

Local dynamical system
の category について

神戸大 教養 木村郁雄

§ 1. 序

自励系 $dx_i/dt = f_i(x_1, \dots, x_n)$ ($i=1, \dots, n$) の位相的特徴は $n=2$ の場合 H. Poincaré, I. Bendixson によって詳しくかつ美事に解析されたが, 近年自励系の理論は抽象化されて一般の位相空間内の力学系とか局所力学系といったものが定義されるに到り, 力学系については自励系の位相的性質が全く純粋な形において追求されている。

力学系のこのような位相的研究, すなわち位相的変換によって不変な性質の研究は次の意味でこれらの定性的研究の範疇に入ると考えられる。 \mathcal{C} を力学系あるいは局所力学系の充分に広い class とそれらのある種の morphism よりなる category とする。このとき \mathcal{C} の isomorphism に対して不変な性質を研究するというのが \mathcal{C} の定性的研究の一側面を表わすのではないだろうか。以下の結果はしたがって局

所力学系の定性的研究のための手段を与えるものであると思われる。

\mathcal{C} の morphism としては大きく分けて二つの種類を考える。一つは幾何学的な意味でのもので (NS-morphism と呼ぶ) 軌道を軌道 (の中) に写す連続写像である。もう一つはこのような morphism のうち特に連続な reparametrization が可能であるものであつて GH-morphism と呼ぶものである。

現在までには既に P. Ura [15], O. Hájek [6], D. G. Belanger [2], D. H. Carlson [3] によつて導入された morphism があるが、ここではそれらを含むより一般な morphism をとりあげる。そのために category の object となるべき局所力学系の定義から始めたい ([11], [8], [14], [15] 参照)。

定義 1. X を位相空間, D を $X \times \mathbb{R}$ 内の開集合で

$$D = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times D_x$$

といった形で表わされているものとする。ここで D_x は \mathbb{R} 上の開区間である: $D_x = (a_x, b_x)$ ($a_x < 0 < b_x$)。連続写像 $\pi: D \rightarrow X$ が次の公理系をみたすとき (X, D, π) または π は phase space X 上の local (dynamical) system であると言われる。

I. Identity axiom. $\pi(x, 0) = x, x \in X$.

II. Homomorphism axiom. $(x, t), (x, t + \delta),$

$$(\pi(x, t), s) \in D \Rightarrow \pi(\pi(x, t), s) = \pi(x, t+s).$$

III. Non-extendability axiom. $b_x < \infty \Rightarrow h_\pi^+(x) = \phi$, また $a_x > -\infty \Rightarrow h_\pi^-(x) = \phi$. ここで $h_\pi^\pm(x)$ は $t \uparrow b_x$ (または $t \downarrow a_x$) のときの曲線 $\pi_x(t)$ の触点の集合とする.

定義 2 (T. Ura [15, 161]). (X, D, π) , (Y, E, ρ) を local system とする. 位相写像 $h: X \rightarrow Y$ に対して diagram

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Y \\ C_\pi \downarrow & & \downarrow C_\rho \\ \mathbb{R}^X & \rightarrow & \mathbb{R}^Y \end{array}$$

が可換ならば h は π から ρ への NS-iso. であるという. ここで $x \in X$ のとき $C_\pi(x)$ は x を通る π の軌道 $\pi(x, D_x)$ を表わす. 同様に $C_\rho(y)$ は $y \in Y$ を通る ρ の軌道である.

定義 3 ([15, 161]). (X, D, π) , (Y, E, ρ) を global system となわち $D = X \times \mathbb{R}$, $E = Y \times \mathbb{R}$ とする. 位相写像 $h: X \rightarrow Y$ と連続写像 $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}$ に対して次の diagram が可換であるとする:

$$\begin{array}{ccc} X \times \mathbb{R} & \xrightarrow{(h, \varphi)} & Y \times \mathbb{R} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \rho \\ X & \xrightarrow{h} & Y \end{array}, \quad (h, \varphi)(x, t) = (h(x), \varphi(x, t)).$$

