

## 制限3体内題と Twist Mapping の擾動

京大 理 丹羽敏雄

### §1. Poincaré の制限3体内題

Newton 引力に従って空間内を動く3つの質点  $P_1, P_2, P_3$  の運動を調べる内題で、2体  $P_1, P_2$  はそれぞれの重心の回りを一定の角速度で円軌道を描きながら回転するとき、質量が無視できるほど小さい、可なり大質量の質点  $P_3$  の運動（それは  $P_1, P_2$  の軌道面を動くものとみる）を調べる内題を  $\epsilon < 1$  Poincaré の平面制限3体内題という。この内題で特に興味があるのは、いわゆる正3角形解 (Lagrange 解) の安定性の内題であるが、これは最近解決されたといつてよい。

ここに詳しくは述べないがこれは次のような Mapping の ~~Poincaré~~ 擾動と深く関係する。

定義 (Twist Mapping of the Annulus) (J. Moser)

$$D \equiv \{ (R, \theta) ; 1 \leq R \leq 2, \theta : \text{mod } 2\pi \}$$

$$M : D \rightarrow D : (R, \theta) \mapsto (R_1, \theta_1)$$

$$\begin{cases} R_1 = R \\ \theta_1 = \theta + \alpha + \epsilon r(R) \end{cases} \quad \frac{dr}{dR} \neq 0$$

## §2. Kolmogorov の制限3体問題

a) 等しい質量をもった2体  $P_1, P_2$  がそれぞれの重心のまわりを一般に楕円軌道を描きながら回転し、質量0の中3体  $P_3$  がその重心を通り  $P_1, P_2$  の軌道面に垂直な直線上を動くとき、この  $P_3$  の運動を調べる問題を我々は Kolmogorov の制限3体問題と呼ぼう。この問題は、いわゆる final motion の分類の問題、とくに capture の存在と関連して調べられてきたが、Aleksseev によりこの問題に symbolic dynamics の手法が使えることが明らかになるに及んで別の意味の興味をひきおこしている。

b) 測度論的 dynamical system の理論 (それを flow の理論と呼ぼう) はその源の1つに3体問題をもつてはいるが、そこにはその有効性はあまりなかった。1つには、有限の不変測度が一般には存在しない為であり、また存在して知られてきた例では、その上での運動は簡単な概周期運動に帰着され、エルゴード的概念はさほど必要とされなかったからである。

他方、3体問題をほなれ一般のカ学系においては、コンパクトな負曲率をもつ Riemann 面上の geodesic flow をその重要な例として  $Anosov$ -flow ( $C$ -flow) があるいはその一般化と見なしている撞球問題においては、

flow の理論の有効性は疑い深い。これらの問題は、また symbolics dynamics や 確率過程の理論とのかかわりの  
 所かであり、非常な発展をみせたことについてお話しする  
 こともない。

これから紹介する Kolmogorov の制限系体内問題に関する、  
 あるいはこれに端を発した Alekseev の理論は、これらの  
 間に橋をかけるものとして重要なものと思われる。

### §3. 問題の定式化.

空間に固定された座標系  $O-x_1x_2$  を考え、2つの等しい  
 質量をもった2質点が原点  $O$  をそれぞれの重心として  $x_2$ -平  
 面上を楕円軌道を描きながら、周期  $2\pi$  で回転しているものと  
 する。このとき質量  $0$  の方の質点が  $x_1$ -軸を滑っているもの  
 となれば、その運動方程式は、単辺系を適当にとれば、次  
 の方程式になる:

$$\ddot{x} = -x(x^2 + r_0^2(t))^{-3/2} = -\frac{\partial}{\partial x} U_0(x, t) \quad (\dot{\phantom{x}} = \frac{d}{dt})$$

$$U_0(x, t) \equiv \int_0^x x(x^2 + r_0^2(t))^{-3/2} dx$$

ここで  $r_0(t) = \overline{OP_1} = \overline{OP_2}$  であり、周期  $2\pi$  の周期関  
 数である。とくに楕円軌道の偏心率  $e$  が十分小さいときは、

