数理解析研究所講究録
第174巻 1973年 130-163

Boltzmannモデルと Volterraモデルについて

京大理数学　山口昌哉

§0 はしがき

この研究集会で筆者は，上記の題目のもとに，主として H.E. Conner の文献[1]について紹介した。この仕事は，quadratic population モデルについての R.D. Jenks の最近の仕事[2],[3]，これは下のような常微分方程式系：

$$(1)\qquad \frac{du_i}{dt} = \sum_{j,k} a^i_{jk} u_j u_k \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

についてのものであるが，（a^i_{jk} についての仮定は後に述べる），この仕事の結果を利用して，Boltzmann の discrete モデル：

$$(2)\qquad \frac{\partial u_i}{\partial t} = -v_i\frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_{j,k} B^i_{jk} u_j u_k$$

の初期値問題について，解の大局的存在をえるという趣旨の論文であった，報告ののち，上記 Conner の論文に重大な

誤まり*を発見し、この定理の適用の範囲は著しく狭いことに氣がついた（三村昌泰氏の指摘による）。しかし其後ただちに、Jenksの上記の仕事を方程式(2)とむすびつけて存在定理を出すという方向は、幾分のComerのアイデアを取入れた三村氏の仕事で可能となった。[4]。結局、方法は全く異なるがComerのねらった結果は証明された。そこで筆者はもう1度Jenksの仕事と三村の方法を反省することにして、三村氏と協同で、次のような方程式系：

$$(3) \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} = d_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + v_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_{j,k} B^i_{jk} u_j u_k, \quad (d_i \geq 0)$$

について、初期値問題の解のA priori boundを求める問題として、幾分の考察をした。問題は「方程式(3)の初期値問題について、B^i_{jk}についてはJenksが定めた条件の範囲で、d_i, v_iが任意の場合、"初期値の有界性から解の有界性が保証されるためには、B^i_{jk}にどれだけの条件をつけくわえれば十分なのか？」という問題であって、以下にJenksの結果と、我々の研究の結果とを報告する。尚本研究集会の田中　洋，高橋陽一郎氏が訳し筆者達に送られた、ソビエトのGodunov，Sultangazinの研究[5]にもふれるが、上の問題を解いているものではない。

§1. Jenks の研究 と Examples

Jenks [2] は, Quadratic differential system for interacting population model として次のような常微分方程式系を提案している。

$$\text{(4)} \qquad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j,k}^{n,n} a^i_{jk} x_j x_k \qquad i \in \langle 1, n \rangle$$

ここで $\langle 1, n \rangle$ は $(1, 2, \cdots, n)$ の略記号である。 a^i_{jk} は実定数 (n^3 こ) であって次の条件 イ) ロ) ハ) をみたす。

$$\text{(5)} \quad \begin{cases} (イ) \quad a^i_{jk} = a^i_{kj} & i, j, k \in \langle 1, n \rangle \\ (ロ) \quad \sum_{i=1}^{n} a^i_{jk} = 0 & j, k \in \langle 1, n \rangle \\ (ハ) \quad a^i_{jk} \geqq 0 & j \neq i, \ k \neq i \quad j, k \in \langle 1, n \rangle \end{cases}$$

Jenks は (4), (5) について, n 種の個体群からなる群集についてのそれらが2種づつ interact する場合のモデル方程式だとする。 ここで x_i は i 種の population faction であると説明する。古典的な EXAMPLES を挙げよう。

Ex. 1. Volterra の方程式:

Volterra の prey と predator の式で特にすべての種の増殖率 (その種のみが生きるときの) $= 0$ とすれば ([6]

を見よ)，x_i は第 i 種の population fraction である。

$$\frac{dx_i}{dt} = \left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j\right) x_i \qquad i \in \langle 1, n \rangle$$

$$c_{ij} = -c_{ji} \qquad i, j \in \langle 1, n \rangle$$

これが，Volterra の方程式の特殊型であるが，$2a^i_{ij} = 2a^i_{ji} = c_{ij}$ とおけば，上の仮定 イ)，ロ)，ハ) をみたす。この場合 ハ) は等号でみたされていることに注意をむけておこう。すなわち，上の Volterra の型では，「ある時刻に存在しなかった種の population が時刻の経過とともに新しく誕生することはないわけである。」

Ex. 2. Boltzmann の discrete model. (Spatially homog)

等しい重さの，等しい半径の球としての分子からなる一様なガスを考え，個々の分子の Velocity は n 個しかないと考える。つまり Velocity space E^3 を n 個の集合 B_i の合併とし，$x_i(t)$ は時刻 t で B_i に入る Velocity をもつ分子の population fraction とする。$\mu_{jk} > 0$ として，$\mu_{jk} x_j x_k$ が j 種の分子と k 種の分子の衝突（単位時間）の数と考える。2 体衝突のみを考えることにして，

$p^i_{jk} \mu_{jk} x_j x_k$ は Δt 時間に，j-k 衝突によって i 分子

が i 分子に変化する数とする。ここで p^i_{jk} は確率であって

$$p^i_{jk} \geqq 0 \,, \qquad \sum_{i=1}^{n} p^i_{jk} = 1$$

である。Δt 時間における B_i への出入りを Δx_i とおいて計算すると

$$\frac{\Delta x_i}{\Delta t} = \sum_{j,k} \left(p^i_{jk} \mu_{jk} x_j x_k - p^j_{ik} \mu_{ik} x_i x_k \right)$$

$$= \sum_{j,k} \left(p^i_{jk} - \delta_{ij} \right) \mu_{jk} x_j x_k$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j,k} \mu_{jk} \left\{ \left(p^i_{jk} + p^i_{kj} \right) - \left(\delta_{ij} + \delta_{ik} \right) \right\} x_j x_k$$

