

相互作用を伴う無限粒子系の Markov 過程  
—— Boltzmann 方程式の導出 ——

と 正

この稿は上の表題のような Markov 過程を構成すること  
と、この運動の下の propagation of chaos とよばれる現象  
が見られることを述べるのとが主たる目的である。この  
の起りは Boltzmann 方程式<sup>1)</sup>あり、これは相互作用を伴う稀  
薄な気体分子の分布を記述する方程式である。

1. Boltzmann 方程式は気体分子の位置の空間  $S (= \mathbb{R}^3)$  と  
速度の空間  $R (= \mathbb{R}^3)$  の直積  $S \times R$  上の確率分布  $u(t, dx dx')$  の  
Lebesgue 測度  $dx dx'$  に関する density function  $u(t, x, x')$  に関する  
方程式である。この方程式は初期条件は位置空間に依存  
せず、(したがって) 解は  $x$  の関数として、速度の分  
布の  $x$  に関する方程式と見られる場合  $s$ patially homogeneous であ  
ると云う。この場合 scattering cross section  $\sigma$  の条件  
(例として有界性)を付け加え、density  $u(t, x)$  の代りの分布  
 $u(t, E)$  に関する方程式と見ると  $u$  の  $x$  にかまかなくなった  
か出た。

(1)  $\frac{\partial}{\partial t} u(t, E) = \int_{R^2} u(t, \alpha x) u(t, \alpha x') g(x, x') (\pi(\alpha x', E) - \delta_x(E))$

$u(t, E) \rightarrow f(E)$

= ,  $g(x, x') \geq 0$  ,  $\pi$  は  $R$  上の確率測度 ,  $f(x)$  は  $R$  上の確率測度 .  $\therefore g(x, x') u(t, x) u(t, x')$  は  $t=0$  の  $\varepsilon$  の  $(\text{例として } g(x, x') \text{ は不変})$  ,  $\therefore g(x, x') u(t, x) u(t, x')$  は  $t \rightarrow \infty$  に収束する .

(2)  $u(t, E) = u_0(t, E) + \int_0^t \int_{R^2} u(\tau, \alpha x) u(\tau, \alpha x') g(x, x') \int_R \pi(\alpha x', \alpha y) p_0(t - \tau, y, E)$

但し ,  $p_0(t, x, E) = e^{-t g(x)} \delta_x(E)$  ,  $u_0(t, E) = \int_R f(\alpha x) p_0(t, x, E)$

= ,  $\tau$  は  $x, y$  両方とも存在する  $R$  の粒 + 運動の状態 (  $E \in \mathbb{R}^3$  ) である . 位置  $x$  を  $\tau$  の一様性の仮定から無視して  $\tau \in \mathbb{R}$  .  $\therefore \tau \in \mathbb{R}$  ,  $x, y$  は粒 + の位置  $\tau$  ,  $R$  の粒 + の運動する状態である .  $R$  の  $\tau \in \mathbb{R}^3$  である  $\therefore \tau \in \mathbb{R}^3$  である  $\therefore$  ,  $\tau \in \mathbb{R}^3$  は  $\text{locally compact, separable space}$  ,  $\mathcal{B}(R)$  は  $\tau$  の topological  $\sigma$ -algebra である .  $\tau \in \mathbb{R}^3$  である . したがって  $g(x)$  は  $\tau$  の有界な値である .

= ,  $\therefore$  (2) の意味は  $\tau \rightarrow \infty$  である . 無限時間と同じ状態が得られて ,  $\tau \rightarrow \infty$  の時刻  $0$  に初期分布  $f$  から出発 ( interact ) したがって運動したとき , 我々の  $\tau \rightarrow \infty$  のとき

粒子の運動に着目して、各粒子が interact するのは、 $t$  の時  
 刻  $\delta(t)$  が定め、その時刻が来ると他の一粒子と interact し  
 て jump する。Jump の仕方は  $\Pi(x, x', E)$  が定め、(6) 型の粒  
 子は  $x$  が  $\mathbb{R}^n$ 、他の粒子の位置  $x'$  の影響をうけて jump する。  
 この粒子も  $\mathbb{R}^n$  の jump する、この jump する (6) のとき  
 $t \rightarrow t + \delta t$ 、このとき (2) の右辺第 1 項は interact する前、  
 第 2 項は少くとも  $t - \delta t$  interact して  $\delta t \in \mathbb{R}^n$  の結果となる。

また、上では  $p_0(t, x, E)$  の形と具体的に述べたが、これは  
 この議論では次の条件 (3) を満たす  $\mathbb{R}^n$  の transition  
 probability  $p_0(t, x, E)$  なら何でもよい。この場合では、  
 $t$  での jump からの jump まで  $t \rightarrow t + \delta t$  の間には  
 Markov 過程の軌道  $x \rightarrow x'$  としてとらえる。この Markov  
 過程の  $g(x)$  による killing の結果 (3) の  $p_0(t, x, E)$  となる。

$$(3) \quad p_0(s+t, x, E) = \int_{\mathbb{R}^n} p_0(s, x, dy) p_0(t, y, E)$$

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} p_0(r, x, dy) g(y) = 1 - p_0(t, x, R)$$

