数理解析研究所講究録
第 175 巻 1973 年 43-54

微分方程式の解析的解の大域的存在について

九大理　梶原壌二

§1. 序

S を Stein 多様体，Ω を Stein 多様体 $S\times\mathbb{C}$ の部分領域，$\mathcal{O}$ を Ω 上の正則関数の芽全体の層，m を自然数，$j,k=1,2,\cdots,m$ に対して $a_{jk}(x,z)$ を Ω 上の正則関数とする。$A(x,z)=(a_{jk}(x,z))$ は Ω 上の $m\times m$ 行列値正則関数である。準同形対応 $T:\mathcal{O}^m\to\mathcal{O}^m$ を

$$\mathcal{O}^m\ni u=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_m\end{bmatrix}\rightsquigarrow Tu\equiv\frac{\partial u}{\partial z}+A(x,z)u=\begin{bmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial z}+\sum_{k=1}^{m}a_{1k}(x,z)u_k\\\frac{\partial u_2}{\partial z}+\sum_{k=1}^{m}a_{2k}(x,z)u_k\\\vdots\\\frac{\partial u_m}{\partial z}+\sum_{k=1}^{m}a_{mk}(x,z)u_k\end{bmatrix}\in\mathcal{O}^m$$

で定義する。T の核を $\mathfrak{a}$ とすると，層の短い完全列

(1) $$0\longrightarrow\mathfrak{a}\longrightarrow\mathcal{O}^m\xrightarrow{T}\mathcal{O}^m\longrightarrow 0$$

をえる。これよりコホモロジー群の長い完全列

(2) $$\cdots\longrightarrow H^0(\Omega,\mathcal{O}^m)\xrightarrow{T}H^0(\Omega,\mathcal{O}^m)\longrightarrow H^1(\Omega,\mathfrak{a})\to H^1(\Omega,\mathcal{O}^m)\to\cdots$$

をえる。ΩはStein多様体であるから，$H^q(\Omega, \mathcal{O}^m)=0\ (q\geqq 1)$。ゆえに，(2)より

(3) $\quad H^1(\Omega, \mathfrak{a}) \cong H^0(\Omega, \mathcal{O}^m)/PH^0(\Omega, \mathcal{O}^m)$，$H^q(\Omega, \mathfrak{a})=0\quad (q\geqq 2)$

をえる。これより，任意の$v \in H^0(\Omega, \mathcal{O}^m)$に対して，非斉次方程式

(4) $\quad Pu=v$

が大域的解析的解$u \in H^0(\Omega, \mathcal{O}^m)$をもつための必要十分条件は

(5) $\quad H^1(\Omega, \mathfrak{a})=0$

であることがわかる。最近，H. Suzuki [6] は $m=1$，$Pu=\partial u/\partial z$ の場合に(5)が成立するための必要十分条件を求めた。1963年にJ. Kajiwara [3] はSが一点の場合に(5)が成立するための必要十分条件を求めた。ここでは上記の二論文の方法を用いて，若干の仮定の下に，(5)が成立するための十分条件を求める。これはH. Suzuki [6] の結果の一般化である。また，これは琉球大学理工学部毛織泰子助手との共同研究の結果の紹介である。

§2.　1次元の切り口の連結度

Sの任意の点zに対して

(6) $\qquad \Omega(x) \rightleftarrows (\{x\} \times \mathbb{C}) \cap \Omega$

とおく。Ω の任意の点 (x,z) に対して

(7) $\qquad \Omega_z(x) \rightleftarrows \Omega(x)$ の (x,z) を含む連結成分

とおく。

補題 1. $H^1(\Omega, \mathfrak{a}) = 0$ が成立すれば，S の任意の解析的集合 M に対して，$H^1(\Omega(M), \mathfrak{a}) = 0$ が成立する。ここに $\Omega(M) = (M \times \mathbb{C}) \cap \Omega$ である。

