ に比例する。3次元 Turbulence ではその特徴的長さとして Kolmogoroff の microscale $l = (\nu^3/\varepsilon)^{\frac{1}{4}}$ を用い

るのであるが、いったいこの長さは現実の Turbulence の物理過程の中でいかなる意味を持っているのであろうか？ すなわら L に比例するスケールが存在するのであろうか？ これに対する一つの説明が Saffman (1966) によってなされている。エネルギーの減衰は一般に vortex sheet あるいは vortex line の内部で顕著である。ここでは渦層に限定して減衰過程を述べてゆく。Saffman は大規模運動から出発して Kolmogoroff の microscale までの過程を2つに分けている。Fig. 3 に示されているように、第1の過程はスケール L の大規模運動から内部境界層としての vortex sheet の形成までこれを Primary Cascade と呼ぶ。第2の過程は vortex sheet から Kolmogoroff の microscale までこれを Secondary Cascade と呼ぶ。

- ① Primary Cascade ----- Stretching, Bending-back, Amalgamation
- ② Secondary Cascade ----- Görtler instability

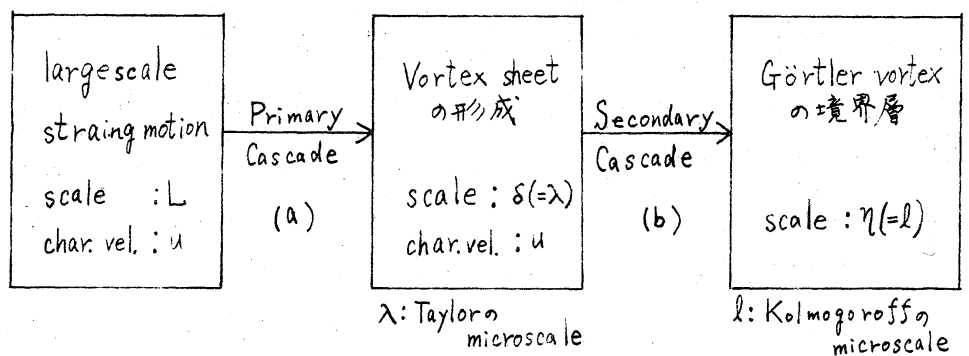


Fig. 3

(a) Primary Cascade

平均流を

$$\mathbf{U} = (\alpha x, \beta y, \gamma z)$$

とすれば連続の条件より

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

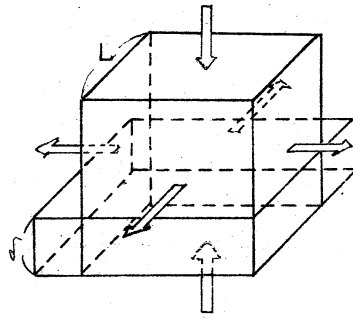
いまもし $\alpha, \beta > 0, \gamma < 0$ と

Fig. 4

仮定すれば、流体塊(たとえばLの立方体)には Fig. 4 のような力が作用し、厚さ $\delta = \sqrt{\nu / (-\gamma)}$ の sheet を作る。いまこの sheet によって占められる体積の比率を σ_s とする。もし Bending-back や Amalgamation が無いと体積は変化しない。sheet の面積は L^2 が L/δ だけ増加あるいは減少すると考える。Bending-back や Amalgamation が独立に偶然的に起ると考えれば random walk の理論より L/δ のかわりに $(L/\delta)^{1/2}$ を使う。したがって

$$\text{sheet の面積: } L^2 \times (L/\delta)^{1/2} = (L^5/\delta)^{1/2}$$

$$\therefore \sigma_s = \left(\frac{L^5}{\delta}\right)^{1/2} / \left(\frac{L^3}{\delta}\right) = \left(\frac{\delta}{L}\right)^{1/2} \quad (4-1)$$

