数理解析研究所講究録
第174巻 1973年 126-129

非線形振り子

大教大 物理　鯖田秀樹

§1. 序

調和振動子系では基準振動 (normal mode) の存在によって，エルゴード性が成立しない。気体分子の場合の衝突と対応させて，各 mode 間にエネルギーのやりとりさせるために非調和力をつけ加えると，エルゴード性が成り立つかも知れないと考えて，F.P.U. (Fermi, Pasta, Ulam.) に始まり，Saito にいたる一連の電子計算機実験が行われた。

それは，調和系の特定の mode を励起し，そのエネルギーが他の mode に等分配されるや否かで熱平衡への近迫ひいてはエルゴード性をもつかどうかを調べたものである。

結果は等分配は起らず，再帰現象が見られ，エルゴード性が成り立たないことがわかった。

この再帰現象を示すものは何かという研究からソリトンが現われ，KdV eq.，Toda lattice 等との関連で研究され，

非線形Klein-Gordon eq. (Hirota) 等も含めた非線形波動論の研究が展開されている。

§2. 少し複雑な振り子

古来，非線形振動の簡単なモデルとして単振り子があり，解がJacobiの楕円関数で書けることからくわしく研究されている[1]。これを複雑にした変わったタイプの振り子をつくり，それを出発点として，いろいろな非線形現象を考えることができる[2]。複雑な生物現象を理解するには，モデルそのものが今までより複雑で，対称性をもったものである必要があろう。この振り子もその点で生物現象を研究するための一助となり得るものと考えられる。

ふつうの単振り子の方程式

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \qquad (1)$$

の特殊解

$$\sin\frac{\theta}{2} = \tanh\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right) \qquad (2)$$

の代りに

$$\tan\varphi = at \quad (a\,;\ 定数) \qquad (3)$$

を特殊解としてもつ振り子の方程式は

$$\ddot{\varphi} + 2a^2\cos^3\varphi\,\sin\varphi = 0 \qquad (4)$$

(3)式の特殊解を考える理由は，文献 2) にあるように波動方程式の解の変換にある。

(4)の両辺に $\frac{d\varphi}{dt}$ をかけて t について積分すれば

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+\frac{a^2}{2}(1-\cos 4\varphi)=E \qquad (5)$$

が得られ(1)式の単振り子と比較して，ポテンシャル・エネルギーの項が $1-\cos\theta$ から $1-\cos 4\varphi$ におき換えられた振り子であることがわかる。

§3．楕円関数による解

(i) $E<\frac{a^2}{2}$ （振動解）

$$k^2=\frac{1-\sqrt{1-\frac{2E}{a^2}}}{2}$$ を母数として

$$\sin^2\varphi=2k'^2\left(1-\frac{k'^2-k^2}{k'^2-k^2\,\mathrm{cn}^2}\right) \qquad (6)$$

$\mathrm{cn}^2=\mathrm{cn}^2\left\{\sqrt{2(k'^2-k^2)}\,at,\ k\right\}$　k'：補母数

$\sin^2\alpha=2k^2$ なる α が振幅を与え，振動は $-\alpha\leqq\varphi\leqq\alpha$ でおこなわれる。

周期は　$\sqrt{2(k'^2-k^2)}\,a\frac{T}{4}=K(k)$　から

$$T=\frac{4K(k)}{\sqrt{2(k'^2-k^2)}\cdot a} \qquad (7)$$

となる。$K(k)$ は第1種の完全楕円積分。

(ii) $E > \frac{a^2}{2}$ (回転解)

$$k^2 = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{2E}}}{2}$$ を母数として

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2k^2}\left(1 - \frac{k'^2 - k^2}{k'^2 - k^2 cn}\right) \qquad (8)$$

$$cn = cn\left(\frac{\sqrt{k'^2 - k^2}}{k'k}at,\ k\right) \qquad k' : 補母数$$

周期は一周に要する時間の半分でもあり

$$\frac{\sqrt{k'^2 - k^2}}{k'k} a \frac{T}{4} = K(k)$$ から

$$T = \frac{4k'k\,K(k)}{\sqrt{k'^2 - k^2}\cdot a} \qquad (9)$$

(7), (8) の解は (1) の解と比較して cn, cn^2 という形で時間依存性が入っていて, 振動と回転で様子が異なる。

もちろん $E = \frac{a^2}{2}$ のときは (3) の $\tan\varphi = at$ が解になっている。

文献

1) 戸田盛和：振動論．培風館（昭和43年）P. 49

2) 鯖田秀樹：波とあそぶ 数理科学 NO. 107, MAY 1972. P. 42