数理解析研究所講究録
第176巻 1973年 22-29



# 2階非線型微分方程式の周期解について

埼大 理工　佐 藤 祐 吉

## §1. 序

Sansone-Conti 著 Non-linear Differential Equations Chapter VI §7 On an Equation of Dynamics and Aerodynamics of Wires において、微分方程式

$$(※)\qquad \ddot{x}+(|\dot{x}|-q)\dot{x}+x-p^2x^3=0$$

$$p>0,\ q>0\ \ \text{const.}$$

の周期解の存在について、次のような結果が述べられている。

$$pq^2 \geqq 8\sqrt{3}/9$$

のとき、(※)の周期解は存在しない。

$$\begin{cases} 0<pq^2<8\sqrt{3}/9 \\ \dfrac{q}{2}+\left[\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{8\sqrt{3}}{9q^2}\right]^{1/2}<\left[-q+(q^2+1)^{1/2}\right]/2p \end{cases}$$

のとき、少なくとも1つ(※)の周期解が存在する。

ここでは、函数族 $|y|-q$, $x-p^2x^3$ を含むようなより広い

函数族を考える。即ち、$F(y)$, $g(x)$は連続で、

(1) $\begin{cases} F(y) > 0 & \text{for } \beta_2 > y \text{ and } y > \beta_1 \\ F(y) < 0 & \text{for } \gamma_2 < y < \gamma_1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} g(x)x > 0 & \text{for } \alpha_2 < x < 0 \text{ and } 0 < x < \alpha_1 \\ g(x)x < 0 & \text{for } \alpha_2 > x \text{ and } x > \alpha_1 \end{cases}$

ここで、$\alpha_i$, $\beta_i$, $\gamma_i$ は定数で、$\beta_2 \leqq \gamma_2 < 0 < \gamma_1 \leqq \beta_1$

の条件のもとで、微分方程式

(A) $$\ddot{x} + F(\dot{x})\dot{x} + g(x) = 0$$

の周期解の存在について考える。

更に、(A)の解は初期条件に関しての一意性は保証されていると仮定する。加えて、

$$\begin{cases} g(x) \text{ は } x = 0,\ \alpha_i\ (i = 1, 2) \text{ で微分可能とする。} \\ g'(\alpha_i) < 0,\ (i = 1, 2) \end{cases}$$

(A)の代りに、

(B) $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -F(y)y - g(x) \end{cases}$

とおくと、この *system* の *critical pt.* は原点$(0,0)$と$(\alpha_1, 0)$と$(\alpha_2, 0)$ の以上3点である。

点$(\alpha_1, 0)$は *saddle pt.* で勾配

$$-\frac{F(0)}{2} \pm \left[ \left( \frac{F(0)}{2} \right)^2 - g'(\alpha_1) \right]^{1/2}$$

を持った $\overset{e}{s}$paratrix がある。従って、$(\alpha_1, 0)$ の index $j((\alpha_1,0))$ は Bendixson's formula

$$2j((\alpha_1,0)) = 2 + n_e - n_h$$

ここで、$n_e$ は elliptic sector の数

$n_h$ は hyperbolic sector の数

によって、$n_e = 0$, $n_h = 4$ であるから，$-1$ である。

$(\alpha_2, 0)$ の index も同様に $-1$ である。$(0,0)$ が nonrotation pt. ならば、$n_e = 0$, $n_h = 0$ より，$+1$ である。

従って、(B) の limit cycle が存在するならば、原点のみを内部に含まねばならない。

## §2. limit cycle の存在について

定理 1. (1), (2), (3) と

$$(4) \qquad \int_0^{\alpha_i} g(s)\,ds \leqq \frac{1}{2}\gamma_i^2 \quad (i=1,2)$$

