数理解析研究所講究録
第176巻 1973年 30-58

3体問題における 2体衝突にかんするSundmanの結果

都立大 理　岩野 正宏

Siegelの書物によれば，1858 DirichletはKroneckerに，微分方程式を直接解くのではなく 問題の解をstep by stepに近似するような方法により 力学の問題を解くための一般的な方法を発見した，と語った。また彼は 太陽系の安定性も証明したと語った。彼は何も記録を残さずに間もなく世を去った。Weierstrassは 問題は ベキ級数展開を用いることだと感づき，n体問題の解をみつけようと努力し，弟子のKovalevski, Mittag-Lefflerをgoalめざして指導した。Mittag-Lefflerの提案により，SwedenとNorwayの王様は懸賞問題——n体の座標を 任意の時刻で有効な 級数展開式で表わすこと——を設けた。1889年 Poincaréが受賞した。論文は 力学の将来の発展に重要な多くの独創的なideasを含みまた数学の他の分野に対しても刺戟を与えた．1913年，Sundmanは $n=3$に対して この問題を解いた。それまでは，初期条件に適当な制限を与えて 2体衝突を除外することに成功しな

かったことが，問題解決を困難にした主な理由である。彼の結果に対応するものは $n>3$ の場合には知られていない。

§1. Euler の 10 積分.

P_k $(k=1,2,\ldots,n)$ 質点，(x_k, y_k, z_k) は P_k の座標，m_k は P_k の質量，r_{kl} は 2体 P_k, P_l の間の距離とすれば n 体の運動方程式は

$$m\ddot{q} = U_q \quad , \quad U = \sum_{k<l} \frac{m_k m_l}{r_{kl}}$$

の形にかける．$3n$ 個の 2階の方程式である．初期条件は

$$r_{kl}(\tau) = \rho_{kl} > 0.$$

よく知られているように，

6個の重心積分

$$\sum m_k x_k = at + a^*, \quad \sum m_k y_k = bt + b^*, \quad \sum m_k z_k = ct + c^*$$

3個の角運動量積分

$$\sum m_k(y_k\dot{z}_k - z_k\dot{y}_k) = \alpha, \quad \sum m_k(z_k\dot{x}_k - x_k\dot{z}_k) = \beta, \quad \sum m_k(x_k\dot{y}_k - y_k\dot{x}_k) = \gamma$$

1個のエネルギー積分

$$T - U = h, \qquad T = \frac{1}{2}\sum(m_k\dot{x}_k^2 + m_k\dot{y}_k^2 + m_k\dot{z}_k^2).$$

1913年 Bruns はこの他には代数的な積分は存在しないことを証明した。

● Sundman-Weierstrass の定理

n体が時刻 t_1 において一点で衝突するときは，$\alpha=\beta=\gamma=0$ でなければならない。

[証明の方針]
$$I\equiv\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k^2+y_k^2+z_k^2)=\sum_q m q^2$$

これを微分して，$\frac{1}{2}\ddot{I}=T+h=U+2h$．したがって，衝突の時刻 t_1 の適当な近傍で $\ddot{I}>0$ for $\exists t_2\leq t<t_1$．したがって I はこの近傍で正値単調と仮定してよい。よって $t\to t_1$ のとき I は limit をもつ．この limit=0 は n 体が t_1 において全部一点 ── 重心を原点 O にとっておく ── で衝突するときに限る．少し計算すれば

$$2IT\geq\frac{1}{4}\dot{I}^2+\eta,\quad \eta=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{n}.$$

よって $2IT\geq\eta$． I が単減であれば，

$$2\eta\ \log I(t_2)/I\leq\dot{I}(t_2)^2+4|h|\,I(t_2),\quad t_2\leq t<t_1$$

$\eta>0$ のとき，I は正の下界をもつ．また I が単増のとき正の下界をもつことは明らか．故に，$\eta>0$ のときは $n(n-1)/2$ 個の r_{kl} の最大値は正の下界をもつ．もちろん $\tau\leq t<t_1$ で $\max r_{kl}$ は正の下界をもつから，n 体の O での衝突は起り得ない[終].

◍ とくに $n=3$ のとき，$\alpha=\beta=\gamma=0$ となるのは 3体

が固定された平面上を運動するときに限る.

