数理解析研究所講究録
第175巻 1973年 66-79

Barnes integral と Generalized hypergeometric equation について

広島大 理学部 河野實彦

線型微分方程式

$$(1) \quad \left\{ \prod_{j=1}^{p}(D+\alpha_j) - \frac{d}{dt}\prod_{j=1}^{q}(D+\rho_j-1) \right\} x(t) = 0$$

$$D \equiv t\frac{d}{dt}, \qquad (q+1 \geq p).$$

の大域的性質を考察する。この微分方程式は"一般化された超幾何微分方程式"(Generalized hypergeometric differential equation、今後、G.H.E と略記する)と呼ばれるもので、その名は次のような事実により、命名されたものと思われる。即ち、上の微分方程式は、原点 $t=0$ において確定特異点を有し、局所論によれば、確定特異点の近傍における解は

$$(2) \quad x(t) = t^{\rho}\sum_{m=0}^{\infty} G(m)\, t^{m}$$

なる収束巾級数の形で表わされるものが存在する訳で

あるが，そのとき，係数 $G(m)$ が，例へば

$$(3) \qquad G(m) = \frac{\prod_{j=1}^{p} \Gamma(m+1+\alpha_j-\rho_k)}{\prod_{j=1}^{q+1} \Gamma(m+1+\rho_j-\rho_k)}$$

となり，級数(2)は正に Gauss の超幾何級数の一般化に当っている。さて，m を変数とみなして(3)の $G(m)$ の形を見れば，$G(m)$ は一階の差分方程式を満たしている事は容易にわかるが，逆に，確定特異点の近傍における収束巾級数解の係数 $G(m)$ が，有理関数を係数にもつ一階差分方程式を満たすような微分方程式は，いつも G.H.E に帰着されるというのが，H. Scheffé の結果(1942)である。例えば，拡張された Bessel の微分方程式というか，又は，Turrittin の微分方程式とも言われる

$$(4) \qquad x^{(n)}(t) - t^{\nu} x(t) = 0$$

ν: arbitrary complex number

も，$\zeta = \beta t^K$ なる変数変換を行えば

$$(5) \qquad t^n \frac{d^n}{dt^n} = [KD]_n, \qquad D \equiv \zeta \frac{d}{d\zeta}$$

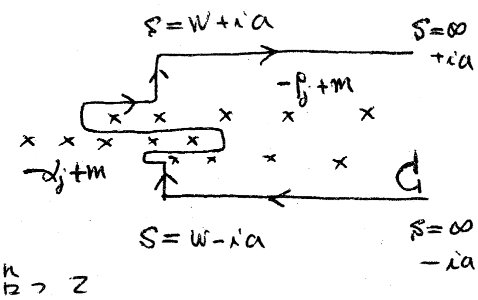
なる関係式を得て，そこで $K = n+\nu$，$\beta = (n+\nu)^{-n}$ とおくことにより，上の微分方程式は

(6) $$\frac{d}{dz}\left(D-\frac{1}{n+\nu}\right)\left(D-\frac{2}{n+\nu}\right)\cdots\left(D-\frac{n-1}{n+\nu}\right)x(t)-x(t)=0$$

に変換される。即ち、Turrittin の微分方程式も G.H.E の特別の場合に過ぎないのである。

さて、G.H.E は $q+1=p$ のときは Fuchs 型であり、$t=0$, $t=1$, $t=\infty$ に確定特異点を持つ。この場合は、ここでは考えない事にする。これからは $q+1>p$ と仮定し、$t=0$ が確定特異点、$t=\infty$ が不確定特異点の場合の大域的解析について説明しよう。
先ず、G.H.E の解を積分