$$r_0(t) = 1 - e \cos t + \dots$$

で与えられる。

この方程式で与えられる軌道の質点  $P_3$  の運動を調べるには cross-section の方法が有効である。亦たわら、質点  $P_3$  が原点  $O \in$  通過する瞬間の系の state は、 $P_3$  の速さ  $v (\geq 0)$  と質点  $P_1, P_2$  の楕円運動の phase  $\tau (= \text{mean anomaly})$  によつてきまる。このとき  $(v, \tau)$  を平面直の極座標と考へれば、 $P_3$  が再び原点  $O \in$  通過する瞬間の state  $\varepsilon (v, \tau')$  とすれば、写像

$$S_\varepsilon: R_e^+ \longrightarrow R_e^- : (v, \tau) \longmapsto (v', \tau')$$

$$R_e^\pm \subset \mathbb{R}^2$$

は  $\mathbb{R}^2$  の local diffeo.  $\varepsilon$  による。多くの点で  $P_3$  の運動を調べることは、この写像  $S_\varepsilon$  の研究に帰着する。

$\varepsilon = 0$  , 亦たわら 2 体  $P_1, P_2$  が円軌道を描く場合、 $S_0$  は

$$R_0^+ = R_0^- = R_0 = \{(v, \tau); 0 \leq v < v_\infty\}$$

$$\frac{1}{2} v_\infty^2 = \int_0^\infty x(x^2+1)^{-3/2} dx$$

$$S_0: R_0 \longrightarrow R_0 : (v, \tau) \longmapsto (v', \tau')$$

$$v' = v$$

$$\tau' = \tau + \gamma(v)$$

$$\gamma(v) \uparrow \infty \quad (v \uparrow v_\infty)$$

で与えられる。(かかる写像  $\varepsilon$  を  $\varepsilon = 0$  は strong twist mapping と呼ばる)  $\varepsilon \neq 0$  の場合  $S_\varepsilon$  は  $S_0$  の擾動と考へられ

る。さて J. Moser の twist mapping が、いわば原点のまわり  
すなわち周期解のまわりを注目するのに対し、我々は  $R_0$  の境界  
 $\partial R_0$  すなわち parabolic motion のまわりを注目する。

#### §4 結果

$Se$  は一般に次の "regularity condition"

" $\partial R e^+ \cap \partial R e^-$  は transversal に交わる"

をみたすと期待されるか (今の所,  $e \ll 1$  のときはたしか  
に満たされるか. 一般の  $e$  に対してはわかっていない) 否 (

$Se$  がこの条件をみたすとすれば我々は次の結果をうる。

$$\omega = [a_n ; m_1(\omega) \leq n \leq m_2(\omega)]$$

$$z = z, \quad -\infty \leq m_1(\omega) \leq 0 < m_2(\omega) \leq \infty$$

$$a_n = (m_n, i_n) \text{ for } m_1 < n < m_2$$

$$z = z, \quad m_n \in \mathbb{N}, \quad m_n \geq N, \quad i_n = 0 \text{ or } 1$$

$$a_{m_1} = (v^-, i_{m_1}), \quad 0 \leq v^- \leq \delta, \quad i_{m_1} = 0 \text{ or } 1, \quad m_1 \neq -\infty$$

$$a_{m_2} = v^+, \quad 0 \leq v^+ \leq \delta, \quad m_2 \neq \infty$$

$$\Omega = \{ \omega \}$$

$$\Delta^+ \equiv \{ \omega \in \Omega ; m_2(\omega) \neq 1 \}$$

$$\Delta^- \equiv \{ \omega \in \Omega ; m_1(\omega) \neq 0 \} = T \Delta^+$$

$$T: \Delta^+ \rightarrow \Delta^-, (\Delta^\pm \subset \Omega) \text{ shift:}$$

$$(T\omega)_n = \omega_{n+1}$$

$\Omega$  には 1 つの自然な topology が入る,  $\varepsilon > 0$  とき:

定理 (Alekseev)

$S_\varepsilon$  が regularity condition をみたすとすれば, 特に,  
 $\varepsilon \ll 1$   $\varepsilon$  とき.

$$\exists N, \exists \delta > 0$$

$$\exists \text{ homeo } \varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{s.t.}$$

$$\Omega \supset \Delta^+ \xrightarrow{T} \Delta^- \subset \Omega$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^- \end{array}$$

commutative

この図式は次のような意味で質点  $P_3$  の運動をかなりよくしく記述する.

