数理解析研究所講究録
第173巻 1973年 128-137

不変測度について

九大 教養　押川元重
九大 教養　浜地敏弘

§0.

不変測度といってもいろいろあり，例えば，古典力学系の不変測度，位相力学系の不変測度，統計力学の不変測度，マルコフ連鎖の不変測度，群のハール測度などがある。ここでは，non-singular な変換に対する不変測度の存在問題及び無限大不変測度をもつ変換の問題について招介する。

§1. non-singular な変換に対する不変測度の存在問題.

(1) 問題.

σ－有限な測度空間を $(X, \mathcal{B}, m)$ とする．即ち，$\mathcal{B}$ は集合 X の部分集合からなるある σ 集合族であり，m は $\mathcal{B}$ 上に定義された σ－有限な測度である。集合 X から X の上への1対1変換 φ がそれ自身及び逆変換 φ^{-1} も $\mathcal{B}$ 可測であり，かつ $m(A)=0$ となるのは $m(\varphi A)=0$ のときかつそのときに限るならば，φ を non－singular な変換という。　E.

Hopf は次のような問題をとりあつかった。

non-singular な変換φがどのような条件のもとで，φ不変，即ち $\mu(A)=\mu(\varphi A)$，$A\in\mathfrak{B}$ ，かつ，測度mと互に絶対連続な測度μが存在するか。

E. Hopf に続いて，φ-不変測度μの存在のための必要十分条件及び φ-不変測度μの構成の方法がいろいろみつけ出された。

(2). 有限なφ-不変測度μの存在のための必要十分条件。

いくつかを列記する。

(い) 測度空間Xが，φ-有界である。(E. Hopf)

ここで，２つの可測集合A，Bについて，Aの可算分割$\{A_i\ ;\ i=1,2,\cdots\}$及びBの可算分割$\{B_i\ ;\ i=1,2,\cdots\}$と整数列$\{n_i\ ;\ i=1,2,\cdots\}$で $A_i=\varphi^{n_i}B_i$，$i=1,2,\cdots$をみたすものが存在するとき，AとBはφ-同値であるという。また可測集合Aについて，その真部分集合A′でAとφ-同値なものが存在するとき，Aをφ-非有界という。φ非有界ではないような可測集合をφ-有界という。

(ろ). 弱遊走的集合が存在しない。(Hajian-Kakutani)

ここで，可測集合Aについて，$\varphi^{n_i}A$，$i=1,2,\cdots$ が互に素となるような増大する自然数列$\{n_i\ ;\ i=1,2,\cdots\}$が存在するとき，Aは弱遊走的であるという。

(は) φは強保存的である。

測度空間$(X, \mathcal{B}, m)$上の可積分関数の全体を$L^1(X, m)$と表わすとき，$L^1(X, m)$上の作用素Tを次のように与える。

$$Tf(x) = f(\varphi^{-1}x)\frac{d\varphi m}{dm}(x) \quad , \quad f \in L^1(X, m)$$

任意の$L^1(X, m)$の正の要素fと，任意の増大する自然数列$\{n_i\ ;\ i=1,2,\cdots\}$に対して，$\sum_{i=1}^{\infty} T^{n_i}f(x) = \infty$, a.e.

が成り立つとき，φは強保存的であるという。（任意の$L^1(X, m)$の正の要素fに対して，$\sum_{n=1}^{\infty} T^n f(x) = \infty$ が成り立つとき，φは保存的であるというが，保存的であることと再帰的であることは同値である。）

(に) $m(A) > 0$ なるAに対して，Aに属するほとんど全ての要素xについて，$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sum_{i=0}^{n-1}\chi_A(\varphi^i x)}{n} > 0$ が成り立つ。

但し，χ_Aは集合Aの定義関数とする。

これは，エルゴード定理と関係の強い条件である。

(ほ) $m(A) > 0$ ならば，$\inf_n m(\varphi^n A) > 0$.

(3) 有限なφ-不変測度μの構成.

有限なφ-不変測度μを構成する方法もいろいろみつけられているが，ここでは3つの函数解析的な方法についてのべる。

(イ) $\frac{d\mu}{dm}(x) = f_0(x)$ とすれば，$f_0(x) > 0$ かつ

$$\int_A f_0(x)\,dm(x) = \int_{\varphi A} f_0(x)\,dm(x) \quad , \quad A \in \mathcal{B} .$$

故に，$\displaystyle\int \chi_A(x) f_0(x)\,dm(x) = \int_A f_0(\varphi^{-1}x)\,dm(\varphi^{-1}x)$

$$= \int \chi_A(x)\, Tf_0(x)\,dm(x) \; , \quad A \in \mathcal{B}.$$

従って，φ-不変測度 μ の構成は，$Tf_0 = f_0$ となるような正の密度関数 f_0 を構成することに他ならない。バナッハ極限 L を用いて，$\mu(A) = L(\{\langle T^n f, \chi_A \rangle\})$，$A \in \mathcal{B}$ とすれば，μ は存在条件のもとで φ-不変測度になっている。この構成法を用いれば，1つの変換に対する問題から amenable な変換半群に対する問題へと拡張することができる。