(7) $$x(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi(s)\,t^s\,ds$$



の形で求めて見よう。
ここで、積分路 C は $s=\infty-ia$ から、$s=w-ia$ に直線上に沿って進み、そこから $s=w+ia$ には適当な路を通って行き、$s=w+ia$ から $s=w+ia$ には、また直線上を進むものとする。(a, w は後で適当に決められる実数) このような積分路は Barnes contour と呼ばれ、また積分(7)を Barnes integral と言う。いま、形式的な計算を行えば、$\varphi(s)$ は一階の差分方程式

$$(8) \qquad \varphi(s+1) = \frac{\prod_{j=1}^{p}(s+\alpha_j)}{(s+1)\prod_{j=1}^{q}(s+\beta_j)}\,\varphi(s)$$

を満たさなければならない事を知るが，差分方程式の理論によって，(8) の一般解は

$$(9) \qquad \varphi(s) = \frac{\prod_{j=1}^{p}\Gamma(s+\alpha_j)}{\Gamma(s+1)\prod_{j=1}^{q}\Gamma(s+\beta_j)}\,p(s) \equiv \varphi_0(s)\,p(s)$$

の形で表わされる。 $p(s)$ は任意の周期 1 をもつ周期関数である。 実は，この周期関数 $p(s)$ の決め方が，G.H.E の大域的解析のミソなのであるが，いま，周期関数

$$(10) \qquad p_k(s) = \frac{e^{-\pi i s}}{\sin\pi(s+\beta_k)}$$

に対応する特殊解 (9) を $\varphi_k(s) = \varphi_0(s)\,p_k(s)$ とし，

$$(11) \qquad x_k(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C}\varphi_k(s)\,t^{s}\,ds$$

なる積分を考える。ここで，Barnes contour C の a, w は，$a > \operatorname{Max}\{|\operatorname{Im}(-\beta_j)|\}$, $w < \operatorname{Min}\{\operatorname{Re}(-\beta_j), 0\}$ のように選び，$s = w - ia$ から $s = w + ia$ までの路は，$-\alpha_j - \nu$ ($j = 1, 2, \ldots, p$; $\nu = 0, 1, 2, \ldots$) なる点が，全て，路の左側にあるように決める。

仮定 $q+1 > p$ より 積分 (11) は収束し，先の形式的

計算の正当性も保証されることは容易にわかる。即ち，それは G.H.E の解となり，また，留数の定理により

$$(12) \qquad x_k(t) = -\frac{e^{\pi i \rho_k}}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{p} \Gamma(m+1-\rho_k+\alpha_j)}{\prod_{j=1}^{q+1} \Gamma(m+1-\rho_k+\rho_j)} t^{1-\rho_k+m}$$

但し，$\rho_{q+1} = 1$.

を得るが，$\rho_j \neq \rho_k \ \mathrm{mod}(\mathrm{integer}) \ (j \neq k)$ なる仮定の下では，上の収束巾級数解 $x_k(t)$ $(k=1,2,\ldots,q+1)$ が，確定特異点 $t=0$ の近傍における基本解をなすことも明らかであろう。

ところで，特性定数 ρ_j $(j=1,2,\ldots,q+1)$ の中で，ある一つの ρ_k に対して，それと整数差の特性定数がいくつかある場合には，基本解の構成を如何にすれば良いかについて，説明しよう。いま

$$(13) \qquad \rho_k = \rho_{k,0} \leqq \rho_{k,1} \leqq \rho_{k,2} \leqq \cdots \leqq \rho_{k,h_k}$$

と仮定する。この場合には，周期関数を

$$(14) \qquad P_{k,h}(s) = \left(\frac{e^{-\pi i s}}{\sin \pi (s+\rho_k)} \right)^{h+1}, \qquad (0 \leqq h \leqq h_k)$$

ととるのである。そして $\varphi_{k,h}(s) = \varphi_0(s) P_{k,h}(s)$ として

$$(15) \qquad x_{k,h}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \varphi_{k,h}(s) t^s \, ds \qquad (0 \leqq h \leqq h_k)$$