ゆえに energy dissipation rate は large scale motion によるものと sheet 内部のものに分かれて

$$\varepsilon = \nu \bar{w}^2 = \varepsilon_0 (\text{straining motion によるもの}) + \varepsilon_1 (\text{sheet によるもの}) \quad (4-2)$$

$$\varepsilon_0 = \nu \left(\frac{U}{L}\right)^2 (1 - \sigma_s) \sim \nu \frac{U^2}{L^2} = \frac{1}{Re} \frac{U^3}{L} \quad (4-3)$$

$$\varepsilon_1 = \nu \left(\frac{U}{\delta}\right)^2 \sigma_s = \frac{1}{Re^{1/2}} \frac{U^3}{L} \quad (4-4)$$

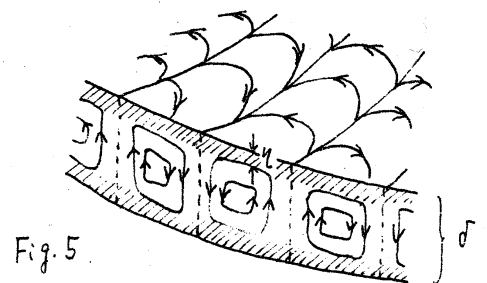
となる。これをみてわかるように $Re \gg 1$ ならば $\varepsilon_1 \gg \varepsilon_0$ となり、高 Reynolds 数の Turbulence では sheet 中の dissipation rate が大きいことがわかる。また ε_0 も ε_1 もともに ν (すなわち Re) に依存しており、Kolmogoroff の仮説は満足されない。このために Primary Cascade だけで Kolmogoroff の仮説を説明することが不可能で、別の Cascade を考えねばならない。以上が Saffman による説明であるが、たとえ Primary Cascade で Kolmogoroff の microscale が説明できなくても、何らかの平衡状態あるいは準平衡状態が存在すると考えるのは当然である。事実 Primary Cascade によってできる sheet の厚さ δ は Taylor の microscale λ に対応している。いまこの波数領域でエネルギー・スペクトルが ν に独立であると仮定すれば次元解析より

$$E(k) \propto u^2 k^{-1} \quad (4-5)$$

のようなスペクトル形ができるが、実際は (4-4) からわかるように ν に独立ではない。このため単純な次元解析からスペクトル形を求めることはできそうもない。

(b) Secondary Cascade

いったん vortex sheet ができて、それが平均流の方向に曲がるといわゆる Görtler vortex なる安定な



2次運動が生じる。これを sheet の断面からみると Fig. 5 のように cell 構造をしており、この cell 端の境界層 (斜線をほどとした部分) を考えてみると

$$\eta = \sqrt{\frac{\nu \delta}{u}} = (\nu^3 L / u^3)^{\frac{1}{4}} \quad (4-6)$$

となり、ここではじめて $\nu^{\frac{3}{4}}$ に比例する長さを得ることができた。energy dissipation rate は

$$\varepsilon_2 \sim \nu \left(\frac{u}{\eta}\right)^2 \frac{\eta}{\delta} \sigma_5 = \frac{u^3}{L} \quad (4-7)$$

となり ν に独立であり、Kolmogoroff の仮説をみたす。よって

$$\eta = (\nu^3 / \varepsilon_2)^{\frac{1}{4}} = l$$

すなわち Kolmogoroff の microscale とは vortex sheet に生ずる Görtler vortex の境界層の厚さに対応する。Saffman のこの提案はあくまでも 1 つの可能性であって現実にそうであるかどうかはわからない。しかしながら、1次元 Burgers 乱れや 2次元 Turbulence がその特徴的な長さとしてそれぞれの内部境界層の厚さに対応していることに対して、やはり 3次元の場合も 3次元に特有でかつ可能な境界層に対応していると考えるのはもっともらしい。すなわち 3次元でなくては絶対に起り得ない形態をとるということである。

いままで主として vortex sheet について述べてきたが、vortex tube を考えた場合でもやはりその直径は Kolmogoroff の microscale と一致しない。この場合もやはり

Secondary CascadeとしてTaylorのInstabilityを考へて、このためにできる2次的運動の境界層を考へれば良いことがSaffmanによつて示されている。