(ロ). 測度空間 $(X, \mathcal{B}, m)$ 上の2乗可積分な関数の全体を $L^2(X, m)$ と表わすとき，ヒルベルト空間 $L^2(X, m)$ のユニタリー作用素 U を次のように与える。

$$Uf(x) = f(\varphi^{-1}x)\sqrt{\frac{d\varphi m}{dm}(x)} \quad , \quad f \in L^2(X, m).$$

φ-不変測度 μ を構成するためには，不動点定理の方法を用いて，ユニタリー作用素 U の正の不動点をもとめればよい。この構成法を用いれば，一般の変換群に対する問題へと拡張することができる。

(ハ). $X \times \mathbb{Z}$ 上の関数 f で，$\displaystyle\sum_{i=-\infty}^{\infty} \left\{ \int f(x, i)^2\,dm(x) \right\} < \infty$ をみたすものの全体を $\mathcal{H}$ と表わし，ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の作用素 U，L_k を次のように定める。

$$Uf(x,i) = f(\varphi^{-1}x,\ i-1)\sqrt{\frac{d\varphi m}{dm}(x)}\quad ,f\in \mathfrak{h}_y$$

$$L_h f(x,i) = h(x)f(x,i)\ ,\quad f\in \mathfrak{h}_y\ ,\ h\in L^\infty(X,m)$$

$\{U^n,\ L_h\ ;\ n\in \mathbb{Z}\ ,h\in L^\infty(X,m)\}$ から張られる von Neumann algebra を $\mathfrak{A}$ とする。φ-不変測度 μ を構成することは，$\mathfrak{A}$ の center valued relative dimension function を求めることに帰着される。

(4) 実パラメーター変換群の有限不変測度．

任意の実数 t に対して，$(X,\mathcal{B},m)$ 上の non-singular な変換 φ_t が与えられ，$\varphi_{t+s}=\varphi_t\varphi_s$ ，$t,s\in R$ をみたし，$\varphi_t x$ が 2 変数 (t,x) に関して可測であるとする。

有限測度 μ がある φ_{t_0} 不変かつ m と互に絶対連続であるとすれば，$\hat{\mu}(A)=\frac{1}{t_0}\int_0^{t_0}\mu(\varphi_t A)\,dt$ ，$A\in\mathcal{B}$ で定まる有限測度 $\hat{\mu}$ は m と互に絶対連続かつ全ての φ_t について不変になる。このように実パラメーターの変換群に対する不変測度の存在問題は 1 つの変換に対する不変測度の存在問題に帰着される。

(5) σ－有限な φ-不変測度の存在条件。

必ずしも有限でない σ-有限不変測度の存在条件の 1 つは次のように表わされる。

$X=\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}\varphi^n A$ をみたすような，φ-有界な集合 A が存在する。

(6). φ-不変測度の存在しない例.

変換群に対するφ-不変測度が存在しないような例を von Neumann が与えたが，その後 Ornstein, Brunel, Chacon, L.K. Arnold 等により1つの変換に対するφ不変測度が存在しないような例がつくられ，さらにD.Hill はこのような例を一般的に構成した。これらはIII型の von Neumann Algebra として Operator algebra の分野における重要な研究の対象になっている。

§2. 無限大不変測度をもつ変換の分類.

可測空間$(X, \mathcal{B})$ 上に定義された測度μはσ有限かつ，$\mu(X)=\infty$ とし，X上の変換φは無限大測度μを不変にするものとする。このような無限大不変測度μをもつ変換φの分類は，有限不変測度をもつ変換の場合に対比していろいろと試みられている。それらの中で Hajian-Kakutani が不変測度の存在問題の研究からヒントを得て定義した零型，正型の分類は最も有効なものの一つであると思われる。

(1) 零型と正型.

無限大不変測度μをもつ変換φが，$\mu(A)<\infty$ なる任意の集合Aに対して $\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\mu(\varphi^n A\cap A)=0$ が成り立つとき零型であるといい，また $\mu(A)>0$ なる任意の集合Aに対

して, $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \mu(\varphi^n A\cap A) > 0$ が成り立つとき正型であるという。一般に $\mu(A)<\infty$ なる集合Aに対しては, $\underline{\lim}_{n\to\infty}\, \mu(\varphi^n A\cap A) = 0$ が成り立つこと及び, エルゴード的な変換 φ は零型 正型のどちらかであることを Hajian-Kakutani は示した。直観的にも零型は混合性が強いことを表わしているが, 有限不変測度をもつ変換の場合の混合性と深い関係があることが調べられている。

(2) エントロピー正, 零, 無限大.