証明. $\Omega(M)$ は Stein 空間であるから，$H^q(\Omega(M), \mathcal{O}^m) = 0 \ (q \geqq 1)$。(2) と類似の完全列より

(8) $\qquad H^1(\Omega(M), \mathfrak{a}) = H^0(\Omega(M), \mathcal{O}^m) / \mathfrak{P} H^0(\Omega(M), \mathcal{O}^m)$

をえる。$\Omega(M)$ は Stein 多様体 Ω の解析的集合であるから，任意の $v \in H^0(\Omega(M), \mathcal{O}^m)$ は $V \in H^0(\Omega, \mathcal{O}^m)$ に拡張される。$H^0(\Omega, \mathcal{O}^m) = \mathfrak{P} H^0(\Omega, \mathcal{O}^m)$ であるから，$\mathfrak{P} U = V$ をみたす $U \in H^0(\Omega, \mathcal{O}^m)$ がある。U の $\Omega(M)$ への制限 $u \in H^0(\Omega(M), \mathcal{O}^m)$ は $\mathfrak{P} u = v$ の解である。よって $H^0(\Omega(M), \mathcal{O}^m) = \mathfrak{P} H^0(\Omega(M), \mathcal{O}^m)$ が示された。(8) より $H^1(\Omega(M), \mathfrak{a}) = 0$。

補題 2. $H^1(\Omega, \mathfrak{a}) = 0$ が成立すれば，Ω の任意の点 (x,z) に対して，$H^1(\Omega_z(x), \mathfrak{a}) = 0$ が成立する。

J. Kajiwara [3] によれば

補題 3.

(9) $$H^1(\Omega_z(x), \mathcal{O}) = 0 \iff \begin{cases} \Omega_z(x) \text{ は単連結である。} \\ \text{かまたは} \\ \Omega_z(x) \text{ は 2 重連結で } H^0(\Omega_z(x), \mathcal{O}) = 0\text{。} \end{cases}$$

Ω の 2 点 (x,z), (x',z') に対して

(10) $$(x,z) \sim (x',z') \iff x = x' \text{ かつ } \Omega_z(x) = \Omega_{z'}(x')$$

と定義し, $\tilde{\Omega}$ を位相空間 Ω のこの同値関係 $\sim$ に関する商空間とする。$\tilde{\Omega}$ の点 $\tilde{x}$ は同値類である。$\tilde{x}$ の代表元を (x,z) とする。対応 $\tilde{x} \to \Omega_z(x)$ は $\tilde{\Omega}$ より $\Omega_z(x)$ 全体の集合の上への 1 対 1 対応であるのみならず, $\Omega_z(x)$ は自然に同値類 $\tilde{x}$ に一致している。このようなわけで, 今後 $\tilde{\Omega}$ の元を $\Omega_z(x)$ とかく。

(11) $$\tilde{\Omega}_1 \equiv \{\tilde{x} \in \tilde{\Omega} \mid \tilde{x} = \Omega_z(x) \text{ が単連結}\},\quad \tilde{\Omega}_2 \equiv \{\tilde{x} \in \tilde{\Omega} \mid \tilde{x} = \Omega_z(x) \text{ が 2 重連結}\}$$

とかく。補題 3 より, $\{\tilde{\Omega}_1, \tilde{\Omega}_2\}$ は集合 $\tilde{\Omega}$ の分割である。

補題 4. $H^1(\Omega, \mathcal{O}) = 0$ であれば, $\tilde{\Omega}_2$ は $\tilde{\Omega}$ の開集合である。

証明. Ω の点 (x,z) に対して $\Omega_z(x)$ が 2 重連結であれば, $x \times \mathbb{C} - \Omega_z(x)$ はコンパクトな連結成分 K をもつ。$\Omega_z(x)$ の任意の点 (x,z') に対して, z' を通る $\mathbb{C}$ 内の閉曲線 γ があって, $x \times \gamma$ は $\Omega_z(x)$ 内の曲線で, K はそれによって囲まれた $x \times \mathbb{C}$ の領域内に