と定義すれば、これらは線形独立な解となることがわかる。実際、その事を知るためには、留数計算をすれば良い。Barnes contour C の右側に存在する $\varphi_{k,h}(s)$ の極 $-\rho_k+m$ $(m=1,2,\ldots)$ の位数は高々 $h+1$ であるので

$$(16)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{e^{-\pi i s}}{\sin\pi(s+\rho_k)}\right)^{h+1} = (2i)^{h+1} e^{\pi i(h+1)\rho_k} \displaystyle\sum_{\mu=0}^{\infty} B_\mu^{(h+1)} \dfrac{(2\pi i(s+\rho_k-m))^{\mu-h-1}}{\mu!} \\ B_\mu^{(h+1)} \ (\mu=0,1,2,\ldots) \text{ は } (h+1) \text{ 位の Bernoulli 数} \end{cases}$$

なる関係式を用いて、$\mathrm{Res}\,\varphi_{k,h}(s)t^s \big|_{s=m-\rho_k}$ を求めると

$$(17)\quad \mathrm{Res}\,(\varphi_{k,h}(s)t^s)\Big|_{s=m-\rho_k}$$

$$= \lim_{s\to m-\rho_k} \left\{ \frac{1}{h!}\frac{d^h}{ds^h}\left((s+\rho_k-m)^{h+1}\varphi_{k,h}(s)t^s \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{h!}\left(\frac{e^{\pi i\rho_k}}{\pi}\right)^{h+1} \sum_{l=0}^{h} {}_hC_{h-l}\,(\log t)^{h-l}\, t^{-\rho_k+m}$$

$$\times \sum_{\mu=0}^{l} {}_lC_\mu\, B_\mu^{(h+1)} (2\pi i)^\mu\, \varphi_0^{(l-\mu)}(m-\rho_k)$$

$$= \left(\sum_{l=0}^{h} G_{k,h}^{l}(m-1)(\log t)^{h-l} \right) t^{-\rho_k+m}$$

を得る。よって，結局，次のような h_k+1 コの解を得た訳で，それらの線形独立性は形から，明らかであろう；

$$
(18)\quad \begin{cases} x_{k,h}(t) = -\sum_{l=0}^{h} (\log t)^{h-l} \left(\sum_{m=0}^{\infty} G_{k,h}^{l}(m)\, t^{1-\rho_k+m} \right) \\ G_{k,h}^{l}(m) = \left(\dfrac{e^{\pi i \rho_k}}{\pi}\right)^{h+1} \dfrac{1}{(h-l)!} \sum_{\mu=0}^{l} \dfrac{(2\pi i)^{\mu}}{\mu!\,(l-\mu)!} B_{\mu}^{(h+1)}\, \varphi_0^{(l-\mu)}(m+1-\rho_k) \end{cases}
$$

$$(0 \leqq h \leqq h_k)$$

さて，G. H. E の大域的解析を行うために，新たな特殊解を定義しなければならない。
周期関数を

$$(19)\qquad \tilde{p}(s) = \prod_{j=1}^{q+1} \left(\frac{\pi e^{-\pi s i}}{\sin \pi (s+\rho_j)} \right)$$

とおいて，$\hat{\varphi}(s) = \varphi_0(s)\tilde{p}(s)$，

$$(20)\qquad \tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C} \hat{\varphi}(s)\, t^{s}\, ds$$

と定義すれば，積分 $\tilde{x}(t)$ は，E. W. Barnes により始めて（1907），その大域的性質の研究がなされた関数なのである。

この関数 $\hat{x}(t)$ と (18) における原点 $t=0$ の近傍の基本解 $x_{k,h}(t)$ との間には

$$(21)\qquad x_{k,h}(t) = \sum_{l=0}^{q-h} T_l(k,h)\,\hat{x}(te^{2\pi i l})$$

$$(0 \leqq h \leqq h_k)$$

なる関係式が成立ち，$x_{k,h}(t)$ の大域的解析は，$\hat{x}(t)$ のそれを通して，なされるのである。ここで，係数 $T_l(k,h)$ は容易にわかるように，代数的方法で簡単に計算され，後にいわゆる Stokes 係数と呼ばれるものとなるのである。