≡ 状態  $x$  が少くとも  $t$  まで生き残るために (2) と  $t \rightarrow t + \delta t$  の  
 このとき (2) を得る。

$$(4) \quad P^f(t, x, E) = p_0(t, x, E) + \int_0^t \int_{R^2} P^f(\tau, x, dy) / P^f(\tau, dy) g(y) \\ \times \int_R \pi(y, y', dz) p_0(t-\tau, z, E)$$

$$\text{但し, } P^f(t, E) = \int_R f(dx) / P^f(t, x, E).$$

(2) は (4) の両辺を  $f(dx)$  で積分 (左側の  $x$  について) すると、従って (4) の解を  $f$  で積分すれば (2) の解が得られる。(4) での  $f$  は、任意の関数  $f$  の一種として  $f$  の代りに  $\delta_x$  を用いることが出来る。従って、他のすべての種とは初期分布  $f$  で出発させた。このとき問題の一種としての時刻  $t$  における分布が  $P^f(t, x, \cdot)$  である。

(4) は  $\delta_x$  の  $x$  に対する逐次近似を得る。

$$S_0^f(t, x, E) = p_0(t, x, E).$$

$$S_{n+1}^f(t, x, E) = p_0(t, x, E) + \int_0^t \int_{R^2} S_n^f(\tau, x, dy) S_n^f(\tau, dy') / g(y) \\ \times \int_R \pi(y, y', dz) p_0(t-\tau, z, E).$$

$$\text{但し, } S_n^f(t, E) = \int_R f(dx) / S_n^f(t, x, E).$$

$S_n^f(t, x, \cdot)$  は substochastic measure  $\gamma$  の  $\mathcal{P}$  の  $\gamma$  による  $\gamma$  の種は  $P^f(t, x, E)$  と  $\gamma$  とは (4) に入る。

$g(y)$  の有界性が  $\gamma$  の解は確率分布  $\gamma$ 、解の一意性を示す。  $g$  が有界ならば、場合  $n$  は  $P^f(t, x, E)$  は確率分布  $\gamma$  の  $\mathcal{P}$ 、(4) の解の  $\gamma$  は minimal  $\gamma$  であることが証明される。

逐次近似を得る。従ってこの解は、その意味で Chapman -

Kolmogorov 方程式を導く。

$$(5) \quad p^f(s+t, x, \bar{r}) = \int_{\mathbb{R}} p^f(s, x, dy) p^f(t, y, \bar{r}),$$

$$\text{但し, } f_s(\cdot) = \int_{\mathbb{R}} f(x) p^f(s, x, \cdot).$$

→ 式 (1) を用いて

$$p(s, x, t, \bar{r}) = P_{(t, x, \bar{r})}^{f_s}$$

→ ... (5) と同じく  $s < t < u$  に対して

$$p(s, x, u, \bar{r}) = \int_{\mathbb{R}} p(s, x, t, dy) p(t, y, u, \bar{r}).$$

これは 時間的 Markov 性 transition 未知の連続の Chapman-Kolmogorov 方程式であり、

従って  $p(s, x, t, \bar{r})$  は  $x$  の Markov 過程の構成になる。

この process は粒子の系 (1) の特定の

一粒の行動を記述し、 $t$  と  $u$  の間の  $s$  の粒子の行動も時間的 Markov 性

を持つ。この  $s$  の粒子の行動も時間的 Markov 性を持つ。これは、 $s$  の

粒子の時刻  $s$  の分布  $f_s$  によって  $s$  における、

他の粒子は  $s$  の分布を  $f_s$  として他の粒子との interaction による

影響をうけて行動する。各時刻  $t$  の運動状態は  $f_t$  である、

Markov 性はこれによって成り立つ。 McKean [7] は、

この Markov 過程と連続の Markov 過程 (Markov process with

(constant mechanism) と対応させて, Markov process with non-constant mechanism と呼ぶことにする.

2. 二粒子系で一つの粒子 +  $n$  着目し, 二粒子系に対する 他の 粒子の影響を " ; " として表す (つまり  $n$ ), 二粒子系に対する具体的な取扱いをするための, 次のような branch を与える.



$b_0$  は trivial な branch だが, 上の  $b_1$  と  $b_2$  は枝は  $b_0$  を含むことに注意.  $b_1, b_2 \rightarrow (b_1, b_2)$  を " ; " 操作とくり返して構成できる.  $\#(b)$  は  $b$  の節の数,  $l(b)$  は  $b$  の長さ (一番節の数, 分枝の節の数) を与える:

$$l(b_0) = 0, \quad l((b_1, b_2)) = 1 + \max(l(b_1), l(b_2)).$$

この定義から, 明らか

$$(6) \quad \{b \mid l(b) \leq n+1\} = \{b_0\} \cup \{(b_1, b_2) \mid l(b_1) \leq n, l(b_2) \leq n\}.$$

また  $b$  の定数数列  $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{\#(b)})$  を  $n$  次元  $\mathbb{R}^n$  の点  $b(\underline{x})$  とし,



$p(t, b(\underline{x}), E)$  をこのように定義する:

$$p(t, b_0(x_1), E) = p_0(t, x_1, E)$$

$$(7) \quad p(t, (b, x_1, b_2, x_2), E) = \int_0^t dz \int_{R^2} p(z, b, x_1, dy) p(z, b_2, x_2, dy') \times \int_R \pi(y, y', dz) p_0(t-z, z, E)$$

但し、変数は  $x_1 = (x_1, \dots, x_{\#(b)})$ ,  $x_2 = (x_{\#(b)+1}, \dots, x_{\#(b)+\#(b_2)})$ .