さらに各 $x \in X$ に対して $\varphi(x, \cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が同相写像で $\varphi(x, 0)$

$= 0$ をみたすものとする。このとき (h, φ) は π から ρ への GH-iso. であるという。

GH-iso. に対して次の様な type を考える。

- (0) $\varphi(x, \cdot) : R \rightarrow R$ が体 R の同型写像のとき、すなわち $\varphi(x, t) = t$ のとき。
- (1) $\varphi(x, \cdot) : R \rightarrow R$ が x に無関係で加群 R の同型写像すなわち $\varphi(x, t) = c \cdot t$ ($c \neq 0$) となるとき。
- (2) $x \mapsto \varphi(x, \cdot)$ が連続写像 $X \rightarrow L(R, R)$ (= vector space R の自己同型群) になるとき、すなわち $(h, \rho) : X \times R \rightarrow Y \times R$ が vector bundle iso. のとき。

定義 4 ([15, 16]). $(X, D, \pi), (Y, E, \rho)$ が local system のときは定義 3 を拡張して、次の様な iso. を考える。各 $x \in X, y \in Y$ にそれぞれ開区間 D_x^*, E_y^* が与えられていて $D^* = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times D_x^* \supset D, E^* = \bigcup_{y \in Y} \{y\} \times E_y^* \supset E$ であるとする。 $h : X \rightarrow Y$ を位相写像, $\varphi : D^* \rightarrow E^*$ をある写像とする。各 $x \in X$ に対して $\varphi(x, \cdot)$ は D_x^* から $E_{h(x)}^*$ への位相写像であって $\varphi(x, 0) = 0$ をみたすとする。このとき次の diagram が可換ならば (h, φ) は π から ρ への GH-iso. であるという。可換という意味は $(x, t) \in D$ かつ $(h(x), \varphi(x, t)) \in E$ ならば $h \circ \pi(x, t) = \rho(h(x), \varphi(x, t))$ がなりたつことである:

$$\begin{array}{ccc}
 D^* & \xrightarrow{(h, \varphi)} & E^* \\
 \cup & & \cup \\
 D & \xrightarrow{(h, \varphi)|_D} & E \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \rho \\
 X & \xrightarrow{h} & Y
 \end{array}$$

定理 1 (T. Ura [14]). $(h, \varphi): \pi \rightarrow \rho$ が GH-iso. ならば,
各 $x \in X$ に対して $\varphi(x, \cdot)$ は D_x を $E_{h(x)}$ の上に写す同相写
像である: すなわち $(h, \varphi)(D) = E$ が成り立つ.

定義 5 (T. Ura [15]). GH-iso. $(h, \varphi): \pi \rightarrow \rho$ について
次の type を考える:

(4.5) General GH-iso.

(4.25) φ は $D - S_\pi$ (S_π は π の特異点の集合) で連続.

(4) φ は D で連続.

(3.5) $D^* = X \times \mathbb{R}$, $E^* = Y \times \mathbb{R}$.

(3.25) type 3.5 かつ type 4.25.

(3) type 3.5 かつ type 4.

(2.5) type 3.5 であって $x \mapsto \varphi(x, \cdot)$ が $X \rightarrow L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ の写
像に成るとき, すなわち $\varphi(x, t) = c(x) \cdot t$, $c(x) \neq 0$.

(2.25) type 2.5 であって, $c(x)$ が $X - S_\pi$ で連続.

(2) type 2.5 かつ $c(x)$ が連続.

(1) type 2 かつ $c(x) \equiv \text{const.} = c$.

(0) type 1 として $c = 1$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \underline{\text{系.}} & (0) & \Rightarrow & (1) & \Rightarrow & (2) & \Rightarrow & (3) & \Rightarrow & (4) \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & (2.25) & \Rightarrow & (3.25) & \Rightarrow & (4.25) & & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & (2.5) & \Rightarrow & (3.5) & \Rightarrow & (4.5) & &
 \end{array}$$

定理 2. $(h, \varphi): \pi \rightarrow \rho$ が GH-iso. ならば $h: X \rightarrow Y$ は π から ρ への NS-iso. である.

