

撞球問題について

名大 理 久保 泉

§ 1. はじめに

凡そ、百年前、Boltzmann, Maxwell 等は、古典力学の考察から熱学的現象を説明しようという大胆な試みを企てた。彼等は、非常に多くの粒子系における物理量のある種の平均量が熱学的量になることを主張した。その“平均”の意味付に関連して、一つの仮説が提唱された。後には、エルゴード仮説として定式化されるように、特殊な系を除けば、“エネルギー曲面上の関数の時間平均は、Liouville の不変測度による平均に等しい”という主張であった。Liouville の不変測度のもう一つ別の側面である、Poincaré の“再帰定理”が、天体力学の安定性の研究に関連して見出され（丹羽氏の項をも参照されたい）、暫くのちに、Zermelo によって、Boltzmann の理論への反証として、それが使われた。このようにして、エルゴード仮説と再帰定理が前世紀了りから、

今世紀へかけて数理物理の興味ある対象として登場した。再帰定理は, Caratheodory 等によって, 有限測度空間上の保測変換に対して証明され一応の解決を得たが, エルゴード仮説の問題は, Weyl の 1914年頃の研究を除いて, 1930年代まで, 見るべき進展がなかった。1931年 Birkhoff の個別エルゴード定理が発表されると, Koopman, Hopf, Neumann, Wintner, Khintchine, Seidel, Hedlund 等の研究が百花齊放と咲いた。この時期の研究者は, 一気に, エルゴード仮説の証明が出来るかと勇躍したと想像される。しかし, 本質的な結果は, Birkhoff の個別エルゴード定理, Neumann のスペクトル定理, エルゴード性と計量的可遷性の同値定理 の三つに要約され, 重要な例として, エルゴード性が示されたのは, Seidel のパイコね変換, Hedlund = Hopf の定負曲率空間の測地的 flow, Hopf の負曲率空間の測地的 flow のエルゴード性であった。本来の目的である多粒子系のエルゴード性を示すのには, まだ遠い結果にみえるが, Hedlund と Hopf は, 非常に重要な概念と手段に到達していた。それは transversal foliation を使うことであるが, 30年後に, Anosov = Sinai によって C -system (Anosov system) として一般化・成功するまで生かされなかった。事実, Sinai の撞球問題のエルゴード性を証明する

ためには、1940年までに得られた結果が必要にしてかつ充分である。

さて、謂ゆるエルゴード理論と呼ばれる分野の研究において、エルゴード仮説を正面から取り上げた研究は、1963年の Sinai まで跡絶えるが、途中1950年代に、Kolmogorov が、エントロピーと K -system の概念を導入したことと、Gelfand = Fomin が定負曲率空間の測地的 flow のスペクトルが σ -ルベグであることを示したことは注目されてよい。

60年代に入ると、Sinai が、中心カポテンシヤルをもつ、多粒子系が、拡大及び縮小する transversal foliation をもつことに気づき、そのような系のエルゴード性を主張した（実際に完全な証明は1970年の Sinai の撞球問題だけである）。

一方、Sinai は、transversal foliation をもつ系において、エルゴード性を証明する一般論を与えると同時に、Anosov と共に transversal foliation をもつ系として、 C -system の定義を与えた。

C -system の研究には、エルゴード理論の立場からだけでなく、確率論の立場からも興味深いものがある。ついに、1970年、二次元トーラス上の二つの円板の運動が、撞球問題と彼が呼ぶ系に帰着されることと、撞球問題のエルゴード性を示した Sinai は、本来のエルゴード仮説に挑戦して、成功した二人目の研究者となった。

§ 2. Transversal foliation とエルゴード性.

簡単に, Hedlund-Hopf-Sinai の方法を解説しよう。まず Birkhoff の個別エルゴード定理から始める。 (X, \mathcal{B}, μ) を全測度 1 の測度空間, T を 1 対 1, onto, 両可測 (i.e. $T\mathcal{B} = \mathcal{B}$), 保測 (i.e. $\mu(A) = \mu(TA)$, $A \in \mathcal{B}$) な X 上の変換とする。

定理 1 (Birkhoff) 任意の $f \in L^1(\mu)$ に対して,
 二つの極限; $\bar{f}^+(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x)$, $\bar{f}^-(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^{-k} x)$
 が, 殆んど全ての x に対して存在し, $\bar{f}^+(x) = \bar{f}^-(x)$ a.e.