$p(t, b(x), E)$  の意味は、時刻  $0$  に  $(x_1, \dots, x_{\#(b)})$  を出発して  $\#(b)$  箇の粒が  $b$  によつて定まる順序の interval (区間) 時刻  $t$  に  $E$  に属する状態にある。(4) の解  $p^f(t, x, E) =$  の(8)係は

$$(8) \quad p^f(t, x_1, E) = \sum_b \int_{R^{\#(b)-1}} \prod_{k=2}^{\#(b)} f(dx_k) p(t, b(x), E).$$

これは (6) = (7) から

$$(7') \quad \sum_{\ell(b) \leq n+1} p(t, b(x), E) = p(t, b_0(x), E) + \sum_{(\ell(b_1), \ell(b_2)) \leq n} \int_0^t \int_{R^2} p(z, b, x_1, dy) p(z, b_2, x_2, dy') \int_R \pi(y, y', dz) p_0(t-z, z, E)$$

これは  $t \in \mathbb{N}$  induction による方が容易である。

$$S_n^f(t, x_1, E) = \sum_{\ell(b) \leq n} \int_{R^{\#(b)-1}} \prod_{k=2}^{\#(b)} f(dx_k) p(t, b(x), E).$$

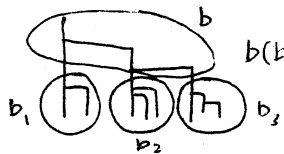
(8) より、 $p^f(t, x, E)$  の連続性説明は上の順序正位化を  $t = \infty$  とし、 $p_0$  (区一粒以外の粒 + 区間  $\lambda$  区間分布 + 出発  $t=0$  に  $t$  まで  $\lambda$  区間  $f$  の連続分布 + 初期分布  $\delta$ ) の場合、これは一粒 + 時刻  $0$  の各々  $\lambda$  区間  $f$  の連続性正位化による。

すなわち  $x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$  に対し、 $b(x) = b(b_1, \dots, b_{\#(b)})$  と定義する。このとき、 $b \in \mathcal{B}$  と

$$(9) \quad \sum_b p(t, b(x), R) = 1.$$

$\mathcal{B}$  の有界性を仮定 (7) により  $\lceil \leq 1 \rceil$  がある。変数の数に注意して、(9) と (10) の証明は、(10) と共に後の議論を  $\mathcal{B}$  の構造に対し、基本則である。

枝  $b$  の子ノード  $x$  に対して  $b(x) = b(b_1, \dots, b_{\#(b)})$  と



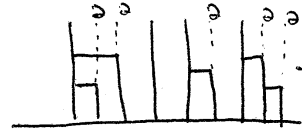
$b(b_1, b_2, b_3)$   $b$  の子ノード  $b_1, b_2, \dots, b_{\#(b)}$  に対して  $b(b_1, \dots, b_{\#(b)})$  と書く。  $b = b'(b_1, \dots, b_m)$  であるとき  $b \leq b'$  とかく。  $b' \leq b \leq b'$  ならば  $b'$  の子ノード  $(b_1, b_2, \dots, b_{\#(b)})$  は unique に定まるから  $(b_1, \dots, b_{\#(b)}) \in b/b'$  とかく。このとき branch に対して Chapman-Kolmogorov 方程式と (9) が成立する。

$$(10) \quad p(s+t, b(x), E) = \sum_{b' \leq b} \int_{\mathbb{R}^{\#(b')}} \prod_{b_k \in b/b'} P(s, b_k(x_k), dy_k) p(t, b'(y), E).$$

すなわち  $b/b'$  の集合  $\{b_1, \dots, b_{\#(b)}\}$  は同一視してかく。(10) は、時刻  $s+t$  で  $b$  の指定する順序で interaction が起こるとして、時刻  $s$  では  $b'$  の interaction が進行している。この可能性を  $\mathcal{B}$  の集合  $b/b'$  である。  $p(t, b'(y), E)$  は時刻  $s$  後の interaction に対応する。



4. これは無限個の確率分布の連続な極限である Markov 過程を、このようにして表現するから構成  
 1.2 中へ



また  $R$  の相違点  $\alpha$  をつけ加えたものを  $\bar{R} = R \cup \{\alpha\} \in C$ ,  
 $\underline{R} = R \times \bar{R}^\infty$  とおく.  $\underline{x} \in \underline{R}$  又は  $\underline{x} \in R \times \bar{R}^{n-1}$  に対し,  
 $\#(\underline{x})$  は  $\underline{x}$  の成分中の  $\bar{R}$  のもの個数とする.  $\#(b) \leq \#(\underline{x})$  のとき,  
 $b(\underline{x})$  は  $b$  の足る  $\underline{x}$  の  $\bar{R}$  の成分を左から順番に  $b$  の右端までつけ止めたものを  $\bar{R}$  とする.