定理 3 (T. Ura [15]). X, Y が Hausdorff のとき $(h, \varphi): \pi \rightarrow \rho$ が type n.5 であれば (h, φ) は type n.25 である.

定理 4 (I. Kimura [9]). X, Y が T_1 ならば NS-iso. $h: \pi \rightarrow \rho$ に対して適当に $\varphi: D \rightarrow \mathcal{R}$ を作れば $(h, \varphi): \pi \rightarrow \rho$ は GH-iso. になる.

§2. Morphism

D. G. Belanger [2] は global system π, ρ について $\mathcal{S}_\rho = \emptyset$ のとき, 位相写像 $h: X \rightarrow Y$ が $h(C_\pi(x)) \subset C_\rho(h(x))$, $x \in X$ をみたせば, 連続な $\varphi: X \times \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ が存在して $h \circ \pi(x, t) = \rho(h(x), \varphi(x, t))$ となることを示した.

また D. H. Carlson [3] は local system に対して上述の h として連続写像をとり, φ が type 0 の morphism を扱っている. これらのことを考慮して次の様な morphism を導入する.

定義 6. π, ρ を local system, $h: X \rightarrow Y$ を連続写像

とする. $h(C_\pi(x)) \subset C_\rho(h(x))$, $x \in X$ がなりたつとき h は π から ρ への NS-mor. であるという.

また連続写像 $h: X \rightarrow Y$ と写像 $\varphi: D \rightarrow R$ が次の条件をみたすとき (h, φ) は π から ρ への GH-mor. であるという:

- I. 各 $x \in X$ に対して $\varphi(x, D_x) \subset E_{h(x)}$ かつ $\varphi(x, \cdot)$ は連続.
- II. $\varphi(x, 0) = 0$, $x \in X$.
- III. $h \circ \pi(x, t) = \rho(h(x), \varphi(x, t))$, $(x, t) \in D$.

GH-mor. (h, φ) の type わけは iso. の場合と同様に可能である. φ の連続性は type n.25 に対しては

$h^{-1}(S_\rho) \times R$ を除いて要求する.

定理5. $h: (X, D, \pi) \rightarrow (Y, E, \rho)$ が NS-mor. であって Y が Hausdorff ならば適当な $\varphi: D \rightarrow R$ をとれば (h, φ) は π から ρ への GH-mor. になる.

定理6. $(h, \varphi): (X, D, \pi) \rightarrow (Y, E, \rho)$ が GH-mor. であって Y が Hausdorff ならば (h, φ) は type 4.25 である.

この証明には T. Ura [15] の方法がそのまま使われる.

定義7. $(h, \varphi), (k, \psi): (X, D, \pi) \rightarrow (Y, E, \rho)$ を GH-mor. とする. $h = k$ かつ $\varphi(x, t) = \psi(x, t)$, $(x, t) \in D - h^{-1}(S_\rho) \times R$ のとき $(h, \varphi) \sim (k, \psi)$ であるとして, この同値関係による同値類が一つの morphism, GH'-mor. を定義すると考える.

(h, φ) が *type n* のときは, それにより表わされる GH'-mor. は type n であるという.

§3. Local system および morphism の局所化.

この節以後は簡単のため相空間はすべて Hausdorff とする.

定理7 (T. Ura [15, 16]). (X, D, π) を local system, $U \subset X$ を開集合とする. 各 $x \in X$ に対して D_x° によって $0 \in D_x^\circ \subset D_x$, $\pi(x, D_x^\circ) \subset U$ をみたす最大の開区間を表わす.

$$D|U = \bigcup_{x \in U} \{x\} \times D_x^\circ$$

は D の開部分集合であり $(U, D|U, \pi|U)$ ($\pi|U = \pi|(D|U)$) は local system である. $\pi|U$ は π の U への restriction といわれる.