よって、$a^i_{jk} = \frac{1}{2} \mu_{jk} \left\{ \left(p^i_{jk} + p^i_{kj} \right) - \left(\delta_{ij} + \delta_{ik} \right) \right\}$ とおけば、上のイ),ロ),ハ) を満足するのである。この場合形式的には上の Volterra の方程式もふくむわけであるが（つまり j,k -衝突から j,k 以外の新種 i が誕生しない場合）、一般にある時刻に存在しなかった新しい種が生まれてくる場合も含んでいる。以下に述べる Jenks の結果のうち重要なものは EXAMPLE 1 を含まないような、ワクについて述べられる。（従って、そのようなものだけを spatially homogenous な discrete Boltzmann モデルと言うべきであろう）

○ Jenks の結果(I) Confinement of trajectory.

上に述べたように，いづれの場合も x_i についての意味づけ：population fraction ということから R^n における次の集合 P（probability simplex とよぶ）は重要である。

$$P: \begin{cases} x_i \geqq 0 & i \in \langle 1, n \rangle \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \end{cases}$$

定理 1（Jenks） 方程式系 (4) において，(5) の条件がみたされるならば P から出た解 $x(t)$ は常に P を出ない。

証明 (5) の条件 イ)，ロ)，ハ) のうち，特に ロ) がみたされてなければ上のようなことはおこるが (4) は global な解さえもちえないことは次の三村の例でわかる。

例．

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = -u^2 + 3v^2 \\ \\ \dfrac{dv}{dt} = 3u^2 - v^2 \end{cases}$$

イ)，ハ) はみたしているが，ロ) はみたしていない。

$$\frac{d}{dt}(u-v) = +4v^2 - 4u^2 = -4(v+u)(u-v)$$

であるから，$u(0) = v(0)$ とおくと，局所一意性より $u(t) = v(t)$

$$\frac{du}{dt} = 2u^2, \quad \frac{dv}{dt} = 2v^2$$

でこれは非負の初期値に対して有限時間で爆発する有名な例である。

定理の証明は先ず、(4) を i について加えて

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = 0 \quad , \quad x_i(0) \in P$$

よって、$\sum_{i=1}^{n} x_i(0) = 1$ から $\sum_{i=1}^{n} x_i(t) = 1$

次に $x(0) \in P$ から $x_i(t) \geqq 0 \quad (\forall i \in \langle 1, n \rangle)$ が保証される必十条件は、$x_i(0) = \eta_i$ とかくと $\eta \in P$ で且つ、F_i を P の $x_i = 0$ の Face とすると、$\frac{dx_i}{dt} \geqq 0$ つまり、

$$\sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i} a^i_{jk} \eta_j \eta_k \geqq 0 \qquad (\eta \in F_i)$$

このためには ハ) は十分条件であるから証明がおわる。

○Jenks の結果 (II) P における critical pt の存在.

次に、(4) において右辺 $\sum_{j,k} a^i_{jk} \eta_j \eta_k = 0 \ (\forall i \in \langle 1, n \rangle)$ となるような点 η が P に存在したとき η を (4) の critical pt とよぶ。これが実際 P に存在することを示す.

lemma. η は P の点とするとして、$\dot{x}_i(\eta) = \sum_{j,k} a^i_{jk} \eta_j \eta_k$ なる記号を用いると、b なる正数が存在して、$\forall \eta \in P$ について次の不等式が成立する.

$$0 \leq \eta_i + \frac{1}{b} \dot{x}_i(\eta) \leq 1 \qquad i \in \langle 1, n \rangle$$

証明．次のように定数 m，l を定める．

$$m = \max_{j \in \langle 1,n \rangle} \{ \sup_{\eta \in E} |\dot{x}_i(\eta)| \} ,$$

$$l = \max_{i \in \langle 1,n \rangle} \{ 2 \sum_{j \neq i} |a^i_{ij}| + |a^i_{ii}| \}$$

今 $\eta_i \leqq \frac{1}{2}$ の場合は，(1) と $\dot{x}_i(\eta)$ の定義より

$$\dot{x}_i(\eta) \leqq 2m(1-\eta_i), \quad \dot{x}_i(\eta) \geqq 2 \sum_{j \neq i} a^i_{ij} \eta_i \eta_j + a^i_{ii} \eta_i^2$$
$$\geqq -l \eta_i$$

又 $\eta_i \geqq \frac{1}{2}$ の場合は，$u = \max_{i \in \langle 1,n \rangle} \{ 2 \sum_{k \neq i} |a^i_{ik}| + \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i} a^i_{jk} \}$

として，$\dot{x}_i(\eta) \geqq -2m\eta_i$，$\eta_j \leqq 1-\eta_i \quad (j \neq i)$ より

$$\dot{x}_i(\eta) \leqq 2 \sum_{j \neq i} |a^i_{ij}| \eta_i \eta_j + \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i} a^i_{jk} \eta_j \eta_k$$
$$\leqq u(1-\eta_i)$$

よって，$b = \max \{ 2m, l, u \}$ ととれば

$$-b\eta_i \leqq \dot{x}_i(\eta) \leqq b(1-\eta_i)$$

がつねに成立する．lemma は証明された．

定理2(Jenks) (4)は(5)の条件のもとにP上に少くとも1つcritical pointをもつ。

証明. 助変数hをもった mapping:

$$\sigma(h,\eta) = \eta + h\,x(\eta) = \eta + h\Big(\sum_{j,k} a^i_{jk}\eta_j\eta_k\Big)$$

を考える。上のlemmaより $h=\frac{1}{t}$ として, $\sigma(\frac{1}{t},\eta)$ はPからPへのmappingである。Brouwerの不動点定理から, $\xi\in P$が存在して,

$$\xi_i = \xi_i + x_i(\xi)$$ である。よって,

$$\sum_{j,k} a^i_{jk}\xi_j\xi_k = 0 \quad (\forall i\in\langle 1,n\rangle)$$

○Jenksの結果(III). Internal Critical pointの存在.