$\#(\underline{x}) = \infty$  のとき  $\underline{E} = E_1 \times \{\alpha\}^{n_1-1} \times E_2 \times \{\alpha\}^{n_2-1} \times \dots \times E_k \times \{\alpha\}^{n_k-1}$ ,  
 $E_i \in \mathcal{B}(R)$ ,  $1 \leq i \leq k$ ,  $n_1 + \dots + n_k = n$ ,  $n$  に対し

$$P_{(t, \underline{x}, \underline{E})}^{(n)} = \sum_{\substack{\#(b_k) = \#(\underline{x}_k), 1 \leq k \leq r \\ \#(b_k) \geq \#(\underline{x}_k)}} \prod_{i=1}^r p_{(t, b_i(\underline{x}_i), E_i)} \begin{cases} X_{n_i + \dots + n_{i-1} + 1} \neq \alpha, \\ 1 \leq i \leq r, \alpha \text{ あり} \end{cases}$$

$= 0$  ,  $\alpha$  の他の場合

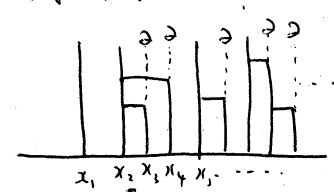
と定義する. 但し,  $\underline{x}_1 = (x_1, \dots, x_{n_1})$ ,  $\underline{x}_2 = (x_{n_1+1}, \dots, x_{n_1+n_2})$ ,  $\dots$ ,  $\underline{x}_k = (x_{n_1+\dots+n_{k-1}+1}, \dots, x_{n_1+\dots+n_k})$ ,  $\underline{x}'_k = (x_{n_1+\dots+n_{k-1}+1}, \dots, x_n)$ .  $b$  は  $b_k$  の  $\bar{R}$  の  $n$  個の成分の右端から  $\bar{R}$  の成分を  $\bar{R}$  とする.  $\Rightarrow$   $P^{(n)}$  は (9) の  $R \times \bar{R}^{n-1}$  の確率分布の unique な拡張される. (これはこの意味で,  $n \rightarrow \infty$  の consistency condition を与える.

$$P_{(t, \underline{x}, \underline{E} \times \bar{R})}^{(n+1)} = P_{(t, \underline{x}, \underline{E})}^{(n)}, \quad \underline{E} \in \mathcal{B}(R \times \bar{R}^{n-1}).$$

又 Kolmogorov の拡張定理により  $(\underline{R}, \mathcal{B}(\underline{R}))$  上の  $P_{(t, \underline{x}, \cdot)}$  がこの条件を満たすものが存在する. 但し,  $\mathcal{B}(\underline{R})$  は  $\underline{R}$  の cyl-

また

この process では各座標から一つの粒子を指定して、  
 $R$  に居る各粒子は次のように  $U-U$  の位で  
 動く。このとき、その粒子自身の jump  
 time が早いため、又は  $R$  に居る粒子は左側の粒子との  
 interaction を受けるより早く  $R$  上を他の粒子と衝突し運動  
 している。またその自身の jump time が左側の粒子との  
 右側の、 $R$  に居る粒子と衝突し  $U$  の粒子と interact して  
 jump する。この時の jump を逆側の粒子から  $\pi(x, x', t)$   
 とし、 $x$  が jump の出発点、 $x'$  が右側の粒子との位置である。逆  
 に、 $x$  が自身の jump time よりも早く左側の粒子との  
 interaction を受けるより早く、その粒子は衝突し  $U$  へ飛ん  
 だり、 $x = x'$  となる。この場合、 $U$  の粒子と interact するこ  
 とはない。このように場合分けして、 $U$  と  $R$  の粒子との  
 へ飛く右側の「動き」を  $\pi$  と云うが、この model の場  
 合はむしろ「左側の動き」を  $\pi$  と云う方が適当なよ  
 うに見える。と云うのは interact した粒子は「左側の」  
 運動しているが、 $\pi(x, x', t) = \pi(x', x, t)$  である。た  
 ん、左側の粒子は  $R$  に居る他の粒子との立場からは  $R$  に居る  
 粒子と見られる。この取り扱いは Boltzmann の gas の場合と同様、  
 この性格は、 $t$  と  $t'$  の Boltzmann の gas の場合と同様、



indiv set  $n \neq 1$  is disjoint Borel field  $\mathcal{F}$  is.

$$P(t, x, \mathbb{E} \times \mathbb{R}^\infty) = P^{(n)}(t, x, \mathbb{E}) \quad , \quad \mathbb{E} \in \mathcal{B}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1})$$

#  $(\mathbb{E}) = n < \infty$  のとき.  $\mathbb{E} = E_1 \times \dots \times E_{n-1} \times E_n \times \dots \times E_n \times \dots \times E_n \times \dots \times E_n \times \dots$  (n2)

$$P(t, x, \mathbb{E}) = \sum_{(\#(b_i)=n_i, 1 \leq i \leq k)} \prod_{i=1}^k P(t, (b_i, x_i), E_i) \times \delta_{\mathbb{R}^\infty}(\mathbb{E}')$$

$x_{n_i+t}, \dots, x_{n_i+t-1} \in E_i$   
 $1 \leq i \leq k, n_i \neq 0$

$$= 0 \quad \text{その場合のみ}$$

と定義 ( $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ) と自然に拡張する  $\Rightarrow$  確率分布  $\mathcal{F}$  is.  
 以上  $\Rightarrow$  今の場合は (10)  $n \neq 1$ ,  $\mathbb{E} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  に対して

$$(11) \quad P(s+t, x, \mathbb{E}) = \int_{\mathbb{R}} P(s, x, dy) P(t, y, \mathbb{E})$$