[証明の方針] $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ および 運動の方程式は座標系の直交変換によって不変であるから $t=\tau$ で 3体は平面 $z=0$ 内にあり, また 重心 P_0 は O にあると仮定してよい. よって $\alpha=\beta=\gamma=0$ とすれば,

$$\sum_{k=1}^{3} m_k y_k \dot{z}_k=0 , \quad \sum_{k=1}^{3} m_k x_k \dot{z}_k=0 \quad at \quad t=\tau,$$

$$\sum_{k=1}^{3} m_k \dot{z}_k=0 \qquad (\text{重心は } O \text{ にあるから}).$$

これらは $m_1\dot{z}_1$, $m_2\dot{z}_2$, $m_3\dot{z}_3$ を未知数とする同次方程式となるから,

$\dot{z}_k=0 \quad at \quad t=\tau$ であるか または

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \quad at \quad t=\tau .$$

はじめの場合は, 3体の $t=\tau$ における運動の方向は平面 $z=0$ 内にあるから, 一意性により 3体は永久に平面 $z=0$ 内を運動する. あとの場合は, (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) を頂点とする 3角形の面積は 0 となるから, 3体は $t=\tau$ において 平面 $z=0$ 内の, ある直線上にある. 座標軸を回転して $\dot{z}_3=0$ $(t=\tau)$ となるようにする. $\dot{z}_k=0$ $(k=$

1,2,3) の場合を除けば，　$t=\tau$ において　$y_1=y_2$, $x_1=x_2$.
すなわち $P_1=P_2$.　同じようにして　$P_2=P_3$.　よって　$t=\tau$
(初期時刻)において 3体は衝突していることになり，われわれ
の仮定に反する．[終]

§2　3体運動の方程式

P_1の座標を (q_1, q_2, q_3)，P_2のを (q_4, q_5, q_6)，P_3のを
(q_7, q_8, q_9)，運動量を　それぞれ (p_1, p_2, p_3)，(p_4, p_5, p_6)，
(p_7, p_8, p_9) で表わす．すなわち $(p_1, p_2, p_3) = (m_1\dot{q}_1, m_2\dot{q}_2,$
$m_1\dot{q}_3)$ など．運動の　エネルギー　は

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{p_k^2}{m_1} + \frac{p_{k+3}^2}{m_2} + \frac{p_{k+6}^2}{m_3}\right).$$

$E = T - U$　とおけば，Hamiltonian form の運動方程式

$$(2.1)\qquad \dot{q}_k = E_{p_k}, \qquad \dot{p}_k = -E_{q_k} \qquad (k = 1, 2, \cdots, 9)$$

をえる．Euler 積分を用いて　方程式の階数を下げるために，
P_3の座標を (x_7, x_8, x_9)，P_1, P_2 の P_3 に関する相対座標を
(x_1, x_2, x_3)，(x_4, x_5, x_6) とおけば，x と q との間の関係は

$$x_k \equiv q_k - q_{k+6}, \quad x_{k+3} \equiv q_{k+3} - q_{k+6}, \quad x_{k+6} \equiv q_{k+6}.$$

$$y_k \equiv p_k, \quad y_{k+3} \equiv p_{k+3}, \quad y_{k+6} \equiv p_k + p_{k+3} + p_{k+6}$$

を x の共役座標にとれば　$(q, p) \to (x, y)$ は canonical

変換となる. このことは, “$w = w(q,y)$ とするとき,

$$p_k \equiv w_{q_k}, \quad x_k \equiv w_{y_k}, \quad \det|w_{y_k q_l}| \neq 0$$

であれば, $(q,p)\to(x,y)$ は canonical 変換である” という一般論により, いまの場合は w として

$$w \equiv \sum_1^3 \{(q_k - q_{k+6})y_k + (q_{k+3}-q_{k+6})y_{k+3} + q_{k+6}\,y_{k+6}\}$$

をとればよい, ことからわかる. 新しい運動方程式, T, U は

$$\dot{x}_k = E_{y_k}, \quad \dot{y}_k = -E_{x_k} \qquad (k=1,2,\ldots,9),$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\{m_1^{-1}y_k^2 + m_2^{-1}y_{k+3}^2 + m_3^{-1}(y_{k+6}-y_k-y_{k+3})^2\},$$

$$U = m_1m_3(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{-\frac{1}{2}} + m_2m_3(x_4^2+x_5^2+x_6^2)^{-\frac{1}{2}} + m_1m_2\{(x_1-x_4)^2+(x_2-x_5)^2+(x_3-x_6)^2\}^{-\frac{1}{2}}.$$