$\varphi([a_n]) \in \mathbb{R}^2$  を初期状態とする解は次の性質をもつ:  
 $P_3$  は  $t > 0$  において  $N_2$  回原点に回り,  $t < 0$  において  
 $N_1$  回原点に回る.  $N$  回目の帰還に ~~おこ~~  $(n+1)$  回目の帰還  
の間に質点  $P_1$  と  $P_2$  は原点のまわりを  $M_n$  回まわる.  
 $\dot{z}_n = 0$  ( $\omega = 1$ ) はその帰還時に  $P_1$  と  $P_2$  が近日点 (or  
遠日点?) の近くにあることを示す.  $N_2 \neq +\infty$   $\varepsilon$  とき,  $P_3$   
は  $t > 0$  において  $N_2$  回原点に回った後極限の速さか  
 $v^+ = a_{N_2}$  の速さで無限のかなたに飛び去っていくことを示

し,  $m_1 \neq -\infty$  のときと同様に  $t < 0$  において  $|m_1|$  回  
 原点に落ちて  $t \rightarrow -\infty$  のとき  $v^- = 0$  の速さで無限  
 のかたから飛来したことを示す. 従って, この図をみれば,  
 種々の final motion の存在がわかる. 例としては,  
 (complete) capture, oscillatory motion etc.  
 さらに系を12.

Corollary 解析的力学系は energy と angular  
 momentum の関数である.

これは有名な Poincaré の定理よりのもっと強い. すなわち  
 Poincaré の定理では積分が質量に自解析的に依存すること  
 を仮定するに對し, ここではその仮定は不要といふ.

### §5. 方法

方程式  $\ddot{x} = -\frac{\partial}{\partial x} U_e$  と  $\ddot{x} = -\frac{\partial}{\partial x} U_0$  の解を考へ. 下  
 図のように極大点  $(X(u_1, \tau_1), T(u_1, \tau_1))$  と共有するそれら  
 の解が原点を切るときの state をそれぞれ

$$(u_1, \tau_1), (u, \tau)$$

$$\text{とすれば, } (u_1', \tau_1') = S_e(u_1, \tau_1)$$

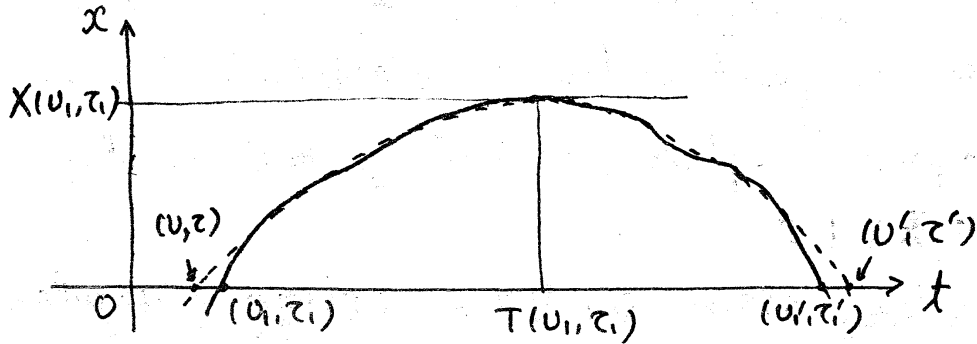
$$(u', \tau') = S_0(u, \tau)$$

$$\text{とし, } T_e^+ : (u_1, \tau_1) \rightarrow (u, \tau)$$

$$T_e^- : (u_1', \tau_1') \rightarrow (u', \tau')$$

とあるとき,

$$S_e = (T_e^-)^{-1} S_0 (T_e^+).$$



実線は  $\ddot{x} = -\frac{\partial}{\partial x} U_e(x, t)$  に対応する解  
 点線は  $\ddot{x} = -\frac{\partial}{\partial x} U_0(x)$  " "