次に上記のcritical ptがPの内部$\mathring{P}$にすべて存在するための条件をしらべよう。これはもしこのI.C.Pが安定であれば$t\to+\infty$のとき, すべての種のpopulationが0でないような終極状態をもつことであるから重要である。そして, Volterraのようなsystemでは絶対にそうならないことが証明される。この結果を紹介するためには次のStrongly connected (irreducibility)の概念が必要である。

<u>定義</u> IとJは$\langle 1,n\rangle$の真部分集合で $I\cup J=\langle 1,n\rangle$, $I\cap J=\phi$なるときつねに, $\exists i\in I$, $\exists j,k\in J$で $a^i_{jk}\neq 0$ なると

のが存在するとき，$\{a^i_{jk}\}$ は strongly connected であるとよぶ。

定理3（Jenks）

方程式 (4) を条件 (5) のもとに考える，すべての critical pt が $\overset{\circ}{P}$ にあるための条件（必要十分）は $\{a^i_{jk}\}$ は strongly connected である。

証明（十分性）C.P. である ξ がある F_i にあったとする。

$$I=\{ i \in \langle 1, n\rangle ,\ | \ \xi_i > 0 \}$$

とする，　$0=\dot{x}_i(\xi)=\sum_{j,k} a^i_{jk}\xi_j\xi_k \qquad (j,k\in I)$.

$\forall i \in \complement I$,　(ハ) により　$a^i_{jk} \geqq 0$，　$a^i_{jk}=0\ \forall j,k\in I$.

よって，$\complement I$ と I によって，$\{a^i_{jk}\}$ が strongly connected でないことになる。

（必要性）$\{a^i_{jk}\}$ が not strongly connected としよう。$\exists I \subset \langle 1, n\rangle$，$I \neq \langle 1,n\rangle$ とすれば，

$$\forall i \in \complement I,\ \forall j,k \in I \qquad a^i_{jk}=0$$

$$\sum_{i\in I} a^i_{jk} = 0 \qquad \text{(ロ) より.}$$

よって，$\{a^i_{jk}\}$ を i,j,k をすべて I に制限して考えても (イ)(ロ)(ハ) が成立する。Th 2 によって，P_I（P の I への制限）に C.P. が存在する。これは P 上の critical point でも

あり，しかも$\xi_i = 0$　$(i \in CI)$であるから，$\mathbb{P}$のBoundary critical pointである。　証明おわり

例　特別な場合として

$$(6) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \sum_j d_{ij} x_j^2 \qquad i \in \langle 1, n \rangle$$

つまり　$a^i_{jk} = \delta_{jk} d_{ij}$　となる特殊な場合である．条件$\sum_{i=1}^{n} d_{ij} = 0$，　$d_{ij} \geqq 0$　$(i \neq j)$　をつければ(5)をみたす．更に行列$[d_{ij}]$がirreducibleの場合　つまり，I，Jが$\langle 1, n \rangle$の真部分集合で且つ$I \cup J = \langle 1, n \rangle$，$I \cap J = \phi$のとき，必らず$\exists i, j$が存在して$d_{ij} > 0$となる場合は定理3の条件であるstrongly connectedであり，定理により必らず$\mathring{\mathbb{P}}$内にI.C.Pをもつ　定理3ではいくつもI.C.P.をもつことを排除できないがこの特殊型については唯一つのI.C.Pがある。それはPerron Frobeniusの定理による。何故なら，今$d > 0$を十分大にとって，行列$A = [d_{ij}]$に対し$A + dI$を考えると，irreducibilityは不変であり且つ，各entryが非負のnon negative irreducibleな行列ができる．Perron Frobeniusの定理により，最大の絶対値の固有値（Frobenius根）は正でsimpleである。

それは,すべての component が正の固有ベクトル ξ をもつ,固有値を λ とすると,

$$[A+dI]\,\xi=\lambda\xi$$

$u=(1,1,\cdots,1)$ なるベクトルを左からかけると,条件ロ)により,　$d\,\xi=\lambda\xi$

となり $\xi>0$ より　$d=\lambda$ である。　$A\xi=0$ となる。

$$\eta_i=\frac{\sqrt{\xi_i}}{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\xi_i}}$$ とおくと,

$$\sum_{j=1}^{n}d_{ij}\eta_j^2=0.$$

あきらかに,この η_i 以外に解はない.固有値が simple であるから。

注意1. Th. 3の仮定, strong connectivity がある場合でも I. C. P が唯一つとは,限らないことは次の例がある。

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-x_1^2+x_2^2 & -8x_1x_2+6x_1x_3+2x_2x_3\\ \dot{x}_2=x_1^2-x_2^2+4x_3^2 & -12x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3\\ \dot{x}_3=-4x_3^2 & +20x_1x_2-8x_1x_3-8x_2x_3\end{cases}$$