さて，$\hat{x}(t)$ の大域的性質の解析であるが，それは次の二つの補助定理による。

<u>補助定理 1</u>　関数

$$(22)\qquad \varphi_0(s) = \frac{\prod_{j=1}^{p} \Gamma(s+\alpha_j)}{\prod_{j=1}^{q+1} \Gamma(s+\rho_j)}$$

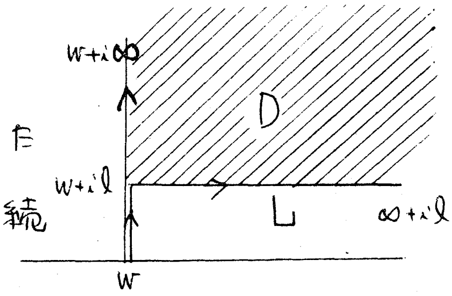
は，次の様に階乗級数によって，漸近展開される。

$$(23)\qquad \varphi_0(s) = (\mu^{\mu})^{s}\left\{\sum_{j=1}^{N-1}\frac{A_j}{\Gamma(\mu s+\alpha+j)} + O\left(\frac{1}{\Gamma(\mu s+\alpha+N)}\right)\right\}$$

as $s \to \infty$ in $|\arg s| < \pi-\varepsilon$

ここで，$\mu = q+1-p$，$\alpha = \sum_{j=1}^{q+1}\rho_j - \sum_{j=1}^{p}\alpha_j + \frac{1}{2}(p-q)$，$A_j$ は定数。

補助定理 2



関数 $\psi(s)$ は，右図の斜線をつけた領域 D において境界をこめて連続であり，内部では analytic であるとする。今，領域 D の中で，s を充分大きくしたとき，

$$(24) \qquad \psi(s) = \frac{O(1)}{\Gamma(\mu s + c)} \qquad \text{as } s \to \infty \text{ in } D$$

が成立つと，仮定すれば，積分

$$(25) \qquad G(t) = \int_L \psi(s)\, t^s\, ds$$

$$(26) \qquad g(t) = \int_w^{w+i\infty} \psi(s)\, t^s\, ds$$

に関して，$G(t)$ はすべての t に対して，絶対収束し，$g(t)$ は $\arg t > \frac{1}{2}\mu\pi$ において，絶対収束する。また $G(t)$ は $g(t)$ の領域 $\arg t \leqq \frac{1}{2}\mu\pi$ における解析接続となっている。更に，領域 $\arg t \geqq \frac{1}{2}\mu\pi + \varepsilon \ (\forall \varepsilon > 0)$ においては

$$(27) \qquad G(t) \equiv g(t) = O(t^w)$$

が成立つ。

この二つの補助定理と，(19)で定義した周期関数 $\hat{p}(s)$ を上の領域 D において，$e^{2\pi i s}$ の巾級数展開，即ち，次のような Fourier 展開

$$(28)\qquad \hat{p}(s) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j e^{2\pi i s j} \quad \text{in } D$$

することにより，Barnes 積分 $\hat{x}(t)$ の大域的性質が解かれるのである。その詳しいことについては，これ以上述べない。

さて，話が急に変って申訳ないが，実数上での特異境界値問題の研究において，固有値の分布状態を調べる問題は，一つの重要な研究である。即ち，固有値が discrete な場合に，それらの固有値が如何に分布しているかを解明することであるが，二階の自己随伴型微分方程式，

$$(29)\qquad -x'' + q(t)x = \lambda x$$

に対しては，Titchmarsh により，例へば

$$(30)\qquad N(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^{X_\lambda} \{\lambda - q(t)\}^{\frac{1}{2}} dt + O(1).$$

ここで，X_λ は $q(X_\lambda) = \lambda$ なる値，

なる結果が得られている。

特に，　$q(t)=t$　の場合には

$$(31)\qquad N=\frac{1}{\pi}\frac{2}{3}\lambda_N^{\frac{3}{2}}+K+O(\lambda_N^{-\frac{1}{2}})$$