この定理は, 保測な変換の系 $\{S_t; -\infty < t < \infty\}$ が, $S_t S_s = S_{t+s}$ を充し, 写像 $(t, x) \rightarrow S_t x$ が可測なとき $\{S_t\}$ を flow と呼ぶが, flow に対して, 和を t に関する積分に置代えても成立する。

さて, Sinai は可測な fibre 構造の概念を与えた。 X を多様体とし, U を可測な部分集合, \mathcal{C} は U の可測分割で各要素 C_ξ は X における区分的に滑らかな n -次元開部分多様体であり n -次元南球と同相, 可測な正函数 $p_\xi(x)$ が存在して

$$\mu(A | C_\xi) = \int_{A \cap C_\xi} p_\xi(y) d\mathcal{S}_{C_\xi}(y)$$

但し, \mathcal{S}_{C_ξ} は, C_ξ の metric p_{C_ξ} から導かれる体積要素, と表わされるとき, \mathcal{C} は U における局所的な可測 fibre 構造と

呼ぶ。大雑把に言って、このように可算個の (U_i, ξ_i) があつて、 $\{U_i\}$ が B を生成しており、 $U_{i_1} \cap U_{i_2} \ni x$ に対して $C_{\xi_{i_1}} \cap U_{i_2} = C_{\xi_{i_2}} \cap U_{i_1}$ が成立し、 n -次元の区分的に滑らかな南部分多様体のとき、可測な fibre 構造 Z が与えられたといふ。 Z は空間 X の fibre Γ への分割を定める。

X 上の保測変換 T の transversal fibre Z とは、可測 fibre 構造 Z の各 fibre Γ に対し、 $T^{-1}\Gamma$ が再び Z の fibre であるときに言ふ。 Γ 上の正則な実数 λ に於て、 Γ の単位接ベクトル l に対し、 l 方向長さ Δ の曲線 γ をとり、 $T^{-1}\gamma$ の長さを Δ' とする。 $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Delta'}{\Delta} = \lambda_l(x)$ とおき、 $\lambda_l(x) > 1 \quad \forall x \in X$ ならば、 Z は拡大していると言ふ、 $\lambda_l(x) < 1 \quad \forall x \in X$ ならば縮小していると呼ぶ。

このような Z と T のエルゴード性の関係を説明しよう。

$f(x) \in X$ の一様連続な函数とする。 Z が拡大するならば、 Γ の任意の二実 x, y に対して、 x と y を結ぶ Γ 上の曲線 γ を考えれば、 $T^n\gamma$ の長さは $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する。

f の一様連続性から、 $f(T^n x) - f(T^n y) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, であるから、Birkhoff の個別エルゴード定理より、

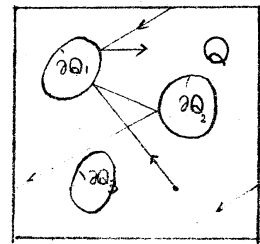
定理 2. Z が拡大すれば、 $\bar{f}^+(x)$ は各 Γ 上で定数であり、縮小すれば、 $\bar{f}^-(x)$ は各 Γ 上で定数である。

この定理から、例えば、 k 次元の縮小する $Z^{(k)}$ と l 次元の拡大する $Z^{(l)}$ が与えられ、 $l+k = \dim X$ 、であり、局所的に、 $Z^{(k)}$ と $Z^{(l)}$ が測度空間に適合した座標系を与得るならば、 $\bar{f}^+(x) = \bar{f}^-(x)$ はそのような近傍で定数 (a.e. μ) になり、ほぼ T がエルゴード的になる条件を与えている。