この system は 2つの I. C. P をもつ. 1つは degenerate saddle で,1つは stable node である。

注意2. 上の定理でJenks の求めたのは，すべてのC.P. が I.C.P であるための条件であってそれがStrong connectivity であった。したがって(6) の更に$n=2$ の特殊な場合である：

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} = u_2^2 - u_1^2 \\[2ex] \dfrac{du_2}{dt} = u_1^2 - u_2^2 \end{cases}$$

には適用できるが，

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} = u_1 u_2 \\[2ex] \dfrac{du_2}{dt} = -u_1 u_2 \end{cases}$$

のような Volterra system は排除されているのである。これは I.C.P をもたない。

○ Jenks の結果(Ⅳ) Asymptotic stability of I.C.P.

以下では internal critical point の Stability について の結果を述べよう. Stability については多くの定義があるがここでは2つだけ述べておこう，([7] を見られたい).

定義 I.C.P. ξ が asymptotically stable であるとは，

$\delta > 0$ が存在して，$\eta_0 \in P$ について，

$\| x(\eta_0, t_0) - \xi \| < \delta$ ならば $\lim_{t \to +\infty} x(\eta_0, t) = \xi$ となるときをいう。

定義．I．C．P ξ が asymptotically stable in the large とは，P の有限個の点 η_0 をのぞいて，すべての $\eta_0 \in P$ について $\lim_{t \to +\infty} x(\eta_0, t) = \xi$ が成立するときをいう。

以下，この節では ξ は (4) の1つの I．C．P とする．これに対して次の行列 R_ξ を考察する。$R_\xi = [r_{ij}]$ として，

$$(9) \qquad r_{ij} = 2 \sum_{k=1}^{n} a^i_{jk} \xi_k$$

あきらかに，$R_\xi \cdot \xi = 0$，又 R_ξ の列の和は0である．この行列は $x = \xi + y$ とおいて (4) をかきなおしたとき，y に関する1次の係数行列として下のように出てくる．

$$(10) \qquad \frac{dy}{dt} = R_\xi y + o(\|y\|) \qquad \|y\| \to 0$$

しかし，y は $\sum_{i=1}^{n} y_i = 0$ という関係をもつので (10) は1つの constrained system である。次の安定性定理は証明なしに述べておこう．

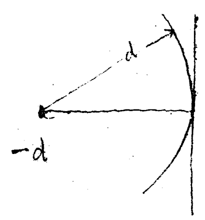
定理4 (Jenks) (4) の I. C. P ξ は行列 R_ξ が 0 stable のとき, asymptotically stable であり, R_ξ が unstable のとき unstable である。

註. c_i $i \in \langle 1, n \rangle$ を固有値にもつ行列 M が 0 stable であるとは, いくつかの $c_i = 0$ で, $j \neq i$ なる c_j については $Re(c_j) < 0$ の場合をいい, 一方 c_i のうちに1つでも $Re(c_i) > 0$ なものが存在するとき unstable とよぶ。

系1. ξ を (4) の I. C. P とし, 行列 R_ξ が irreducible で, off diagonal element $\geqq 0$ であれば, ξ は asymptotically stable である。

証明 再び Perron Frobenius の定理である。

$d > 0$ を十分大とすると, $R_\xi + dI$ は irreducible 且つ non negative, P.F Theorem を適用すると前に見たごとく, d は Frobenius 根となる。simple である。R_ξ については 0 が simple で且つその他の固有値を z とすると, $z + d$ は $R_\xi + dI$ の d 以外の固有値となり d は絶対値最大であったから, $|z + d| \leqq d$ となる。よって, $Re(z) < 0$ となるほかはない。



系2. 特に方程式 (6) において, $[d_{ij}]$ が irreducible 且つ $d_{ij} \geq 0$ $(i \neq j)$ ならば唯1つの I.C.P ξ は Asymptotically stable である。

何故なら $R_\xi = \sum d_{ij}\xi_j$ であるからである. 系1による. 更にこの場合 (6) に対しては次のようなLiapunov function:

$$V(\eta) = \frac{1}{6}\sum_i \{(\eta_i^3 - \xi_i^3)/\xi_i^2\}$$

が用いられて, ξ は asymptotically stable in the large となる。(Jenks [2] を見よ)

§2. Quadratic interaction をもつ偏微分方程式系について,

簡単のために, 空間1次元で考える。ここで問題にするのは次のような偏微分方程式系である. $d_i \geq 0$ として,

$$(11) \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} = d_i\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + p_i\frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_{j,k} B^i_{jk} u_j u_k \qquad i \in \langle 1, n\rangle$$

つまり, n 種の個体群 population が2種ごとの interaction をもって変化すると同時に空間的にも移動する場合であって, このような現象は無数にある。例えば §1 で述べた Boltzm ann モデルにしても, spatially inhomogeneous が自然であつて, i という velocity の分子は p_i という speed で移動している筈であつてその場合には,

$$(12) \qquad \frac{\partial u_i}{\partial t} = p_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_{j,k} B^i_{jk} u_j u_k \qquad i \in \langle 1, n \rangle$$