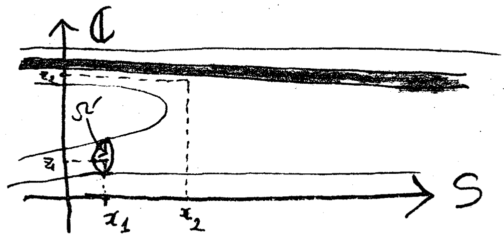
ある。$x\times\gamma\subset\Omega$であるから，$x$の連結開近傍$U$があって$U\times\gamma\subset\Omega$が成立する。$U$のある点$x'$に対して$x'\times\gamma$によって囲まれた領域$\Gamma$が$\Omega$に含まれれば，接続定理より$\Omega$で正則な関数は同時に$U\times\Gamma$まで解析接続される。$\Omega$は正則領域であるから$U\times\Gamma\subset\Omega$ が成立する。特に：$K\subset\Omega$が成立し，矛盾である。よって，補題3より，Uの任意の点x'に対して$\Omega_{z'}(x')$は2重連結である。これより，$\Omega_z(x)$は$\widetilde{\Omega}_2$の内点である。

補題5.

$$(12)\qquad H^1(\Omega,\mathcal{O})=0 \Rightarrow \begin{cases} \widetilde{\Omega}=\widetilde{\Omega}_1 \\ \text{かまたは} \\ \widetilde{\Omega}=\widetilde{\Omega}_2 \text{ かつ任意の } (x,z)\in\Omega \text{ に対して} \\ H^0(\Omega_z(x),\mathcal{O})=0 \end{cases}$$

証明．　補題3より$\widetilde{\Omega}=\widetilde{\Omega}_1$かまたは$\widetilde{\Omega}=\widetilde{\Omega}_2$が成立することを示せばよい。背理法によって証明しよう。Ωの2点(x_1,z_1)，(x_2,z_2)に対して$\Omega_{z_1}(x_1)\in\widetilde{\Omega}_1$，$\Omega_{z_2}(x_2)\in\widetilde{\Omega}_2$が成立したとしよう。

(1)　$\dim S=1$のとき。つぎの条件をみたすΩの開被覆$\{\Omega',\Omega''\}$をとる：Ω'は(x_1,z_1)の近傍であって，$\Omega_{z_1}(x_1)$で零ベクトルとならないような$f(x,z)\in H^0(\Omega',\mathcal{O})$がある。$\Omega''=\Omega-\Omega_{z_1}(x_1)$。



Mayer-Vietoris完全列

(12) $H^0(\Omega',\mathfrak{a})+H^0(\Omega'',\mathfrak{a})\to H^0(\Omega'\cap\Omega'',\mathfrak{a})\to H^1(\Omega,\mathfrak{a})$

において $H^1(\Omega,\mathfrak{a})=0$ が成立しているから，$(x-x_1)^{-1}b(x,z)\in H^0(\Omega'\cap\Omega'',\mathfrak{a})$ に対して，$\Omega'\cap\Omega''$ において

(13) $$u_1(x,z)-u_2(x,z)=\frac{b(x,z)}{x-x_1}$$

が成立するような $u_1(x,z)\in H^0(\Omega',\mathfrak{a})$ と $u_2(x,z)\in H^0(\Omega'',\mathfrak{a})$ がある。補題3より $\Omega_z(x)\in\tilde{\Omega}_2$ であるような $(x,z)\in\Omega''$ に対して $u_2(x,z)=0$ である。補題4より，そのような (x,z) は空でない Ω'' の開集合を作るから，一致の定理より $u_2(x,z)$ は Ω'' で恒等的に 0 である。(13) より $(x-x_1)^{-1}b(x,z)\in H^0(\Omega',\mathfrak{a})$ となり，これは $b(x_1,z_1)\neq 0$ に反し矛盾である。