ならば、(B) の limit cycle は存在しない。

証明. (B) の閉軌道 $\Gamma$ が存在すると仮定する。

$\Gamma$ は critical pt. $(0,0)$ のみを内部に含むので、strip $\alpha_2 < x < \alpha_1$, $-\infty < y < \infty$ に含まれ、丁度 2 点で $x$ 軸と交わる。その交点を $P=(x_0, 0)$ $(x_0 > 0)$, $Q=(x_1, 0)$ $(x_1 < 0)$ で表わす。

$$G(x)=\int_0^x g(s)\,ds$$

とおき、函数

$$\lambda(x,y)=\frac{1}{2}y^2+G(x)$$

を考える。

$\lambda(x,y)$は(B)の解に沿って、

(5) $$\frac{d\lambda}{dt}=-F(y)y^2$$

$\lambda_0=\lambda(P)$とおくと、$G(x)$は $0<x<\alpha_1$ （$\alpha_2<x<0$）で増加（減少）函数であるから、

$$\lambda_0=G(x_0)<G(\alpha_1)$$

次の case が考えられる。

Case 1.　$G(x_0)\leqq G(\alpha_2)$

Case 2.　$G(x_0)>G(\alpha_2)$

Case 1では、閉曲線$\lambda(x,y)=\lambda_0$は領域$\alpha_2\leqq x<\alpha_1$, $\gamma_2\leqq y\leqq\gamma_1$に含まれる。

所で、$F(y)<0$ for $\gamma_2<y<\gamma_1$ であるから、(5)から、点Pを通る(B)の解はtが増加するとき、閉曲線$\lambda(x,y)=\lambda_0$の内部から外部に出る。故に、$\Gamma$と$\lambda(x,y)=\lambda_0$は点P以外でも交わらなければならない。それは等式(5)に反する。

Case 2では、閉曲線$\lambda(x,y)=G(\alpha_2)$を考えると、点Pは外部で、点Qは内部にあることになり同様に矛盾が導かれる。

定理2. (1), (2), (3)と更に、

(i) $^{\exists}y_1 > \gamma_1$, $^{\exists}y_2 < \gamma_2$ such that

$$F(y_i)|y_i| > K_i \qquad (i=1,2)$$

ここで、 $K_1 = -\min\limits_{\alpha_2 < x < 0} g(x)$ , $K_2 = \max\limits_{0 < x < \alpha_1} g(x)$

(ii) $0 < {}^{\exists}\mu_i < 1$ $(i=1,2)$ such that

(6) $$\eta_i^2 \leqq \beta_i^2 + 2\,G(\mu_i \alpha_i) \qquad (i=1,2)$$

(7) $$-F(h_i(x)) - \frac{g(x)}{h_i(x)} \leqq -\frac{\beta_i}{(1-\mu_i)\alpha_i}$$

for $\mu_1\alpha_1 < x < \alpha_1$ if $i=1$

for $\alpha_2 < x < \mu_2\alpha_2$ if $i=2$

ここで、 $\eta_1 = \inf\{y \mid F(y)y > K_1,\ y > 0\}$

$\eta_2 = \sup\{y \mid F(y)y < -K_2,\ y < 0\}$

$h_i(x) = \dfrac{(\alpha_i - x)\beta_i}{(1-\mu_i)\alpha_i} \qquad (i=1,2)$

のとき、(B)の周期解は少なくとも1つ存在する。

仮定(ii)は次のように置き換えることができる。即ち、

定理3. (1), (2), (3) と定理2の(i)と更に、

(ii)′ $0 < {}^{\exists}x_1 < \alpha_1$, $\alpha_2 < {}^{\exists}x_2 < 0$ such that

(8) $$\eta_i^2 \leqq \beta_i^2 + 2G(x_i) \qquad (i=1,2)$$

(9) $$\beta_i^2 \leqq 2\int_{\alpha_i}^{x_i} \{-g(s) + L_i\}\,ds \qquad (i=1,2)$$

ここで、$\eta_i$は定理2と同様。

$L_1 = -\min\limits_{y>0} F(y)y$

$L_2 = -\max\limits_{y<0} F(y)y$

ならば、(B)は少なくとも1つ周期解を持つ。

証明. 省略

## §3. 定理の Example

定理1, 2, 3を微分方程式

$$(※)\qquad \ddot{x}+(|x|-q)\dot{x}+x-p^2x^3=0$$

に応用する。

$$\alpha_1=\frac{1}{p},\ \alpha_2=-\frac{1}{p},\ \beta_1=\gamma_1=q,\ \beta_2=\gamma_2=-q$$