という型になり, これこそ Carlemann が提案した discrete Boltzmann モデルである。又 H. E. Conner が上記 Jenks の研究を用いて, (12) の初期値問題の大局解を出そうとしたわけである。一方, 1階微分の項のない場合については, いくつかの例について三村が, 又或る程度一般の場合にも, 山口, 三村, 亀高の共同の研究 [8] [9] によつて, A priori bound を発見すること, したがつて大局的な解の存在が示されている。そこで, Jenks に似た B^i_{jk} の仮定に更に十分条件をつけ加えることによつて, (11) の方程式の初期値問題をしらべようというのがこの報告の後半になる。

§2. 偏微分方程式系

ここでは, 次の方程式系を考える.

$$(13) \qquad \frac{\partial u_i}{\partial t} = d_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + p_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_{j,k} a^i_{jk} u_j u_k$$

a^i_{jk} についての仮定は，次のイ，ロ′，ハ とする

(イ) $a^i_{jk} = a^i_{kj}$

(ロ)′ $\sum_i a^i_{jk} \leqq 0$

(ハ) $a^i_{jk} \geqq 0 \quad (j \neq i,\ k \neq i)$

(13) の初期値問題を考えるにあたって，最初次のことを仮定する。u_i の初期値を $g_i(x)$ とし，

(14) $0 \leq g_i(x) \leq 1$

としよう。そして「(14) という初期値に対し (13) の解を $u_i(x,t)$ とすれば，$0 \leq u_i(x,t) \leq 1$ が $t > 0$ についてみたされる a^i_{jk} の条件」を求める。

三村の方法で (13) を差分化する。ただし，$\frac{\partial}{\partial t}$ は前進差分商，$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ は中心差分商，$\frac{\partial}{\partial x}$ は次の差分商 D_x でおきかえ，更に人工的な項 $S^i(u_i^{n+1,p} - u_i^{n,p})$ をつけくわえる。実行すると，（k：時間間隔 h：空間間隔）

$$\frac{u_i^{n+1,p} - u_i^{n,p}}{k} = d_i \frac{u_i^{n,p+1} - 2u_i^{n,p} + u_i^{n,p-1}}{h^2} + \beta_i D_x u_i^{n,p}$$

$$+\sum a^i_{jk} u_j^{n,p} u_k^{n,p} = -S^i(u_i^{n+1,p} - u_i^{n,p})$$

ここで D_x は次のものである。

$$D_x u_i^{n,p} = \begin{cases} \dfrac{u_i^{n,p+1} - u_i^{n,p-1}}{2h} & (d_i > 0) \\ \operatorname{sgn} p_i \dfrac{u_i^{n,p+\frac{p_i}{|p_i|}} - u_i^{n,p}}{h} & (d_i = 0) \end{cases}$$

k, を両辺にかけると,

$$u_i^{n+1,p} = u_i^{n,p} + d_i \frac{k}{h^2}(u_i^{n,p+1} - 2u_i^{n,p} + u_i^{n,p-1})$$
$$+ k p_i D_x u_i^{n,p} + k \sum a^i_{jk} u_j^{n,p} u_k^{n,p}$$
$$- k S^i(u_i^{n+1,p} - u_i^{n,p})$$

ここで $d_i \neq 0$ (~~すべて~~) のときは, D_x の定義より,

$$u_i^{n+1,p} = \frac{1}{1+kS^i}\left[\left\{\left(\frac{k}{h^2}d_i + \frac{kp_i}{2h}\right)u_i^{n,p+1} + \left(1 - 2\frac{kd_i}{h^2}\right)u_i^{n,p} + \left(\frac{k}{h^2}d_i - \frac{kp_i}{2h}\right)u_i^{n,p-1}\right\} + \underline{k\sum_{j,k} a^i_{jk} u_j^{n,p} u_k^{n,p} + kS^i u_i^{n,p}}\right]$$

とかける。更に $d_i = 0$ の i については,

$$u_i^{n+1,p} = \frac{1}{1+kS^i}\left[\left\{\left(1-\operatorname{sgn} p_i \cdot \frac{k}{h} p_i\right) u_i^{n,p} + \frac{k}{h}\operatorname{sgn} p_i \cdot p_i\, u_i^{n,p+\frac{p_i}{|p_i|}}\right\} + \underline{k\sum_{j,k} a^i_{jk} u_j^{n,p} u_k^{n,p}} \underline{+kS^i u_i^{n,p}}\right]$$

下線を施した部分の評価のために次の仮定を考える。

(*) 「すべての $0 \leqq \eta_i \leqq 1$ なる η に対して、

$$\sum_{j,k} a^i_{jk}\eta_j\eta_k \leqq S^i(1-\eta_i)$$

がなりたつような $S^i \geqq 0$ が存在する」

今 $d_i>0$ について、$\frac{k}{h^2}d_i \leqq \frac{1}{2}$，$d_i=0$ のとき $\frac{k}{h}p_i \leqq 1$ とり、且つもしこの仮定がみたされるならば、S^i を大きくとって、

$$\forall p \quad 0 \leqq u_i^{n,p} \leqq 1 \implies 0 \leqq u_i^{n+1,p} \leqq 1$$

が示されるであろう。よって、(*) が満足されるためには a^i_{jk} はどのようなものであればよいか？（なければならないか？）を求めてみよう。たとえば次のものは十分条件である。

$$\sum_{j,k} a^i_{jk}\eta_j\eta_k \leqq \sum_{j\neq i} p_{ij}(\eta_j-\eta_i)$$

(**) をみたす $p_{ij} \geqq 0$ が存在する。但し $p_{ij}=\sum_{k=1}^{\infty} p^i_{jk}\eta_k$，

もし，(＊＊) がみたされておれば，$\delta^i = (n-1)\max_j p_{ij}$ とれば (＊) がみたされる。そこで (＊＊) に対する十分条件を求めると，

$$(15) \qquad \sum_{j \in J_i} \left(2a^i_{ji} + \sum_{k \neq i} a^i_{kj} \right) \leqq -a^i_{ii}$$