C -system においては、拡大及び縮小する transversal fibre が存在して、上のような事実が成立しエルゴード的になる。

§ 3. Sinai の撞球問題

左図のように、二次元トーラス内の連結領域 Q があって、その境界 ∂Q は、滑らかで凸な閉曲線 $\partial Q_1, \partial Q_2, \dots, \partial Q_n$ から成っているとする。 Q の内部にある単位質量を



もつ質点が、速さ 1 で慣性運動をして、壁 ∂Q で弾性反射をしている系を考える。位置 q 、速度 p ($\|p\|=1$)、から出発して、時刻 t 後の位置を (q_t, p_t) とするとき、

$$S_t(q, p) \equiv (q_t, p_t)$$

でエネルギー-曲面 M 上の保測変換 $\{S_t\}$ を定義する。問題は $\{S_t\}$ がエルゴード的かどうかということである。

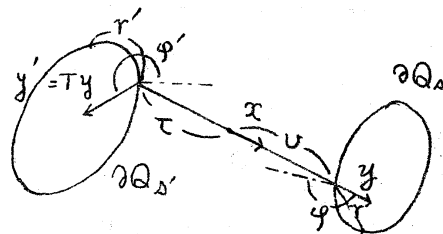
$\{S_t\}$ に関して、拡大及び縮小する一次元の可測な transversal

foliation を構成しよう。負曲率空間の測地的 flow に対し
て与えられている Hopf の一般的構成法に従えば次のように
すればよい。 π を M から Q への射影, $\pi(y, p) = q$ とする。
各 $x \in M$ に対して,

$$\Gamma^{(c)}(x) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} S_t \pi^{-1} \pi(S_{-t} x), \quad \Gamma^{(e)}(x) \equiv \lim_{t \rightarrow -\infty} S_t \pi^{-1} \pi(S_{-t} x)$$

が x を通る縮小 並に拡大する foliation である。滑らかな系で上の極限が x の近傍で自然な意味をもち、かつ存在することは明らかだが、我々の系は特異性をもっているために自明ではない。我々は次のように考えた方がより有効である。まず、 M は次のような fibre bundle 構造をもっていることに注意しよう。 $M_1 \equiv \{x; \text{入射ベクトル}, x \in \pi^{-1}(\partial Q)\}$ 。

M_1 の点 y は、 $\pi(y) \in \partial Q_\Delta$,
 $\pi(y)$ における内向法線となす
角 φ , ∂Q_Δ 上の定長から弧長
 r とすると (s, r, φ) によ



て座標表示される。 $x \in M$ に対して,

$$v(x) \equiv \inf \{t \geq 0; \pi(S_t x) \in \partial Q\}, \quad \tau(x) \equiv \sup \{t < 0; \pi(S_t x) \in \partial Q\}$$

と定義すれば、 x は (s, r, φ, v) で座標表示される。

$y \in M_1$ に対して、 $Ty \equiv S_{\tau(y)-0} y$ で、 M_1 上の変換 T
を定義すれば、 $\{S_t\}$ は、 v -座標の shift と T によって記
述される。更に $\{S_t\}$ がエルゴード的である為には、 T が

エルゴード的であることが必要十分である。

従って、 T を調べるには十分であるが、もっと都合のよいことには、 T の transverse fibre を構成すれば、 $\{S_t\}$ の transversal fibre も構成される。構成の準備として、次の Lemma を述べる。

Lemma 1. γ は M_1 上の滑らかな曲線、 T^{-1} が γ 上で連続。

$\gamma_t \equiv T^{-1}\gamma$, $(r_t, \varphi_t) = T^{-1}(r, \varphi)$ ($r, \varphi) \in \gamma$ と記せば

$$(1) \quad \frac{d\varphi}{dr} = -\kappa(r) - \frac{\cos \varphi}{\tau(r, \varphi) - \frac{\cos \varphi_t}{\frac{d\varphi_t}{dr_t} - \kappa(r_t)}}$$

$$(2) \quad \frac{d\varphi}{d\varphi_t} = \left[\frac{\kappa(r)}{\cos \varphi} (\cos \varphi_t + \tau(r, \varphi) \kappa(r_t)) + \kappa(r_t) \right] \frac{dr_t}{d\varphi_t} - \left[1 + \frac{\tau(r, \varphi) \kappa(r)}{\cos \varphi} \right]$$

$$(3) \quad \frac{dr_t}{dr} = -\frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_t} \left[1 + \frac{\tau(r, \varphi)}{\cos \varphi} \left(\frac{d\varphi}{dr} + \kappa(r) \right) \right]$$