Tennekes(1968)はFig.6のようなSaffmanと若干異なつた3次元Turbulenceの直観的modelを考へている。大規模なstraining motionによつてやはりTaylorのmicroscale δ ($\sim \nu^{1/2}$)を持つeddyができることは共通である。さらにTaylor microscaleを持つeddyの中にKolmogoroff microscaleを直径として持つvortex tubeができ、かつそのvortex tubeの中の特徴的な速度による運動エネルギーの平均値はvortex tubeの占める体積に比例するとして

$$u^2 \rightarrow u^2 \frac{\eta^2}{\delta^2} \quad (4-8)$$

と考へれば、vortex tubeの中のenergy dissipation rateは

$$\varepsilon_2 \sim \nu \frac{u^2}{\eta^2} \frac{\eta^2}{\delta^2} = \nu \frac{u^2}{\delta^2} \sim \frac{u^3}{L} \quad (\nu \text{は独立}) \quad (4-9)$$

となることが示される。この考へ方にとりて特定のものに決定する必要はない。しかしながらこの考へ方も結局2段階の減衰過程を考へていることはSaffmanの場合と共通している。

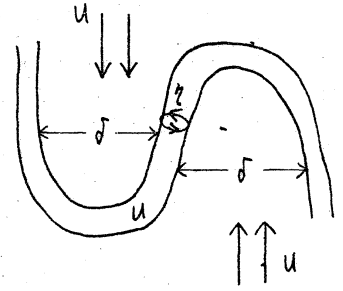


Fig. 6

§ 5. 今後の問題点

それぞれの次元に対応して乱れの性質が異なることをみてきた。特に3次元Turbulenceの構造は1次元Burgers乱れのそれに比べてかなり複雑である。まして1次元Burgers乱れでは厳密解がわかっているが、現実のTurbulenceの場合には適当な厳密解を求めることは困難である。Townsend(1951)はBurgers(1951)によって見つけられた線型化されたNavier-Stokes方程式の定常解をvortex sheetとみなしてそのrandom collectionによってエネルギー・スペクトルを求めると k^{-2} に比例することがわかった。要するにこのような単純な定常解ではTurbulenceを十分表現することはできない。原理的にはNavier-Stokes方程式の大域解は定常解では2,3次元で存在し非定常解も少くとも2次元では存在することが証明されている。Navier-Stokes方程式の厳密解に対する具体的な研究はそれほど多くはない。Weinbaum and O'Brien(1967)によればそれらは大別して (i) 線型解 (ii) irrotational flowの解 (iii) Betrami's flowの解 (iv) vorticityが流線上で一定の特別な2次元flowの特別な解 (v) vorticityが中心軸に比例するような軸対称流の特別な解 などAに限られる。(i)と(ii)はvortex sheetやvortex tubeを決して表わせないだろう。若干の可能性は(iii), (iv), (v)に残されているが、これらがTurbulence

の基本単位である vortex sheet や vortex tube の解として妥当であるという保証はない。

十分発達した Turbulence は intermittent な性質を持つといわれる。非線型効果と粘性効果の兼ね合いなどのような intermittency が発生するかそしてその構造はどうかを現実の Turbulence についてさらに深く追究することが、今後の Turbulence の研究に何らかの展望を与えらると思われる。

参考文献

- Batchelor, G. K. 1969: Phys. Fluids, 12, II-233
 Burgers, J. M. 1951: Unpublished lectures
 Cole, J. D. 1951: Quart. App. Math., 9, 225
 Kraichnan, R. H. 1967: Phys. Fluids, 10, 1417
 Leith, C. E. 1968: Phys. Fluids, 11, 671
 Lilly, D. K. 1969: Phys. Fluids, 12, II-240
 Saffman, P. G. 1966: Topics in non-linear physics, Springer-Verlag
 Tennekes, H. 1968: Phys. Fluids, 11, 669
 Townsend, A. A. 1951: Proc. Roy. Soc. A208, 534
 Weinbaum, S. and O'Brien, V. 1967: Phys. Fluids, 10, 1438