無限大不変測度 μ をもつ変換 φ はエルゴード的であり, かつ測度 μ は atom をもたないものとする。従って, φ は再帰的である。即ち, $0<\mu(A)<\infty$ なる集合Aに対して,
$A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\varphi^{-n}A$ が測度0を無視して成り立つ。

$A_1=\varphi^{-1}A\cap A$, $A_n=(\varphi^{-n}A-\bigcup_{i=1}^{n-1}\varphi^{-i}A)\cap A$, $n=2,3,\cdots$,
とすれば, $A=\sum_{n=1}^{\infty}A_n$ が成り立つ。$x\in A_n$ のとき,
$\varphi_A x=\varphi^n x$ と定義すれば, φ_A はA上の変換であり, 測度 μ を集合A上に制限し正規化した測度 μ_A $\mu_A(A)=1$ は変換 φ_A の不変な確率測度である。このような φ_A を φ から集合A上に導びかれた変換とよぶ。

無限大不変測度 μ をもつ変換 φ から, $0<\mu(A)<\infty$ なる集合A上に導びかれた変換 φ_A のエントロピー $h(\varphi_A)$ が正であるか, 零であるか 無限大であるかは集合Aの選び

方によらないことがわかる。（但し値は変化する。）それぞれの場合に対応して，無限大不変測度μをもつ変換φは，エントロピー正，エントロピー零，エントロピー無限大とよぶことにする。

(3). 局所同型.

測度空間X_i上の変換ψ_iに関して不変な確率測度をμ_iとする．$i=1,2$．　X_1からX_2の上への写像θで，

$\mu_1(A)=\mu_2(\theta A)$；かつ　$\psi_2\theta=\theta\psi_1$　をみたすものが存在するとき，変換ψ_1と変換ψ_2は同型であるという。

測度空間X_i上のエルゴード的な変換φ_iのatomのない無限大不変測度をμ_iとする。$i=1,2$．　φ_1から，$0<\mu_1(A_1)<\infty$　なるX_1のある部分集合A_1上に導びかれた変換φ_{1A_1}と，φ_2から　$0<\mu_2(A_2)<\infty$　なるX_2のある部分集合A_2上に導びかれた変換φ_{2A_2}とが同型になるとき，φ_1とφ_2とは局所同型であると呼ぶことにする。

エントロピー正，零，無限大という分類は局所同型のもとで保存されることは明らかである。一方，零型，正型の分類は局所同型のもとで完全にこわれることを示すことができる。

[1] L. K. Arnold, On 6-finite invariant measures, Doctoral Thesis Brown University, (1966).

[2] D. W. Dean and L. Sucheston, On invariant measures for operators, Z. Wahr. verw. Geb. 6(1966), 1-9.

[3] Y. Dowker, Invariant measure and the ergodic theorems, Duke Math. J. 14(1947), 1051-1061.

[4] E. Effros and F. Hahn, Locally compact transformation groups and C*-algebra, Memory of the A. M. S. 75(1967).

[5] 伊藤雄二, 不変測度について, 数学 22-4 (1970), 36-51.

[6] A. B. Hajian and Y. Ito, Weakly wandering sets and invariant measures for a group of transformations, J. Math. and Mech. 18(1969), 1203-1216.

[7] A. B. Hajian and Y. Ito, Cesaro sums and measurable transformations, J. Combinatorial Th. 7(1969), 239-254.

[8] A. B. Hajian and S. Kakutani, Weakly wandering sets and invariant measures, Trans. Amer. Math. Soc. 110(1964), 136-151.

[9] P. R. Halmos, Invariant measures, Annals of Math. 48(1947), 735-754.

[10] 浜地敏弘, 押川元重, 非特異変換に対する不変測度の存在問題に関連して, 九大教養部数学雑誌, 6 (1968), 1-10.

[11] T. Hamachi, Construction of the finite center-valued relative dimension function, and invariant measures, to appear.

[12] E. Hopf, Theory of measures and invariant integrals, Trans. A. M. S. 34(1932), 373-393.

[13] U. Krengel and L. Sucheston, On mixing in infinite measure space, Z. Wahr. verw. Geb. 13(1969), 150-164.

[14] F. J. Murray and J. von Neumann, On rings of operators, Ann. Math. 37(1936), 116-229.

[15] J. von Neumann, On rings of operators III, Ann. Math. 41 (1940), 94-161.

[16] J. Neveu, Existence of bounded invariant measures in Ergodic theory, Fifth Berkeley Symposium (1966).

[17] M. Osikawa, A construction of the invariant measure, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. 25(1971), 182-189.

[18] M. Osikawa, Ergodic measure preserving transformations and equivalent in local sense, 26(1972), 193-199.

[19] M. Osikawa and T. Hamachi, On zero type and positive type transformations with infinite invariant measures, 25(1971), 280-295.