$\Omega = \mathbb{R}^{[0, \infty)} = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^\infty)^{[0, \infty)}$  とし,  $\mathcal{B}$  は  $\Omega$  の cylinder

set から生成された Borel field とする.  $x_t(\omega)$  は  $\Omega$  の元  $\omega$  の  $t$  座標とし,  $x_t^{(n)}(\omega)$  は  $x_t$  の第  $n$  座標とする. なるほど  
 $x_t(\omega) = (x_t^{(1)}(\omega), x_t^{(2)}(\omega), \dots, x_t^{(n)}(\omega))$ . Kolmogorov の拡張定理

は  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  の遷移可能であるから,  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  との transition probability  $P(t, x, \mathbb{E})$  から  $\Omega$  の  $\mathcal{B}$  上の確率分布  $P_x(\cdot)$  が存在する:  $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), 1 \leq i \leq n$ , に対し

$$P_x(\{\omega \in \Omega \mid x_{t_1}(\omega) \in A_1, \dots, x_{t_n}(\omega) \in A_n\})$$

$$= \int_{A_1} P(t_1, x_1, dy_1) \int_{A_2} P(t_2 - t_1, y_1, dy_2) \dots \int_{A_{n-1}} P(t_{n-1} - t_{n-2}, y_{n-2}, dy_{n-1}) P(t_n - t_{n-1}, y_{n-1}, A_n)$$

従って, state space  $\mathbb{R}$ , transition probability  $P(t, x, \mathbb{E})$  と  $t \rightarrow$  Markov process  $\underline{M} = (\Omega, \mathcal{B}, P_x(\cdot), x_t \in \mathbb{R}, x_t(\omega))$  が構成される

「= 粒 + 個」の相対作用が = 序に上起の可能性が事と無限可能  
 能な事と = ... ; 事進のよ < 照念 1 2 ... 2 序のよ = 2 かな  
 3

また, measure  $P_{\alpha}(\cdot) \in$  初期分布  $f^{\infty}(dx) = \prod_{i=1}^{\infty} f_i(dx_i) \in \mathcal{U} = \int_{S_{1,3}} \times f^{\infty}$   
 $= \int_{\sigma_{1,3}(dx_1)} \times \prod_{i=2}^{\infty} f_i(dx_i)$  2 種分 1 本, 計算と各々  $P_{f^{\infty}}(\cdot) \in \mathcal{U}$   
 $P_{\sigma_{1,3} \times f^{\infty}}(\cdot)$  7 表わす,  $u(t, E) = P^f(t, E) \in \mathcal{U} = P^f(t, x_1, E)$  は  
 $u(t, E) = P^f(t, E) = P_{f^{\infty}}(x_t'' \in E)$   
 $P^f(t, x_1, E) = P_{\sigma_{1,3} \times f^{\infty}}(x_t'' \in E)$

である. これは前記のへた直観的説明を正当化する.

5. Boltzmann gas model  $K \rightarrow \dots$   $Kac [ ]$  の propagation of chaos と ... ; 現象を呈出 (たが, = 1 は -12  $u \bar{u}$  と ... )  
 の ... ; 7 表す. 「時刻 0 の各粒 + 1 個の ... ; 7 表す.」 初期条件 ... ; 7 表す  
 分布  $f$  7 表す (たが 7 表す), 7 時間後の位置も亦, 粒を ... ; 7 表す  
 分布に従う. ... ; 7 表すの分布は  $f \in$  初期値と 7 表す Boltzmann  
 方程式の解  $u(t, \cdot) = P^f(t, \cdot)$  7 表す.」 初期条件 ... ; 7 表す  
 Chaos 7 表す「粒 ... ; 7 表す」 ... ; 7 表す (propagate) と ... ; 7 表す.

このたが  $Kac$  が具体的 ... ; 7 表す (た = ... ; 7 表す) 方程式 (1) ... ; 7 表す  
 ... ; 7 表すの通り 7 表す.

$\mathcal{M}$  は  $\text{fix } (\cdot, \mathbb{R}^n)$  ... ; 7 表すのよう generator ... ; 7 表す.

$$G^{(m)}(\underline{x}, \underline{E}) = \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{(k, j, s, m) \\ k \neq j}} g^{(k, j, s)}(\pi(x_i, x_j, E_k) - \delta_{x_i}(E_k))$$

$\underline{x} \in R^n$ ,  $\underline{E} = E_1 \times \dots \times E_n \in \mathcal{B}(R^n)$ ,  $g$  は  $(R^n, \mathcal{B}(R^n))$  上 a kernel  $u$ -値の n 次元積分, 求める

$$\frac{\partial}{\partial t} u = G^{(m)} u$$

は  $(R^n, \mathcal{B}(R^n))$  上の transition probability  $P^{(m)}(t, x, \underline{E})$  を求める

3.  $P^{(m)}(t, x, \underline{E})$  が定まる  $R^n$  上の Markov 過程  $\underline{M}^{(m)}$ , その path function は  $\underline{x}_t(\omega^{(m)}) = (x_t^{(1)}(\omega^{(m)}), \dots, x_t^{(n)}(\omega^{(m)})) \in R^n$ , 上の Markov 過程の measure  $P_x^{(m)}(\cdot)$  は初期分布  $f^{(m)}(dx) = f(dx_1) \times \dots \times f(dx_n)$  を与える.  $\therefore u$  は任意  $u$  関数  $u$  に対して

$$P_{f^{(m)}}^{(m)}(x_t^{(1)} \in E_1, \dots, x_t^{(n)} \in E_n)$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_f(x_t \in E_1) \cdot \dots \cdot P_f(x_t \in E_n) = u(t, E_1) \cdot \dots \cdot u(t, E_n).$$

$\therefore u$  は  $P_f(\cdot)$  を  $n$  次元の  $n$  粒子の運動の transition probability  $P(s, x, t, \underline{E})$  の初期分布  $f$  を用いて定まる  $n$  粒子分布である.