但し、 s -座標は省略、 $\kappa(r)$ は $r \in \partial Q$ における ∂Q の曲率。

集合 S を $S = \{(r, \varphi); \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ or } \frac{3}{2}\pi\}$ とおき、 $S \cup T^{-1}S$ 及び $S \cup TS$ は高次元可算本の曲線からなり、 M_1 を連結部分 $\{X_j^{(0)}\}, \{X_j^{(1)}\}$ に分割し、各 $X_j^{(0)}$ 上では T^{-1} が滑らか、 $X_j^{(1)}$ 上では T が滑らか。

$d(x)$ を x から $S \cup T^{-1}S$ までの距離とする、 $\eta = \min \kappa(r), \min |\tau|$ とおき M_1 上の滑らかな曲線 γ に対し、 $\theta(\gamma)$ を φ -方向の全変動、 $\rho(\gamma)$ を r -方向の全変動とすると次のことが成り立つ。

(1°) $\log d(x)$ は可積分

$$(2°) \quad D(x) = C_2 \frac{\int_0^\infty \frac{2(1+\eta)^{-L}}{d(T^{-L}(x))} < x \text{ a.e. } \mu, \quad C_2 = \left(1 + \frac{1}{\min \kappa(r)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

(3°) γ が減少曲線, $x \in \gamma$, $\theta(\gamma) \leq \frac{1}{2c_2} d(x)$ ならば,

$$d(y) \leq \frac{1}{2} d(x), \quad y \in \gamma, \quad \theta(T\gamma) \geq (1+\eta)\theta(\gamma)$$

であり, γ 上で T が滑らか.

$x_n \equiv T^{-n}x$ を通る滑らかな曲線 $\gamma_n^{(n)}$ をとり勾配は $-(\min k(r))^{-1}$ 以下にする. 曲線 $\tilde{\gamma}_i^{(n)} \subset T^{n-i}\gamma_n^{(n)}$ を次のように順次採る.

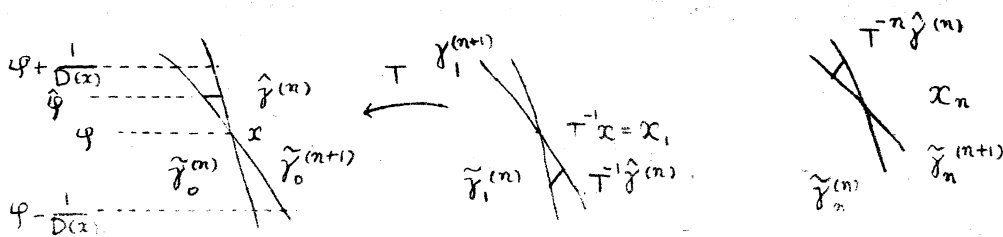
$$\theta(\tilde{\gamma}_n^{(n)}) = \frac{1}{2c_2} d(x_n), \quad x_n \in \tilde{\gamma}_n^{(n)}$$

$$\theta(\tilde{\gamma}_{i-1}^{(n)}) = \min\left(\frac{1}{2c_2} d(x_{i-1}), (1+\eta)\theta(\tilde{\gamma}_i^{(n)})\right), \quad x_{i-1} \in \tilde{\gamma}_{i-1}^{(n)} \subset T\tilde{\gamma}_i^{(n)}$$