(ロ) $\dim S>1$ のとき。 x_1 と x_2 とを通る解析的集合 M で，x_1 の近傍で次元が 1 であるようなものをとると，補題1より $H^1(\Omega(M),\mathfrak{a})=0$. $\Omega(M)$ に対して(イ)の議論を用いると，矛盾が導かれる。

§3 商空間の分離性

写像 $\pi:\Omega\to\tilde{\Omega}$, $\varphi:\tilde{\Omega}\to S$ を

(14) $$\Omega\ni(x,z)\rightsquigarrow\pi(x,z)=\Omega_z(x)\in\tilde{\Omega}\,,\quad \tilde{\Omega}\ni\Omega_z(x)\rightsquigarrow\varphi(\Omega_z(x))=x\in S$$

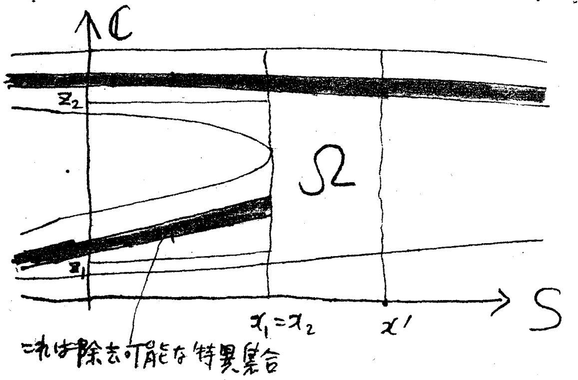
で定義する。勿論π, φは連続であり、特にφは局所位相写像である。射影$p: \mathbb{C}\times S \to S$, 即ち、

(15) $\quad \mathbb{C}\times S \ni (x,z) \rightsquigarrow p(x,z)=x\in S$

に対して$p|\Omega = \varphi\circ\pi$が成立している。

補題6. $\tilde{\Omega}=\tilde{\Omega}_2$のとき、$\tilde{\Omega}$はHausdorff空間である。

証明. $\tilde{\Omega}$がHausdorff空間でなければ、Ωの2点(x_1,z_1), (x_2,z_2)に対して$\tilde{\Omega}$において、$\Omega_{z_1}(x_1)$と$\Omega_{z_2}(x_2)$の近傍の交わり全体の集合$\mathfrak{F}$は$\tilde{\Omega}$における filter の基底をなす。



$\mathfrak{F}\to\Omega_{z_1}(x_1)$, $\mathfrak{F}\to\Omega_{z_2}(x_2)$であり、$\varphi$は連続であるから、$\varphi(\mathfrak{F})\to x_1$, $\varphi(\mathfrak{F})\to x_2$である。したがって$x_1=x_2$でなければならない。つまり$\Omega_{z_1}(x_1)$, $\Omega_{z_2}(x_2)$は$\Omega(x_1)$の相異なる連結成分である。$\Omega_{z_i}(x_1)$は$x_1\times\mathbb{C}$の2重連結領域であるから$x_1\times\mathbb{C}-\Omega_{z_i}(x_1)$はコンパクトな連結成分$K_i$をもつ。$z_i$を通る複素平面内の閉曲線$\gamma_i$があって、$x_1\times\gamma_i$は$\Omega_{z_i}(x_1)$内の曲線で、$K$はそれによって囲まれた$x_1\times\mathbb{C}$の領域内にある$(i=1,2)$。$x_1\times\gamma_i\subset\Omega$であるから、$x_1$の連結開近傍$U$があって$U\times\gamma_i\subset\Omega$が成立する$(i=1,2)$。$\mathfrak{F}$が filter の基底をなすから、$U$のある点$x'$に対して$x'\times\gamma_1$と