$\therefore$   $n$  粒子の n 次元 Markov 過程の  $n$  粒子の path space を用いると, 最初  $n$  次元の n 粒子の運動を  $n$  次元の path space 上で表現する必要がある.

任意の  $n$  次元  $t > 0$  に対して,  $N_1, N_2, \dots$  を次のように定義する.  $N_1(\omega) = 1, N_2(\omega) = \inf\{n \mid m > N_1(\omega), x_t^{(m)}(\omega) \in R\}, \dots, N_m(\omega) = \inf\{n \mid n > N_{m-1}(\omega), x_t^{(n)}(\omega) \in R\}$ .  $\therefore$   $n$  次元

次のことを示す。

$$P_{f^\infty}(x_t^{(1)} \in E_1, \dots, x_t^{(n)} \in E_n) = P_{f^\infty}(x_t^{(1)} \in E_1) \cdots P_{f^\infty}(x_t^{(n)} \in E_n) \\ = P_f(x_t \in E_1) \cdots P_f(x_t \in E_n) = u(t, E_1) \cdots u(t, E_n),$$

ここで  $u$  は  $\{x_s^{(1)}, s \leq t\}, \dots, \{x_s^{(n)}, s \leq t\}$  による  $P_{f^\infty}(\cdot)$  の条件付き確率である。

$\{x_s^{(1)}, s \leq t\}, \dots, \{x_s^{(n)}, s \leq t\}$  は  $P_{f^\infty}(\cdot)$  の条件付き確率  $P_f(\cdot)$  による  $\{x_s(\omega), s \leq t\}$  の条件付き確率と一致する。

6  $\mathbb{R}^\infty$  を state space とする Markov 過程  $X$  の  $t$  のときの類似の役割を果たすものを構成しよう。前の  $t$  の条件付き確率は  $\mathbb{R}^\infty$  上の  $\mathbb{E} = E_1 \times \cdots \times E_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$  による

$$\tilde{P}^{(n)}(t, x_t, \mathbb{E}) = \sum_{(b_1, \dots, b_n)} \prod_{k=1}^n p(t, b_k | x_t, E_k),$$

但し  $x_t = (x_{\#(b_1)}, \dots, x_{\#(b_n)})$ ,  $x_{\#(b_k)} = (x_{\#(b_k)+1}, \dots, x_{\#(b_k)+\#(b_{k-1})+1}, \dots, x_{\#(b_k)+\#(b_{n-1})+1})$ .

これは  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$  上の確率分布  $\tilde{P}^{(n)}(t, x_t, \mathbb{E})$  によるもので、 $n \rightarrow \infty$  の consistency condition を満たすことは (4) から明らかである。従って  $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty))$  上の確率測度  $\tilde{P}(t, x_t, \mathbb{E})$  をこの条件を満たすものとして定める。

$$\tilde{P}(t, x_t, \mathbb{E}^{(n)} \times \mathbb{R}^\infty) = \tilde{P}^{(n)}(t, x_t, \mathbb{E}^{(n)}), \quad \mathbb{E}^{(n)} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

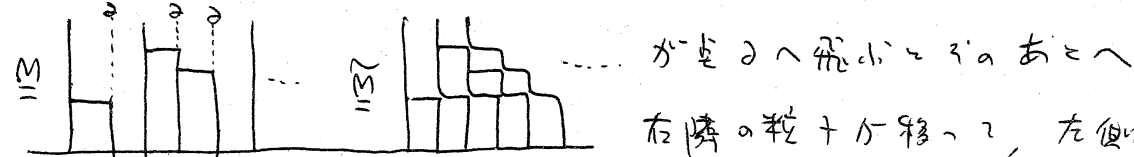
この  $\tilde{P}(t, x_t, \mathbb{E})$  が Chapman-Kolmogorov 方程式を満たすことは

$\omega \in (10)$  の基本結果の証明が完了。  $\Omega = \tilde{\Omega} = (\mathbb{R}^X)^{[0, \infty)}$ ,  
 $\tilde{\mathcal{B}}$  は  $\omega$  の cylinder set の  $\sigma$ -field  $\tilde{\mathcal{B}}$  と呼ばれる Borel field であり、  
 $\tilde{P}(t, x, E)$  は transition probability である Markov 過程  
 $\tilde{M} = \{\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{P}_x(\cdot), x \in \mathbb{R}^X, x_t(\omega)\}$  が成り立つ。

この基本の propagation of chaos は  $\omega$  の  $\omega$  の証明に大要結果が得られる。

$$\tilde{P}_{f \otimes \dots \otimes f}^{\omega}(x_t^{(1)} \in E_1, \dots, x_t^{(m)} \in E_m) = \tilde{P}_{f \otimes \dots \otimes f}^{\omega}(x_t^{(1)} \in E_1) \cdot \dots \cdot \tilde{P}_{f \otimes \dots \otimes f}^{\omega}(x_t^{(m)} \in E_m) = u(t, E_1) \cdot \dots \cdot u(t, E_m)$$