ただし J_i は $2a^i_{ji} + \sum_{k \neq i} a^i_{kj} > 0$ となる j の集合である。$J_i \subset \langle 1, n \rangle$．

まとめると，

<u>命題</u> (14) の仮定のもとに，(13) の解を $u_i(t,x)$ とすれば，a^i_{jk} について (15) がみたされるならば，p_i, d_i の大きさにかかわらず，すべての i について $0 \leqq u_i(t,x) \leqq 1$ が示される。

そこで一般の初期値をあつかうために，方程式に未知函数変換をおこなう，

$$(16) \qquad \xi_i v_i = u_i \qquad \xi_i > 0 \ (\text{定数})$$

とすると，v_i は次の方程式 (17) をみたす

$$(17) \qquad \frac{\partial v_i}{\partial t} = d_i \frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2} + p_i \frac{\partial v_i}{\partial x} + \sum_{j,k} \frac{a^i_{jk}}{\xi_i} \xi_j \xi_k v_j v_k$$

$$\tilde{a}^i_{jk} = a^i_{jk} \frac{\xi_j \xi_k}{\xi_i}$$

ととれば，(17) は (13) と同じ形である。よって $\tilde{a}^i_{jk}$ に条件 (15) をつければ，(13) については，$0 \leq g_i(x) \leq \xi_i$ から $0 \leq u_i(x,t) \leq \xi_i$ がえることになる。更に (15) を $\tilde{a}^i_{jk}$ でかいて，a^i_{jk} の条件 (18) になおす。

$$(18) \quad \sum_{j \in J_i} \Big(2a^i_{ji} \xi_j \xi_i + \sum_{k \neq i} a^i_{kj} \xi_j \xi_k \Big) \leq -a^i_{ii} \xi_i^2$$

とこの条件は ξ_i について正の斉次である。結局，まとめると，

定理　(18) をみたす ξ ($\xi_i > 0 \ \forall i$) が存在すれば，有界な初期値 $0 \leq g_i(x) \leq M_i$ の解について，M_i' ($i=1,2,\cdots,n$) が存在して，$0 \leq u_i(x,t) \leq M_i'$ が保証される。

注意1　M_i に対して，適当な $\rho > 0$ をとり $\rho \xi_i \geqq M_i$ とできる，$\rho \xi_i = M_i'$ ととって上の推論をおこなう。

注意2．この定理には，p_i，α_i について条件が課されていないことに注意しておこう。

系1　$\sum_{j,k} a^i_{jk} \xi_j \xi_k = 0$ となる ξ ($\xi_i > 0 \ \forall i$) が存在し，行列 L_ξ：

$$(19) \quad L\xi = \left[2a^i_{ji}\xi_i + \sum_{k\neq i} a^i_{kj}\xi_k \right]\xi_j$$

の すべての off diagonal element が 非負である ならば，上の定理とおなじ結論がなりたつ。

たとえば，$\{a^i_{jk}\}$ が §1 の Jenks の意味で strongly connected 且つ イ), ロ), ハ) をみたし 更に $L\xi$ の off diagonal $\geqq 0$ であればよい。更に 特別にすれば，

<u>系 2</u> 行列 $[d_{ij}]$ irreducible 且つ $\sum_{i=1}^{n} d_{ij} = 0$ $d_{ij} \geqq 0$ $(i \neq j)$ として，$a^i_{jk} = \delta_{jk}\, d_{ij}$ とおけば $L\xi = [d_{ij}\xi_j^2]$ であり，上の結論が次の方程式系に成立する。

$$(20) \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} = p_i\frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_{l\neq i} a^i_{ll}\, u_l^2$$

$$= p_i\frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_{j\neq i} d_{ij}\, u_j^2 - d_{ii}\, u_i^2$$

$n=2$ の場合は，Carleman[10] が提案した，モデルである。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x} + u_2^2 - u_1^2 \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = -\dfrac{\partial u_2}{\partial x} + u_1^2 - u_2^2 \end{cases}$$

は上の (20) に含まれている。([10] [11] をみよ)

§3. Volterra type の方程式系についての注意

§1 では常微分方程式系：

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{j,k} a_{jk} u_j u_k$$

の初期値問題について，Confinement が成立することを示した。この例として，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = u_1 u_2 \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = -u_1 u_2 \end{cases}$$

も含まれている。次のような偏微分方程式についてはどうなるだろうか。

$$(21) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = -\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + a_{12} u_1 u_2 + a_{22} u_2^2 \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = +\dfrac{\partial u_2}{\partial x} - a_{12} u_1 u_2 - a_{22} u_2^2 \end{cases}$$

$g_1(x)$, $g_2(x)$ を u_1, u_2 の初期値とすれば，「g_2 が $L_1(-\infty, +\infty)$ 且つ有界，g_1 は有界 ないずれも非負の函数のとき，$u_1(t,x)$, $u_2(t,x)$ は有界にとどまる」ことが示し得る。