$x'\times\gamma_2$ は $\Omega(x)$ の同じ連結成分内にある。それは2重連結であるから，例えば $x'\times\gamma_1$ で囲まれた領域はその内部にある。つまり $\Omega_{z_1}(x')=\Omega_{z_2}(x)$ に含まれる。Ω は正則領域であるから，補題4の証明に用いられた議論より $K_1\subset\Omega$ となり矛盾である。

さらに $\tilde{\Omega}=\tilde{\Omega}_1$ のとき，$\tilde{\Omega}$ が Hausdorff 空間であることを示したい。そのため不本意ながら，つぎの条件を仮定する：

条件(*) (1) $b^1(x,z)\in H^0(\Omega,\mathfrak{O})$ があって，S の任意の点 x に対して，$b^1(x,z)$ は零 vector でない。

(2) 任意の $(x_0,z_0)\in\partial\Omega$ に対して，つぎのような S における x_0 の近傍 $U(x_0)$ がある：

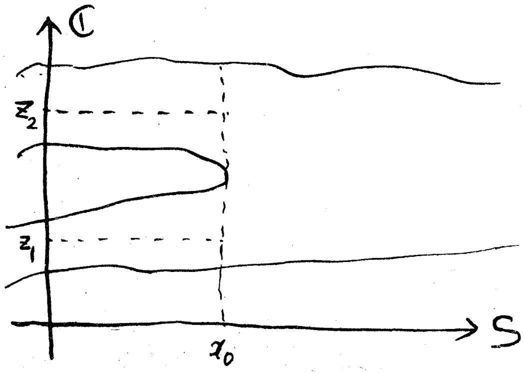
$p^{-1}(U(x_0))$ の任意の連結成分 Δ に対して，$b^2(x,z), b^3(x,z),\dots,b^m(x,z)$ は1次独立である。

補題7. 条件(*)の仮定の下で，$H^1(\Omega,\mathfrak{O})=0$ および $\tilde{\Omega}=\tilde{\Omega}_1$ のとき，$\tilde{\Delta}=\varphi(\Delta)$ は Hausdorff 空間であり，$(\tilde{\Delta},\varphi|\tilde{\Delta})$ を S の上の領域とするような複素構造に関して，$\tilde{\Delta}$ は Stein 多様体である。

証明. $\tilde{\Delta}$ の任意の開被覆 $\tilde{\mathfrak{U}}$ と $Z^1(\tilde{\mathfrak{U}},\mathcal{O})$ の任意の元 $\{g_{jk}\}$ に対して，$\{g_{jk}(x)b^1(x,z)\}\in Z^1(\pi^{-1}(\tilde{\mathfrak{U}}),\mathfrak{O})=B^1(\pi^{-1}(\tilde{\mathfrak{U}}),\mathfrak{O})$。よってこれは $C^0(\pi^{-1}(\tilde{\mathfrak{U}}),\mathfrak{O})$ のある元 $\{u_j(x,z)\}$ の coboundary である。$\tilde{\Delta}$ において $u_j(x,z)=g_j(x)b^1(x,z)+\cdots$ と $u_j(x,z)$ を基底 $b^1,b^2,\dots,b^m$ で表わしたときの b^1 の係数 g_j に対して $\{g_{jk}|\Delta\}\in Z^1(\tilde{\mathfrak{U}}\cap\tilde{\Delta},\mathcal{O})$

は $C^0(\widetilde{\mathfrak{U}}\cap\widetilde{\Delta},\mathcal{O})$ の元 $\{g_{ij}\}$ の coboundary である。

(イ) $\dim S=1$ のとき，$\widetilde{\Delta}$ は Hausdorff 空間である。もしも $\widetilde{\Delta}$ が Hausdorff でないと，補題6の証明でみたように，S の1点 x_0 と $\mathbb{C}$ の2点 z_1, z_2 に対して $\Omega_{z_1}(x_0)\neq\Omega_{z_2}(x_0)$ で，しかも $\widetilde{\Omega}$ において $\Omega_{z_1}(x_0)$ と $\Omega_{z_2}(x_0)$ の近傍の交わり全体の集合 $\mathfrak{F}$ は filter の基底をなす。