このとき, (2°) と (3°) から, $\theta(\tilde{\gamma}_0^{(n)}) \geq \frac{1}{D(x)} > 0$ が得られ, また T^n は $\tilde{\gamma}_0^{(n)}$ 上で滑らかになることが分かる. この $\tilde{\gamma}_0^{(n)}$ が $n \rightarrow \infty$ のとき区間 $[\varphi - \frac{1}{D(x)}, \varphi + \frac{1}{D(x)}]$ である $\tilde{\gamma}_0$ に一様収束する. 何故なら, $\hat{\varphi}$ をこの区間からとると, 高さ $\hat{\varphi}$ の水平線が $\tilde{\gamma}_0^{(n)}$ と $\tilde{\gamma}_0^{(n+1)}$ によって切りとられる線分 $\hat{\gamma}^{(n)}$ に対し,

$$\text{Lemma 1 (1) より, } \rho(\hat{\gamma}^{(n)}) \leq \frac{(1+\eta)^{-n}}{|\cos \hat{\varphi}|} \rho(T^{-n}\hat{\gamma}^{(n)}) \leq \frac{\text{const } (1+\eta)^{-n}}{|\cos \hat{\varphi}|}$$

が得られる.



構成の仕方から, $x, D(x) < \infty$, に対し $\tilde{\gamma}_0 = \tilde{\gamma}_0(x)$ が一意に決まり, $y \in \tilde{\gamma}_0(x)$ に対しては, $\tilde{\gamma}_0(y)$ と $\tilde{\gamma}_0(x)$ が y の近傍で一致し, $T^{-1}\tilde{\gamma}_0(x) \subset \tilde{\gamma}_0(T^{-1}x)$ が成立することは明らかである.

$T^{(c)}(x) \equiv \bigcup_{n=0}^{\infty} T^n \tilde{\gamma}_0(T^{-n}x)$ が x を通る transversal fibre である.

$\Gamma^{(c)}(x)$ の x を含む連結成分を $\gamma^{(c)}(x)$ と記す。 $\gamma^{(c)}(x)$ の方程式 $\varphi = \varphi(r)$ は, $\frac{d\varphi}{dr} = -k^{(c)}(r, \varphi) \cos \varphi + k(r)$ を充てる。但し,

$$k^{(c)}(r, \varphi) \equiv \frac{2k(r)}{\cos \varphi} + \frac{1}{|\tau(r, \varphi)|} + \dots + \frac{1}{|2k(r_n)/\cos \varphi_n|} + \frac{1}{|\tau(r_{n+1}, \varphi_{n+1})|} + \dots$$

同様に拡大する transversal fibre $\Gamma^{(e)}(x)$, $\gamma^{(e)}(x)$ が構成出来て, §2 で述べたような性質をもっていて, T がエルゴード的であることがわかる。 $\{S_t\}$ の foliation の構成は, $\tilde{x} = (\tilde{r}, \tilde{\varphi}, \tilde{v})$

$\in M$ に対し, $\gamma^{(c)}(x)$, $x = (\tilde{r}, \tilde{\varphi})$, の方程式を $\varphi = \varphi^{(c)}(r)$ とすると,

$$\varphi = \varphi^{(c)}(r), \quad v = \tilde{v} - \int_{\tilde{r}}^r \sin \varphi^{(c)}(r) dr$$

なる方程式で与えられる M 上の曲線を $\tilde{\gamma}(\tilde{x})$ とおき, $\tilde{\Gamma}^{(c)}(\tilde{x}) \equiv \bigcup_t S_{-t} \tilde{\gamma}^{(c)}(S_t \tilde{x})$ とおくことにより得られる。縮小する transversal foliation $\tilde{\Gamma}^{(e)}(\tilde{x})$ も全く同じ方法で $\gamma^{(e)}(x)$ から得られる。

定理 3. Sinai の撞球問題はエルゴード的である。

また, それは拡大及び縮小する transversal foliation をもつ。

さらに, エルゴード理論的に興味ある事実として, $\{S_t\}$ 及び T が K -system であること, 有限エントロピーの generator をもつこと等が言える。

最後になるが, Liouville 測度 μ は $d\mu = \text{const} \cos \varphi dy dr dv$ であること, μ から自然に定まる T の不変測度 ν は, $d\nu = \text{const} \cos \varphi dy dr$ であることを注意しておく。