定理8. $(X, D, \pi), (Y, E, \rho)$ ($X=Y$) を local system とする. $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が X の開被覆で $\pi|U_\alpha = \rho|U_\alpha$, $\alpha \in A$ であるとする. このとき $\pi = \rho$ である.

定理9. $h: (X, D, \pi) \rightarrow (Y, E, \rho)$ を NS-mor., $U \subset X$ を開集合とする. このとき $h|U: \pi|U \rightarrow \rho$ は NS-mor. である.

定理10. $(h, \varphi): (X, D, \pi) \rightarrow (Y, E, \rho)$ を *type n* の GH-mor. とする. $U \subset X$ が開集合ならば $(h|U, \varphi|U): \pi|U \rightarrow \rho$ はやはり *type n* である ($\varphi|U = \varphi|(D|U)$).

系. $\lambda: \pi \rightarrow \rho$ が *type n* の GH'-mor. ならば, 開集合

$U \subset X$ に対して $\text{type } n$ の GH'-mor. $\lambda|_U : \pi|_U \rightarrow \rho$ を一意的に定めることができる.

定義 8. $h|_U, (h, \varphi)|_U \equiv (h|_U, \varphi|_U)$, $\lambda|_U$ はそれぞれ $h, (h, \varphi), \lambda$ の U への restriction と呼ばれる.

定理 11. $(X, D, \pi), (Y, E, \rho)$ を local system, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を X の開被覆, $\{h_\alpha : \pi|_{U_\alpha} \rightarrow \rho\}_{\alpha \in A}$ を

$$h_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = h_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}, \alpha, \beta \in A$$

をみたす NS-mor. の族とする. このとき $h|_{U_\alpha} = h_\alpha, \alpha \in A$ によってきまる写像 $h : X \rightarrow Y$ は π から ρ への NS-mor. である. さらにこのような NS-mor. は一意にきまる.

補題 1. 定理 11 は $\text{type } 0, 2, 2.25, 2.5$ の GH'-mor. に対して同様になりたつ. GH'-mor. に関しては $\text{type number } n$ が次の場合になりたつ.

- (1) $n = 0, 2.25, 2.5, 4.25, 4.5$.
- (2) X が normal ならば $n = 2$ できよい.
- (3) D が normal ならば $n = 4$ できよい.

補題 2. $(h, \varphi) : (X, D, \pi) \rightarrow (Y, E, \rho)$ を $\text{type } n$ の GH'-mor. $V \subset Y$ が開集合で $h(X) \subset V$ であるとする. このとき $(h, \varphi) = (i_V|_V) \circ (k, \psi)$ をみたすような $\text{type } n$ の GH'-mor.

$$V|(h, \varphi) = (k, \psi) : \pi \rightarrow \rho|_V$$

がただ一つ存在する. この場合 $k = V|h, \psi = V|\varphi$ である.

系. GH' -mor. および NS -mor. に対しても補題 2 がなりたつ.

§ 4. Local system の category.

\mathcal{H} を Hausdorff 空間上の local system の class とし category NS を $obj NS = \mathcal{H}$, $mor NS = \{ \mathcal{H} \text{ の元の間} \text{ の } NS\text{-mor.} \}$ によって定義する. また各 type number n に対して

$$obj GH(n) = obj GH'(n) = \mathcal{H},$$

$$mor GH(n) = \{ \mathcal{H} \text{ の元の間} \text{ の type } n \text{ の } GH\text{-mor.} \}$$

$$mor GH'(n) = \{ \mathcal{H} \text{ の元の間} \text{ の type } n \text{ の } GH'\text{-mor.} \}$$

によって category $GH(n)$, $GH'(n)$ を作る.

定理 12. 自然な写像 $T: mor GH \rightarrow mor NS$ ($T((h, \varphi)) = h$) は GH から NS への functor である. 同様に次の canonical な functor がえられる:

$$U': NS \rightarrow GH', \quad T': GH' \rightarrow NS, \quad S: GH \rightarrow GH'$$

これらの functor については

$$(1) \quad T' \circ S = T$$

(2) $T' \circ U' = i_{NS}$, $U' \circ T' = i_{GH'}$. すなわち T', U' は GH' と NS の間の iso. である.