となるが，　一般の n 階自己随伴型微分方程式に対しては，　未だほとんど，この種の問題は研究されていない。　その理由は，二階微分方程式に対しては，解の零点分布と関連づけられ，それらの良くわかった Bessel 関数と固有関数との比較という方法により，上の結果は得られた訳であるが，　一般の微分方程式に対しては，解の零点分布の解析は，これまた別な大変困難な問題であり，これまで二階の微分方程式と同様な解析は行えなかった。
最近，McLeod が n 階自己随伴型微分方程式

$$(32)\qquad x^{(2n)}+(-1)^{n-1}(\lambda-t)x=0$$

に対する固有値分布問題を解いた。　それは，上の微分方程式において，　$z=(\lambda-t)$　なる変数変換を行えば，正に Turrittin の方程式(4)に帰着され，Turrittin，Heading 等による(4)の大域的解析の結果を用いて，

$$(33)\qquad N=\frac{2n}{\pi(2n+1)}\lambda_N^{\frac{2n+1}{2n}}+K+O(\lambda_N^{-\frac{1}{2n}})$$

なる(31)の拡張された結果を導いている。McLeodの論文が示す事は，一般のn階自己随伴型微分方程式に対してもその微分方程式の大域的性質が充分解明されていれば，固有値分布問題も同様に解析されるであろうということである。

ところで，特異境界値問題において，固有値がdiscreteになる場合はNaimarkの一結果によると自己随伴型微分方程式

(34) $$L(x) \equiv (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}\left(p_0(t)\frac{d^n x}{dt^n}\right) + (-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left(p_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right) + \cdots + p_n(t)x = \lambda x$$

の係数に

(35) $$\begin{cases} p_0(t) > 0, \quad p_1(t) \geqq 0, \quad \ldots \quad p_{n-1}(t) \geqq 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (0 \leqq t < \infty) \\ \lim_{t\to\infty} p_n(t) = \infty \end{cases}$$

なる条件が課せられているときである。

そこで，これからTitchmarsh－McLeodの研究を進める上において，Naimarkの条件を素直にみたす例としは，G.H.Eが浮んで来る。と言うのは，

先にも述べた如く，Scheffé の結果によると，係数 $P_\ell(t)$ が全て，

$$(36) \qquad P_\ell(t) = \left(a_\ell^{(0)} + a_\ell^{(k)} t^k\right) t^{2(n-\ell)} \qquad (\ell=1,2,\dots,n)$$

となる微分方程式は，必ず G.H.E に帰着され，このときに

$$(37) \qquad \begin{cases} a_\ell^{(0)} \geqq 0, \ a_\ell^{(k)} \geqq 0 & (\ell=1,2,\ ,\ n-1) \\ a_n^{(k)} > 0 \end{cases}$$

の条件を課すことは，一般のときの条件（35）と比べてさほど不自然ではないからである。そして，自己随伴型 G.H.E に対する特異境界値問題の固有値分布に関して，(33) と類似の結果を導こうというのが，これからの研究課題であり，G.H.E の大域的解析を詳しく調べる一つの目的でもある。

〔参考文献〕

(1) E.W. Barnes, The asymptotic expansion of integral functions defined by generalized hypergeometric series, Proc. London Math Soc (2), 5 (1907) pp 59–116

(2) B. L. J. Braaksma, Asymptotic expansions and analytic continuations for a class of Barnes-integrals, Composito Math, 15 (1964) pp 239-341
(3) B. L. J. Braaksma, Asymptotic analysis of a differential equation of Turrittin, SIAM. J. Math. Anal, 2 (1971) pp 1-16.
(4) K. Okubo, Stokes 現象 I. II, 函数方程式 第15巻 第3号.
(5) E. C. Titchmarsh, Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations, Vol 1, Oxford (1962)
(6) M. A. Naimark, Linear differential operators
(7) J. B. McLeod, On the distribution of eigen-values for an n-th order equation, Quart. J. Math. Oxford (2), 17 (1966) pp 112-131.