例として  $\omega$  model  $\tilde{M}$  は  $\{x_s^{(1)}, s \leq t\}, \dots, \{x_s^{(m)}, s \leq t\}$  の  
 (時刻  $t \in \mathbb{R}$  の  $\omega$  の条件の下に) 独立な  $\tilde{M}$  のようにあること  
 がある。 したがって  $\omega$  model  $\tilde{M}$  は  $\omega$  の条件の下に  $\omega$  の条件  
 付きの独立な  $\tilde{M}$  のようにある。  $\omega$  model  $\tilde{M}$  の  $\omega$  の条件の下に  $\omega$  の条件  
 付きの独立な  $\tilde{M}$  のようにある。



が  $\omega$  の条件の下に  $\omega$  の条件付きの独立な  $\tilde{M}$  のようにある。 右隣の粒子が移動して、左側の  
 粒子が移動して来るとして  $\omega$  の条件の下に  $\omega$  の条件付きの独立な  $\tilde{M}$  のようにある。 したがって  $\omega$  の条件の下に  $\omega$  の条件  
 付きの独立な  $\tilde{M}$  のようにある。  $\psi \in \{x \in \mathbb{R}^X \mid \#(x) = \infty\}$  かつ  $\mathbb{R}^X$  の  
 数列  $x = (x_1, \omega, \dots, \omega, x_{n_2}, \omega, \dots, \omega, x_{n_3}, x_{n_4}, \omega, \dots)$ ,  $x_{n_i} \in \mathbb{R}, 1 \leq i < \infty$ ,  
 $E = \psi(x) = (x_1, x_{n_2}, x_{n_3}, x_{n_4}, \dots)$  かつ  $\omega$  の条件の下に  $\omega$  の条件付きの独立な  $\tilde{M}$  のようにある。

$$\tilde{P}(t, x, E) = P(t, x, \psi^{-1}(E)), \quad x \in \mathbb{R}^X, E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^X)$$

また, Boltzmann solution の RPA の 1 階行列  $\tilde{p}_t$  は (17) 通り

$$u(t, E) = \tilde{p}_t^{\infty}(\chi_t^{\infty} \in E)$$

$$P^f(t, \chi, E) = \tilde{p}_{\delta_{ix}, \chi}^{\infty}(\chi_t^{\infty} \in E),$$

この model の 一定の条件下で time reversion が成り立つ  
 これより, 2 階行列  $\tilde{p}_t$  の  $\chi$  が  $\chi_t^{\infty}$  と branching process  
 を無限回繰り返すことにより  $\chi_t^{\infty}$  となる (18). このことは  
 Takahashi [10] からも容易に推測できる

7. 最後の一粒の process の構成 = propagation of chaos  
 の証明の過程, 2. Tanaka [11] が導入した process  $u \rightarrow (1, 2, \dots)$ ,  
 に対して, この本質的  $u$  は  $\chi$  の  $\chi_t^{\infty}$  (17) である. 其の  
 state space は  $\bigcup_{n=0}^{\infty} R^n$ , 但し  $R^0 = \{\emptyset\}$ ,  $\chi \in R^n$ ,  
 $\Xi = E_1 \times \dots \times E_m \in \mathcal{B}(R^m)$  に対して

$$P_{n,m}(t, \chi, \Xi) = \sum_{\#(b_1) + \dots + \#(b_m) = n} \prod_{k=1}^m P(t, b_k(\chi_{t_0}), E_k), \quad n \geq m$$

$$= 0, \quad n < m$$

と置く. このとき  $\chi \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ ,  $\Xi \in \mathcal{B}(\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n)$  に対して

$$P^*(t, \chi, \Xi) = \sum_{m=1}^{\infty} P_{n,m}(t, \chi, \Xi \cap R^m)$$

と定義する. このとき  $P^*$  は Chapman-Kolmogorov  
 の方程式を  $\chi$  が  $\chi_t^{\infty}$  である mass defect を持つ  $\chi = \chi_t^{\infty}$

$$P^*(t, \chi, \{\emptyset\}) = 1 - P^*(t, \chi, \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n), \quad \chi \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$$

$$P^*(t, \emptyset, \{\emptyset\}) = 1$$



と定まると  $\tilde{O}R^n$  への transition probability であり、これを  
 使って定まる Markov 過程が得られる。 Boltzmann solution は

$$u(t, E) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R^n} f^n(dx_1) p^k(t, x_1, E)$$

$$p^k(t, x_1, E) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R^{n-1}} f(dx_2) \dots f(dx_n) p^k(t, x_1, E)$$

によつて得られる。この式は一見、初期分布  $\sum_1^{\infty} f^n(dx_1)$  と  
 $p^k(t, x_1, E)$  と積分（左から見て）の結果が  $\leq 1$  である  
 の当然のよりの見え方、  $\sum_1^{\infty} f^n$  の total mass は  $\infty$  である  
 から収束自体も自明とはいえない。  $t \rightarrow \infty$  であることの

証明自体は容易である

$$\begin{aligned} \sum_1^{\infty} \int_{R^n} f^n(dx_1) p^k(t, x_1, E) &= \sum_1^{\infty} \int_{R^n} f^n(dx_1) p_{n,1}(t, x_1, E) \\ &= \sum_1^{\infty} \int_{R^n} f^n(dx_1) \sum_{\#(b)=n} p(t, 0(x_1), E) = \int_{R^{\infty}} f^{\infty}(dx_1) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\#(b)=n} p(t, 0(x_1), E) \\ &= \int_{R^{\infty}} f^{\infty}(dx_1) \sum_b p(t, 0(x_1), E) = u(t, E). \end{aligned}$$