$\Omega_{z_1}(x_0)$ の近傍 $\widetilde{\Omega}_1$ と $\Omega_{z_2}(x_0)$ の近傍 $\widetilde{\Omega}_2$ を，$\{\widetilde{\Omega}_1,\widetilde{\Omega}_2\}$ が $\widetilde{\Omega}$ の開被覆をなし，$\Omega_{z_2}(x_0)\notin\widetilde{\Omega}_1$ しかも $x_0\in\varphi(\widetilde{\Omega}_1\cap\widetilde{\Omega}_2)$ であるようにとる。$(x-x_0)^{-1}\in H^0(\widetilde{\Omega}_1\cap\widetilde{\Omega}_2,\mathcal{O})$ に対して，上の議論より，$f_i(x)\in H^0(\widetilde{\Delta}\cap\widetilde{\Omega}_i,\mathcal{O})$ $(i=1,2)$ があって，$\widetilde{\Omega}_1\cap\widetilde{\Omega}_2$ にて

(16) $$\frac{1}{x-x_0}=f_1(x)-f_2(x)$$

が成立している。filter の基底 $\mathfrak{F}$ に伴う極限が右辺に対しては存在し，左辺に対しては存在しないので矛盾である。

(ロ) $\dim S=2$ のとき，$\widetilde{\Delta}$ は Stein 多様体である。$\widetilde{\Delta}$ が Hausdorff 空間でなければ，適当な1次元の切り口を考えると，これが Hausdorff 空間でなくなり，補題1と(イ)より矛盾である。よって $\widetilde{\Delta}$ は Hausdorff 空間である。$Z^1(\widetilde{\mathfrak{U}},\mathcal{O})$ の元は $\widetilde{\Delta}$ に制限すると，最初の議論より coboundary である。梶原壤二[4]の議

論より$\widetilde{\Delta}$はStein多様体である。

(ハ) $\dim S \geq 2$のとき，$\widetilde{\Delta}$はStein多様体である。$\widetilde{\Delta}$がHausdorff空間であることは(ロ)と同じであるが，Steinでなければ，Docquier-Grauert [1]よりp_7^*-擬凸でもない。すると適当な2次元の切り口がp_7^*-擬凸でない。補題1と(ロ)の議論よりこれは矛盾である。この議論に関してはHitotumatu[2]を参照されたい。

§4. 逆の証明.

補題8. $\widetilde{\Omega}$がHausdorff空間のとき，

$$\left\{\begin{array}{l}\widetilde{\Omega}=\widetilde{\Omega}_1 \text{ で } \widetilde{\Omega} \text{ が Stein 多様体} \\ \text{または} \\ \widetilde{\Omega}=\widetilde{\Omega}_2 \text{ で}, S \text{ の各点 } x \text{ に対して}, H^0(\Omega(x),\mathfrak{a})=0\end{array}\right. \Longrightarrow H^1(\Omega,\mathfrak{a})=0$$

証明。 (イ) $\widetilde{\Omega}=\widetilde{\Omega}_1$で$\widetilde{\Omega}$がStein多様体のとき。$\pi:\Omega\to\widetilde{\Omega}$に関する$\mathfrak{a}$の像$\pi^*\mathfrak{a}$は$\widetilde{\Omega}$上のlocally free sheafであるから分論解析的連接層であり，

(17) $$H^1(\Omega,\mathfrak{a})=H^1(\widetilde{\Omega},\pi^*\mathfrak{a})=0$$

(ロ) $\widetilde{\Omega}=\widetilde{\Omega}_2$かつ$H^0(\Omega(x),\mathfrak{a})=0$がSの各点$x$に対して成立するとき。$\Omega$の任意の点$(x_0,z_0)$に対して，$\Omega_{z_0}(x_0)$は2重連結領域である。$x_0\times\mathbb{C}-\Omega_{z_0}(x_0)$はコンパクトな連結成分Kをもつ。