さらに  $(C_{u_0}^\pm \equiv \{T_e^\pm\}^{-1} \{(u, z); v = U_0 \leq U_{u_0}\})$   
 とすれば,  $C_{u_0}^+, C_{u_0}^-$  はそれぞれ  $Re^+, Re^-$  内の原点の  
 周りを囲む閉曲線となる。

$$S_e(C_{u_0}^+) = C_{u_0}^-.$$

$e=0$  のときは  $C_{u_0}^+$  と  $C_{u_0}^-$  は一致するが  $e \neq 0$  に  
 対しては一般にそれらは分離する。  $S_e$  は面積を保存する変換で  
 あるから、常に  $C_{u_0}^+$  と  $C_{u_0}^-$  は交点をもつが、必ずしも、  
 それらが transversal に交わるとは限らない。

$$\tau \tau \quad I: (u, \tau) \rightarrow (u, -\tau)$$

とあるとき,

$$T_e^+ = I T_e^- I$$

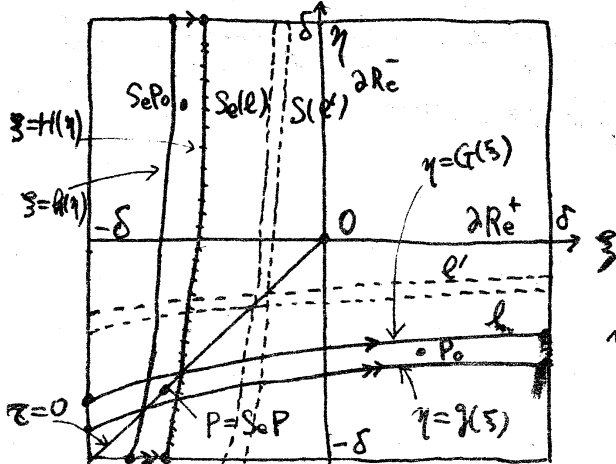


をみたす. このことか容易に  $C_{U_0}^+$  と  $C_{U_0}^-$  は半直線  $\tau=0$  (と  $\tau=\pi$ ) 上で交わることかわかる.  $S_e$  の regularity condition は  $U_0 \rightarrow U_\infty$  のとき,  $C_{U_0}^\pm$  は  $\tau=0$  ( $\tau=\pi$ ) 上で transversal に交わることを意味する. 従って  $S_e$  は次のように表わされる:

$$\left| \frac{\partial}{\partial \tau} U_0(X(U, \tau, U)) \Big|_{\tau=0} \right| > \epsilon > 0$$

$$\text{for } U \uparrow U_\infty : (U, \tau) = T_0^+(U_0, \tau)$$

この regularity condition と  $S_e$  が strong twist mapping の性質をもち,  $(U_\infty^e, 0) \in \partial \text{Re}^+ \cap \partial \text{Re}^-$  の近傍で写像  $S_e$  は次のような性質をもち,  $(\xi, \eta) \in$  この近傍の座標系で  $\xi = \text{const.}$  の曲線  $C_{U_0}^-$  を表わし,  $\eta = \text{const.}$  の曲線  $C_{U_0}^+$  を表わす; 同様のことをすれば,  $S_e$  はこの座標系に因り二次の図で表わされるような写像となる.



$$\begin{aligned} \eta = g(\xi) &\xrightarrow{S_e} \eta = \pm \delta \\ \xi = G(\eta) & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi = \pm \delta &\xrightarrow{S_e} \xi = h(\eta) \\ \eta = H(\xi) & \end{aligned}$$

$$\max \left\{ \left| \frac{dg}{d\xi} \right|, \left| \frac{dG}{d\eta} \right|, \left| \frac{dh}{d\eta} \right|, \left| \frac{dH}{d\xi} \right| \right\} \ll 1$$

$$S_\varepsilon: (S, \eta) \rightarrow (S', \eta')$$

とすれば

$$dS = \begin{pmatrix} dS' \\ d\eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0(1) & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dS \\ d\eta \end{pmatrix}, \quad M \gg 1.$$

これらの性質は有名な Smale の "horse shoe" と類似であって、これらのおかげで、§4 で述べた結果をえることができる。

— 参考文献 —

- [1] V. Alekseev: Quasi-random dynamical systems I, II, III; Mat. Sb. 76. p.p. 72~134, 77. p.p. 545~600, 78. p.p. 1~43
- [2] ———: Sur l'allure finale du mouvement dans le problème des trois corps; Actes, Congrès intern. Math., 1970 Tome 2 p.p. 873~907
- [3] J. Chazy: Sur l'allure finale du mouvement dans le problème des trois corps; J. Math Pures Appl. (1929) p.p. 353~380
- [4] C. Siegel - J. Moser: Lectures on celestial mechanics, (Springer)
- [5] S. Smale: Differentiable dynamical systems, Bull. A.M.S. 73 (1967) p.p. 747~817