註) 定理 6 により $GH(n, 5) = GH(n, 25)$, $GH'(n, 5) = GH'(n, 25)$ である. 定理 12 では $GH(4, 5) = GH$, $GH'(4, 5) = GH'$ と略記した.

次にこれらの category が Cartan-Eilenberg [4] の意味で local category になるかどうかを検討する。

Δ を位相空間とそれらの間の連続写像からなる category, Ω を $NS, GH(n), GH'(n)$ のどれか一つと考える。そこで $L: \Omega \rightarrow \Delta$ を自然な functor として $\{\Omega, \Delta, L\}$ に対して次の 4 命題を考える:

- 1) $(X, D, \pi) \in \mathcal{H}$ で $U \subset X$ が開集合ならば π の restrict. $\pi|_U$ と inclusion mor. $i_\pi|_U: \pi|_U \rightarrow \pi$ は category Ω において well-defined.
- 2) $(X, D, \pi), (Y, E, \rho) \in \mathcal{H}, X=Y$ とする。 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が X の開被覆で $\pi|_{U_\alpha} = \rho|_{U_\alpha}, \alpha \in A$ ならば $\pi = \rho$.
- 3) $(X, D, \pi), (Y, E, \rho) \in \mathcal{H}$ で $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を X の開被覆とする。
 $\{\omega_\alpha: \pi|_{U_\alpha} \rightarrow \rho\}_{\alpha \in A} \subset \text{mor } \Omega$ が

$$\omega_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = \omega_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}, \alpha, \beta \in A$$
をみたせば $\omega|_{U_\alpha} = \omega_\alpha, \alpha \in A$ とする $\omega \in \text{mor } \Omega$ がただ一つ存在する。
- 4) $(X, D, \pi), (Y, E, \rho) \in \mathcal{H}$ で $\omega: \pi \rightarrow \rho$ を Ω の mor. とする。開集合 $V \subset Y$ に対して $L(\omega) = h$ が X を V の中に写すならば $\omega = (i_\rho|_V) \circ \kappa$ をみたす $\kappa \in \text{mor } \Omega: \pi \rightarrow \rho|_V$ がただ一つ存在する。

条件 1)~4) は Cartan-Eilenberg の意味で $\{\Omega, \Delta, L\}$ が

local category になるための条件に外ならない。これらが
みださぬるとき単に Ω は local category であるとい
ことにする。

定理 13. $NS, GH(n), GH'(m)$ は local category である。

ただし $n=0, 2, 2.25, 2.5, m=0, 2.25, 2.5, 4.25, 4.5$.

註) type 0 については D. H. Carlson [3] が証明している。

定義 9. $\mathbb{C}N$ を completely normal な空間上の local
system の class として $GH\mathbb{C}N'(2)$ を次の様にして作る:

$$\text{obj } GH\mathbb{C}N'(2) = \mathbb{C}N,$$

$$\text{mor } GH\mathbb{C}N'(2) = \{\mathbb{C}N \text{ の元の間の type 2 の } GH\text{-mor.}\}$$

つぎに $\mathcal{D}\mathbb{C}N$ を D が comp. normal な local system (X, D, π)
の class として次の様に $GH\mathcal{D}\mathbb{C}N'(4)$ を作る:

$$\text{obj } GH\mathcal{D}\mathbb{C}N'(4) = \mathcal{D}\mathbb{C}N,$$

$$\text{mor } GH\mathcal{D}\mathbb{C}N'(4) = \{\mathcal{D}\mathbb{C}N \text{ の元の間の type 4 の } GH\text{-mor.}\}$$

定理 14. $GH\mathbb{C}N'(2), GH\mathcal{D}\mathbb{C}N'(4)$ は local category である。

註) 位相空間 M に対して次の命題を考える:

(M) M の任意の開集合 F に対して, F 上の任意の連続関
数は M 上の連続関数に拡張される。

そうすると補題 1 によってさらに広い category $GHM'(2),$
 $GHDM'(4)$ を以下のようにして作るとこれはやはり local
category である:

$$\text{obj GHM}'(2) = \mathcal{M},$$

$$\text{mor GHM}'(2) = \{\mathcal{M} \text{ の元の間の type 2 の GH'-mor.}\},$$

$$\text{obj GHDM}'(4) = \mathcal{D}\mathcal{M},$$

$$\text{mor GHDM}'(4) = \{\mathcal{D}\mathcal{M} \text{ の元の間の type 4 の GH'-mor.}\}.$$

ここで \mathcal{M} (または $\mathcal{D}\mathcal{M}$) は X (または D) の任意の部分開集合が性質 (M) をもつような local system (X, D, π) の class を表わす.

最後に特異点のない local system の category を調べる.

定義 10. \mathcal{R} を Hausdorff 空間上の特異点をもたない local system の class とする. このとき次の様に category NSR , $\text{GHR}(n)$ ($n = 0, 1, 2, 3, 4$) を作る:

$$\text{obj NSR} = \text{obj GHR}(n) = \mathcal{R},$$

$$\text{mor NSR} = \{\mathcal{R} \text{ の元の間の NS-mor.}\},$$

$$\text{mor GHR}(n) = \{\mathcal{R} \text{ の元の間の type } n \text{ の GH-mor.}\}.$$

定理 15. NSR , $\text{GHR}(n)$ ($n = 0, 2, 4$) は local category である.

文 献

- [1] S. Ahmad: On Ura's Axioms and Local Dynamical Systems, Funkc. Ekvac., 12 (1969), 181-191.

- [2] D. G. Belanger: *Continuous Reparametrizations of Dynamical Systems*, *Funkc. Ekvac.*, 14(1971), 123-128.
- [3] D. H. Carlson: *Extensions of Dynamical Systems via Prolongations*, *Funkc. Ekvac.*, 14(1971), 35-46.
- [4] S. Eilenberg: *Foundations of Fiber Bundles*, Univ. of Chicago, 1957.
- [5] W. H. Gottschalk and G. A. Hedlund: *Topological Dynamics*, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1955.
- [6] O. Hájek: *Categorical Concepts in Dynamical System Theory*, *Topological Dynamics, An International Symposium*, Benjamin, New York 1968, 243-258.
- [7] O. Hájek: *Local Characterization of local Semidynamical Systems*, *Math. Syst. Theory* 2 (1968), 17-25.
- [8] O. Hájek: *Dynamical Systems in the Plane*, Academic Press, London and New York, 1968.
- [9] I. Kimura: *Isomorphisms of Local Dynamical Systems and Separation Axioms for Phase Spaces*, *Funkc. Ekvac.*, 13(1970), 23-34.

- [10] K. Kuratowski: *Topology II (English tr.)*, Academic Press, New York and London, 1968.
- [11] R.C. MacLann: *A Classification of Centers*, *Pacific Jour. Math.*, 30 (1969), 733-746.
- [12] V.V. Nemytskii and V. V. Stepanov: *Qualitative Theory of Differential Equations (English tr.)*, Princeton Univ. Press, Princeton N.J., 1960.
- [13] T. Ura: *Local Isomorphisms and Local Parallelizability of Dynamical Systems*, *Dynamical Systems, An International Symposium*, Benjamin, New York, 1968, 493-506.
- [14] T. Ura: *Local Isomorphism and Local Parallelizability in Dynamical Systems Theory*, *Math. Syst. Theory*, 3 (1969), 1-16.
- [15] T. Ura: *Isomorphisms and Local Characterization of Local Dynamical Systems*, *Funkc. Ekvac.*, 12 (1969), 99-122.
- [16] T. Ura: *Local Dynamical Systems and Their Isomorphisms*, *Japan-United States Seminar on Ordinary Differential and Functional Equations*, *Lecture Notes in Math.*, Springer-Verlag,

Berlin, Heidelberg and New York, 243 (1971), 76-90.

[17] I. Kimura: *Categories of Local Dynamical Systems* (投稿中).