151

証明：補助的に

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} \qquad w(x,0) = g_2(x)$$

を考える。比較定理より

$$0 \leqq u_2(x,t) \leqq w(x,t) = g_2(x+t)$$

一方 u_1 についての方程式をといて

$$u_1(x,t) = e^{a_{12}\int_0^t u_2(x-t+\tau,\tau)\,d\tau} \times \left\{ a_{22}\int_0^t u_2^2(x-t+\tau,\tau)\, e^{-a_{22}\int_0^\tau u_2(x-t+\xi,\xi)\,d\xi}\, d\tau + g_1(x-t) \right\}$$

この中で u_2 を g_2 でおきかえれば、大きくなって

$$\int_0^t g_2(x-t+2\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g_2(s)\,ds \leqq \| g_2 \|_1$$

又、一方

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial z}{\partial x} = -a_{22} z^2 \qquad z(x,0) = g_2$$

とおくと、 $u_2(x,t) \leqq z(x,t)$

特性線による積分を考えると，

$$z(x,t) \leq \frac{1}{a_{22}t + \frac{1}{G_2}} \qquad G_2 = \max_{-\infty<x<+\infty} g_2$$

よって，$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \, d\tau < +\infty$

よって，上の $u_1(x,t)$ の式を上から押さえると，

$$0 \leq u_1(x,t) \leq e^{a_{12}\|g_2\|_1}\{a_{22}G_2 + G_1\}$$
$$0 \leq u_2(x,t) \leq G_2$$

という，評価がえられる。

しからば，$g_2 \in L_1$ という条件がない場合はどうなるか．次の簡単な系について見よう．

$$(22) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = -\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + u_1u_2 \\[2ex] \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x} - u_1u_2 \end{cases}$$

「g_1，g_2 はともに有界，且つ，g_1 が bounded away from zero するから $0 < \delta < g_1(x)$ ならば，$u_1(x,t)$ $u_2(x,t)$ はともに有界である」

証明. (22) を といて,

$$u_1(x,t) = g_1(x-t)\exp\left\{\int_0^t u_2(x-t+\tau,\tau)\,d\tau\right\}$$

$$u_2(x,t) = g_2(x+t)\exp\left\{-\int_0^t u_1(x+t-\tau,\tau)\,d\tau\right\}$$

w を $\dfrac{\partial w}{\partial t} = -\dfrac{\partial w}{\partial x}$, $w(x,0) = g_1(x)$

$$u_1(x,t) \geqq g_1(x-t) \geqq \delta > 0$$

より $u_1(x,t) \leqq g_1(x-t)\exp\left\{\int_0^t g_2(x-t+2\tau)\,e^{-\int_0^\tau \delta\, d\sigma}\,d\tau\right\}$

$$\leqq g_1(x-t)\exp\left\{\int_0^t g_2(x-t+2\tau)\,e^{-\delta\tau}\,d\tau\right\} < +\infty$$

$$\leqq G_1\exp\left\{G_2\,\frac{1-e^{-\delta t}}{\delta}\right\}.$$

一方, これと反対に,

「 $0 \leqq g_1(x) \leqq G_1$, $0 \leqq g_2(x) \leqq G_2$ であっても,

(22) の解 $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ は $t \to +\infty$ のとき非有界

となりうる。」

例 1　$g_2(x) \equiv 1$,　$g_1(x) \geqq 0$.　$g_1(x) \leq M$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_1(s) e^{-\frac{s}{2}} ds < +\infty$$

且つ　$\exists x_n \to -\infty$,　$g_1(x_n) > {}^{\exists}\delta > 0$

$$w_1(x,t) = g_1(x-t) \exp\left\{ \int_0^t u_2(x-t+\tau, \tau)\, d\tau \right\}$$

$w_1(x,t)$ として、次の初期値問題の解をとる:

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} = -\frac{\partial w_1}{\partial x} + w_1, \quad w_1(x,0) = g_1(x)$$

$0 \leq u_2(x,t) \leq 1$　であるから、比較定理より

$$0 \leq u_1(x,t) \leq w_1(x,t) \qquad (t \geq 0)$$

である。

$$v_2(x,t) = g_2(x+t) \exp\left\{ -\int_0^t w_1(x+t-\tau, \tau)\, d\tau \right\}$$

とおけば　$v_2(x,t) \leq u_2(x,t)$

よって、$w_2(x,t) = g_1(x-t) \exp\left\{ \int_0^t v_2(x-t+\tau, \tau)\, d\tau \right\}$

をつくれば、

$$w_2(x,t) \leq u_1(x,t)$$

ここで, $v_2(x,t) = g_1(x-t)e^{t}$ であるから

$$w_2(x,t) = g_1(x-t)\exp\left\{\int_0^t v_2(x-t+\tau,\tau)d\tau\right\}$$

$$= g_1(x-t)\exp\left\{\int_0^t g_2(x-t+2\tau)e^{-\int_0^\tau g_1(x-t+2\tau-2\sigma)e^{\sigma}d\sigma}d\tau\right\}$$

$$\geqq g_1(x-t)\exp\left\{\int_0^t e^{-\int_{-\infty}^{+\infty} g_1(x-t+2\tau-2\sigma)e^{\sigma}d\sigma}d\tau\right\}$$

$$\geqq g_1(x-t)\exp\left\{\int_0^t e^{-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s)e^{-\frac{s}{2}}ds\cdot e^{\frac{x-t+2\tau}{2}}}d\tau\right\}$$

$$\geqq g_1(x-t)\exp\left\{\int_0^t e^{-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}(x+t)}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s)e^{-\frac{s}{2}}ds}d\tau\right\}$$

$$\geqq g_1(x-t)\exp\left\{\int_0^t e^{-\frac{1}{2}e^{\frac{x+t}{2}}\cdot K}d\tau\right\}$$

$$\geqq g_1(x-t)\exp\left\{e^{-\frac{1}{2}e^{\frac{c}{2}}\cdot K}\cdot t\right\} \qquad x+t=c$$

$$\geqq g_1(c-2t)\exp\left\{e^{-\frac{1}{2}e^{\frac{c}{2}}\cdot K}\,t\right\}. \qquad K=\int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s)e^{-\frac{s}{2}}ds.$$