$\mathbb{C}$ の閉曲線 γ があって，$x_0\times\mathbb{C}$ における閉曲線 $x_0\times\gamma$ は $\Omega_{z_0}(x_0)$ に含まれ，それによって囲まれた領域の内部は Ω に含まれる。x_0 の連結 Stein 開近傍 $U(x_0)$ があって，$U(x_0)\times\gamma\subset\Omega$ が成立している。このとき Kajiwara[3] の方法で，$p^{-1}(U(x_0))$ の $U(x_0)\times\gamma$ を含む連結成分 Δ に対して，

$$(18)\qquad H^0(\Delta,\mathcal{O}^m)=\mathcal{P}H^0(\Delta,\mathcal{O}^m)$$

を示すことができる。Δ は Stein 多様体であるから，(3) と (18) より $H^0(\Delta,\mathfrak{A})=0$。かゝる Δ の集合で S の Leray 被覆 $\{\Delta_j\}$ を作ろう。$\Delta_j\cap\Delta_k$ の各点 x に対して，仮定より $H^0(\Omega(x),\mathfrak{A})=0$ であるから $H^0(\Delta_j\cap\Delta_k,\mathfrak{A})=0$ をえる。したがって

$$(19)\qquad \mathcal{C}^1(\{\Delta_j\},\mathfrak{A})=0 .$$

(19) より

$$(20)\qquad H^1(\Omega,\mathfrak{A})=H^1(\{\Delta_j\},\mathfrak{A})=0 .$$

§5. 定理の記述。

定理. S を Stein 多様体，Ω を Stein 多様体 $S\times\mathbb{C}$ の Stein 部分領域，$\mathcal{O}$ を Ω 上の正則関数の芽全体の層，m を自然数，$A(x,z)$ を Ω 上の $m\times m$ 行列値正則関数とする。準同形対応

$\mathcal{D} : \mathcal{O}^m \to \mathcal{O}^m$;

$$\mathcal{O}^m \ni u \rightsquigarrow \mathcal{D}u \equiv \frac{\partial u}{\partial z} + A(x,z)u \in \mathcal{O}^m$$

の核を$\mathfrak{a}$とする。§3 の条件(*)の仮定の下で $H^1(\Omega,\mathfrak{a})=0$ が成立するための必要十分条件は§2の記号の下で、$\widehat{\Omega}$がHausdorff空間であり、$\widehat{\Omega}=\widehat{\Omega}_1$ であってしかも自然な複素構造に対して$\widehat{\Omega}$がStein多様体であるか、または、$\widehat{\Omega}=\widehat{\Omega}_2$ であってしかも、Sの任意の点xに対して、$H^0(\Omega(x),\mathfrak{a})=0$ が成立することである。

引用文献

[1] F. Docquier und H. Grauert, Levisches Problem und Rungescher Satz für Teilgebiete Steinscher Mannigfaltigkeit, Math. Ann. 140(1960),94-123.

[2] S. Hitotumatu, On some conjectures concerning pseudoconvex domains, J. Math. Soc Jap. 6(1954),177-195.

[3] J. Kajiwara,On an application of L. Ehrenpreis' method to ordinary differential equations, Kodai Math. Sem. Rep. 15(1963),94-105.

[4] 梶原壌二, コホモロジー類が消滅する2次元の複素多様体について, 京都大学数理解析研究所講究録141(1972), Cousin問題について,62-86.

[5] J. Kajiwara and H. Kazama, Two dimensional complex manifolds with vanishing cohomology sets, Math. Ann. (in Press).

[6] H. Suzuki, On the global existence of holomorphic solutions of the equation $\partial u/\partial x_1=f$ (to appear).