とおくと、(1), (2), (3)は満足する。

不等式(4)は、(※)の trajectory は原点に関して対称であることに注意すると、

$$\int_0^{1/p}(x-p^2x^3)dx=\frac{1}{4p^2}\leqq\frac{1}{2}q^2$$

$$\therefore\ \boxed{\frac{1}{2}\leqq p^2q^2}$$

この場合には、(※)の周期解は存在しない。

定理2に対しては、

$$K_1=K_2=2\sqrt{3}/9p$$

$$\eta_1=\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\frac{2\sqrt{3}}{9p}}$$

$$\eta_2=-\eta_1$$

となるので、(6)は、

$$\left[\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\frac{2\sqrt{3}}{9p}}\right]^2\leqq q^2+\frac{\mu_1^2(2-\mu_1^2)}{2p^2}$$

ところで、

$$\left[\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\frac{2\sqrt{3}}{9p}}\right]^2 \leqq q^2\left[1+\frac{4\sqrt{3}}{9pq^2}\right]$$

より、$\mu_1=\mu_2=\mu$ とおいて、

$$\boxed{p \leqq \frac{3\sqrt{3}}{8}\mu^2[2-\mu^2]}$$

ならば、(6) は成り立つ。

$$h_1(x)=q\cdot\frac{1-px}{1-\mu}, \quad h_2(x)=-q\cdot\frac{1+px}{1-\mu}$$

である。従って (7) は、

$$(\varphi(x)\equiv)-q^2\cdot\frac{1-px}{1-\mu}+q^2-x(1+px)(1-\mu)\leqq-\frac{pq^2}{1-\mu}$$
$$\text{for } \frac{\mu}{p}<x<\frac{1}{p}$$
$$-q^2\cdot\frac{1+px}{1-\mu}+q^2+x(1-px)(1-\mu)\leqq-\frac{pq^2}{1-\mu}$$
$$\text{for } -\frac{1}{p}<x<-\frac{\mu}{p}$$

となる。

$\varphi(x)$ は、$x=x_0=\dfrac{pq^2-(1-\mu)^2}{2p(1-\mu)^2}$ で最大値をとる。

(a) $\frac{\mu}{p}\leqq x_0<\frac{1}{p}$, (b) $x_0<\frac{\mu}{p}$, (c) $x_0>\frac{1}{p}$ の場合には、$\varphi(x)$ は区間 $[\frac{\mu}{p},\frac{1}{p}]$ でそれぞれ (a) $x=x_0$, (b) $x=\frac{\mu}{p}$, (c) $x=\frac{1}{p}$ で最大値をとるので、

$$\text{(a) } \varphi(x_0),\ \text{(b) } \varphi\left(\frac{\mu}{p}\right),\ \text{(c) } \varphi\left(\frac{1}{p}\right) \leqq -\frac{pq^2}{1-\mu}$$

となれば、(7) は成り立つ。

以上のことより、$0<\mu<1$ に対して、

1°. $$p\leqq \min\left[\frac{3\sqrt{3}}{8}\mu^2(2-\mu^2),\ \mu-\frac{1}{3}\right]$$
$$\frac{(2\mu+1)(1-\mu)^2}{p}\leqq q^2\leqq\frac{2(1-\mu)^2}{p(1+p-\mu)}$$

2°. $$\mu - \frac{1}{3} < p \leqq \min\left[\frac{3\sqrt{3}}{8}\mu^2(2-\mu^2),\ \frac{\mu+\mu^2}{2\mu+1}\right]$$
$$q^2 \leqq \frac{1}{p}(1-\mu)^2\left[1+2(\mu-p)+2\{(\mu-p)+(\mu-p)^2\}^{1/2}\right]$$

3°. $$\frac{\mu+\mu^2}{2\mu+1} < p \leqq \frac{3\sqrt{3}}{8}\mu^2(2-\mu^2)$$
$$q^2 \leqq \frac{\mu(1+\mu)(1-\mu)^2}{p^2}$$

$p$, $q$ が 1°, 2°, 3° のいずれかを満足するとき、周期解が存在する。1° は case (a)(c) より、2° は case (a)(b) より、3° は case (b) より出る。

定理3 に対しては、$x_1 = \mu\frac{1}{p}$　$0 < \mu < 1$ とおくと、前と同様に (8) は、
$$p \leqq \frac{3\sqrt{3}}{8}\mu^2(2-\mu^2)$$
ならば、十分であり、(9) は、
$$q^2 \leqq 2\int_{1/p}^{\mu/p}\left[-x+p^2x^3+\frac{q^2}{4}\right]dx$$
となるので、
$$\mu\left[-2\mu+\mu^3+pq^2\right] \geqq q^2p(1+2p)-1$$
となる。