結果として  $\tilde{O}R^n$  への transition probability としての  $p^k(t, x_1, E)$   
 の mass defect の本質的役割が明らかになる。

この  $2 \sim \infty$  であるの意味は  $\tilde{O}R^n$  ではなく  $\tilde{O}R^{\infty}$  の場合  
 12,

$$\begin{aligned} p^k(t, x_1, \infty) &= 1 - p(t, x_1, \tilde{O}R^n) = 1 - p(t, x_1, R) \\ &= 1 - p(t, 0(x_1), R) = \sum_{\#(b) \geq 2} p(t, 0(x_1), R). \end{aligned}$$

この  $\infty$  は  $\tilde{O}R^{\infty}$  全体から  $x_1$  を取り除いた任意の  $\tilde{O}R^n$  のこと

また、従って  $P^*(t, x_1, \emptyset)$  は時刻  $0$  に  $x_1$  の粒子が時刻  $t$  まで他の粒子と衝突しないうち  $t - \text{interact}$  (2) の確率である。

同様に (2),  $P^*(t, (x_1, \dots, x_n), \emptyset)$  は,  $x_1, \dots, x_n$  個の粒子が, 番号が  $n+1$  以上の座標から出る粒子と時刻  $t$  まで  $\text{interact}$  (2) の確率である。実際,  $x$  は  $n$  座標から  $x^* = (x_1, \dots, x_n)$  と一対する  $R^n$  の点と見ると,  $x$  の座標は  $P_x(x_t^{(n+1)} = \emptyset)$  である。よって

$$\begin{aligned} P_x(x_t^{(n+1)} = \emptyset) &= 1 - P_x(x_t^{(n+1)} \in R) \\ &= 1 - \sum_{\substack{\#(b_1) + \dots + \#(b_n) = 1 \\ \#(b_{n+1}) \geq 1}} \prod_{k=1}^{n+1} P(t, b_k | x^*, R) \\ &= 1 - \sum_{1 \leq m \leq n} \sum_{\#(b_1) + \dots + \#(b_m) = n} \prod_{k=1}^m P(t, b_k | x^*, R) \\ &= 1 - \sum_{m=1}^n P_{n,m}(t, x^*, R) = 1 - P^*(t, x^*, \bigcup_{m=1}^n R^m) \\ &= 1 - P^*(t, x^*, \bigcup_1^\infty R^m) = P^*(t, x^*, \emptyset). \end{aligned}$$

従って前記に出てきた無限和  $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{R^n} f^{(n)}(x) P^*(t, x, E)$  の各項は互いに互いに非負な事象の対応しており, 和が  $\leq 1$  であるのことが当然である。

また, 二粒子間の相関関数  $P(t, (x_1, x_2), E)$  を考えると (2) 無限和の粒子が  $t$  の時刻に  $x$  の座標から出てくる確率は,

どのような相互作用を行って  $\varepsilon = \mu$  層の  $\rho$  を描く  $\rho$  path space を構成することは可能であるか、については省略す。

$\mu < \rho$  のときは本論文の  $\mu$  の  $\rho$  の本界の  $\rho$  である、この有効な方法がある、それ以外の場合は  $\rho$  の  $\mu$  に対して新しい  $\rho$  の  $\mu$  の  $\rho$  と定められた。

### 文献

1. L. Boltzmann, Lectures on gas theory, Univ. California Press
2. F.A. Grünbaum, Propagation of chaos for the Boltzmann equation, Arch. Rat. Mech. Anal., 42, 323-344(1971)
3. D.P. Johnson, On a class of stochastic processes and its relationship in infinite particle gases, Trans. Amer. Math. Soc., 132, 275-295 (1968)
4. M. Kac, Foundations of kinetic theory, Proc. 3rd Berkeley Symp. vol. 3, 171-197(1955)

5. M. Kac, Probability and related topics in the physical sciences, New York(1959)
6. H.P. McKean, Speed of approach to the equilibrium for Kac's caricature of a Maxwellian gas, Arch. Rat. Mech. Anal., 21, 343-367 (1966)
7. H.P. McKean, A class of Markov processes associated with non-linear parabolic equations, Proc. Nat. Acad. Sci., 56, 1907-1911(1966)
8. H.P. McKean, An exponential formula for solving Boltzmann equation for a Maxwellian gas, J. Combinatorial Theory, 2, 358-382(1967)
9. H.P. McKean, Propagation of chaos for a class of non-linear parabolic equations, Lecture series in Differential Equations, session 7, Catholic Univ.(1967)
10. Y. Takahashi, Markov semigroups with simplest interactions, I-II (to appear)
11. H. Tanaka, Propagation of chaos for certain purely discontinuous Markov processes with interactions, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I, 17, 259-272(1970)
12. S. Tanaka, An extension of Wild's sum for solving certain non-linear equation of measure, Proc. Japan Acad., 44, 884-889(1968)
13. T. Ueno, A class of Markov processes with interaction I-II, Proc. Japan Acad., 45, 641-646, 995-1000(1969)
14. T. Ueno, A path space and the propagation of chaos for a Boltzmann's gas model, Proc. Japan Acad., 47, 529-533(1971)
15. E. Wild, On Boltzmann's equation in the kinetic theory of gases, Proc. Camb. Phil. Soc., 47, 602-609(1951)