以上のことは、次の方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = p_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 u_2 \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = p_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial x} - u_1 u_2 \end{cases}$$

$p_1 \neq p_2$ でありさえすれば、起すことができる。

例2. 同じ(22)の方程式系について、次の初期値を考えよう

$$\begin{aligned} g_1(x) &\equiv 1 & x \leq 0 \\ &\equiv 0 & x > 0 \\ g_2(x) &\equiv 0 & x \leqq 0 \\ &\equiv 1 & x > 0 \end{aligned}$$

$$u_1(x,t) = g_1(x-t) \exp\left\{ \int_0^t u_2(x-t+\tau, \tau)\, d\tau \right\} \qquad (x \leq t)$$

$$u_2(x,t) = g_2(x+t) \exp\left\{ -\int_0^t u_1(x+t-\tau, \tau)\, d\tau \right\} \qquad (x > -t)$$

$$u_1(x,t) \geqq \exp\left\{ \int_0^t e^{-\int_0^\tau g_1(x-t+2\tau-2\sigma) e^\sigma d\sigma} d\tau \right\}$$

$$u_1(t,t) \geqq \exp\left\{ \int_0^t e^{-\int_0^\tau g_1(2\tau-2\sigma) e^\sigma d\sigma} d\tau \right\}$$

$$u_1(t,t) \geqq \exp\left\{\int_0^t e^0\, d\tau\right\} = e^t$$

となる。 unbounded である。

したがって常微分方程式系の場合と、大要事情がことなっていることがわかる。

参考文献

[1] H.E. Conner : Some general properties of a class of Semi-linear hyperbolic systems analogous to the Differential-Integral Equations of gas dynamics.

Jour. of differential eq. 10, p188 - 203 (1971)

[2] R.D. Jenks, : Quadratic differential systems for interactive population models.

Jour. of differential eq 5, (1969)

[3] R.D. Jenks : Irreducible Tensors and Associated Homogenous Nonnegative Transformations.

Jour. of differential eq. 4. p566-572
(1968)

[4] 三村昌泰 現象の数学セミナーで発表

[5] S. K. Godunov, U. M. Sultangazin.
On the discrete models of kinetic equation of Boltzmann. Y.M.H. 26, 3(159) 1971.
(田中洋, 高橋陽一郎 英訳)

[6] 山口昌哉 "非線型現象の数学" 朝倉書店 1972.

[7] L. Cesari; Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations
Acad. Press. Inc. New York 1963.

[8] M. Mimura, Y. Kametaka, M. Yamaguti.
On a certain difference scheme for some semilinear diffusion system.
Proc. of Japan Acad. 47. 4
(1971).

[9] 亀高, (三村, 山口)
非線型拡散系について
Computation & Analysis Seminor JAPAN Vol2.-3
1970

[10] T. Carleman, "Problèmes mathématiques de la théorie cinétique des gaz"
Almquist and Wiksell Upsala 1957.

[11] I. I. Kolodner, "On the Carleman's model for the Boltzmann Equation and its generalisations" Ann. Mat. Pura. Appl. 63 (1963), 11

* 追記 E. P. Comner の論文[1] は, $\frac{\partial u_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial u_i}{\partial x} = \sum_{j,k} B^i_{jk} u_j u_k$ の型の方程式系を考えている。彼はこの $\{B^i_{jk}\}$ に次の条件 a) $B^i_{jk} = B^i_{kj}$, b) $B^i_{jk} \geqq 0 \ \forall j,k \neq i$, $B^i_{jk} \leqq 0 \ \forall j \text{ or } k = i$ c) $\sum_i B^i_{jk} = 0$ (b) の後半をのぞけば既にのべたイ) ロ) ハ)) を課して, mapping $B(u) = \sum_{j,k} B^i_{jk} u_j u_k$ が $C(\bar{R}, R^n)$ から $C(\bar{R}, R^n)$ への mapping として "kinetic" である。ということを $B(u)$ が (a), (b), (c) をみたす事と定義し, 次の lemma 1 (P198) を述べている。

lemma 1. Suppose $B(u)$ is a kinetic map on $C(\bar{R}, R^n)$. Then, given any bounded set E, there exist a positive (diagonal) operator D on $C(\bar{R}, R^n)$ for which $(B+D)(u)$ is monotone on E.

ここで operator A が monotone とは，2つの non negative vector u, v について，

$$u \leqq v \implies B(u) \leqq B(v)$$

がなりたつことであり，また $u \geqq 0$ とはすべての i について $u_i \geqq 0$ を意味する。あきらかに (a)(b)(c) をみたす $B_{j,n}^{i}$ でこの lemma をみたさないものがある。

一方，われわれの条件 (20) は次の system (uniform scattering see [1]) を cover している.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x} = u_2^2 - u_1 u_2 \\[2ex] \dfrac{\partial u_2}{\partial t} - \dfrac{\partial u_2}{\partial x} = u_1 u_2 - u_2^2 . \end{cases}$$