さて $E \equiv T-U$ は x_7, x_8, x_9 を含まないから, y_7, y_8, y_9 は consts. (6個の重心積分). $k=1,2,\ldots,6$ に対応する方程式を解けば, $\dot{x}_k = E_{y_k}$ $(k=7,8,9)$ を積分して x_7, x_8, x_9 をえる. 3体の重心が O にあれば, $y_7 = y_8 = y_9 = 0$ かつ $x_{k+6} = -(m_1+m_2+m_3)^{-1}(m_1x_k + m_2x_{k+3})$. $(k=1,2,3)$. よって次の Hamiltonian 系を考えればよい:

$$\dot{x}_k = E_{y_k}, \quad \dot{y}_k = -E_{x_k} \qquad (k=1,2,\ldots,6),$$

$$T = \tfrac{1}{2}(m_1^{-1}+m_3^{-1})\sum_1^3 y_k^2 + \tfrac{1}{2}(m_2^{-1}+m_3^{-1})\sum_1^3 y_{k+3}^2 + m_3^{-1}\sum_1^3 y_k\,y_{k+3}.$$

● $t=t_1$ において 2体 P_1, P_3 が衝突すれば,

$$xy^2 \to 2(m_1m_3)^2(m_1+m_3)^{-1}, \quad xU \to m_1m_3 \qquad \text{as } t\to t_1,$$

ただし $x^2 \equiv x_1^2+x_2^2+x_3^2$, $y^2 \equiv y_1^2+y_2^2+y_3^2$, t_1 は有限.

[証明の方針] q_4, q_5, q_6 は 不等式 $|\ddot{q}| \leq m_1 r_{12}^{-2} + m_3 r_{23}^{-2}$

をみたす。P_1とP_3とが衝突するから, $\exists t_2$に対し

$$r_{13}<\varepsilon/2,\quad r_{12}>\varepsilon/2,\quad r_{23}>\varepsilon/2 \qquad t_2\leqq t<t_1.$$

$\varepsilon>0$ は、p.3 で説明した $\max r_{kl}$ の正の下界。故に $q, \dot{q}$ は $t\to t_1$ のとき有限確定値をとる. すなわち P_2の速度成分は $t\to t_1$ のとき有限確定値. $t\to t_1$ のとき $P_1-P_3\to 0$, i.e. $q_k-q_{k+6}\to 0$. 3体の重心は O にあるから, $m_1q_k+m_2q_{k+3}+m_3q_{k+6}=0$ より, (q_1,q_2,q_3), (q_7,q_8,q_9) は $t\to t_1$ のとき有限確定値, すなわち 2体 P_1, P_3 は空間の確定点で衝突する. ついでに I は $t\to t_1$ のとき有限確定値をとる. P_kの速度を V_k とすれば

$$\frac{1}{2}\sum m_k V_k^2 = T = U + h.$$

$t\to t_1$ のとき $x\equiv r_{13}\to 0$. しかるに r_{12}, r_{23} は正の下界をもつから, $xU\to m_1m_3$. よって

(*) $$x\sum m_k V_k^2 \to 2m_1m_3.$$

とくに $t\to t_1$ のとき xV_k^2, $x\dot{q}_1^2,\dots,x\dot{q}_9^2$, $\sqrt{x}\,\dot{q}_1,\dots,\sqrt{x}\,\dot{q}_9$ は有界. 重心は O にあるから,

$$m_1\dot{q}_k+m_2\dot{q}_{k+3}+m_3\dot{q}_{k+6}=0.$$

この関係式より

$$x(m_1\dot{q}_k)^2-x(m_3\dot{q}_{k+6})^2=m_2\sqrt{x}\{m_2\sqrt{x}\,\dot{q}_{k+3}^2+2m_3\dot{q}_{k+3}(\sqrt{x}\,\dot{q}_{k+6})\}$$

を得る. 故に $t\to t_1$ のとき

$$x(m_1V_1)^2-x(m_3V_3)^2\to 0,\quad xV_2^2\to 0.$$

したがって(*)より $$xV_1^2 \to \frac{2m_3^2}{m_1+m_3} \quad \text{as } t\to t_1.$$

$y^2=m_1^2V_1^2$ であるから求める関係式が成立つ. [終]

$x(t)^{-1}$ は $t\to t_1$ のとき ∞ になる. しかしながら

$$\int_\tau^{t_1}\frac{dt}{x} = \lim_{t\to t_1}\int_\tau^{t}\frac{dt}{x}$$ は収束である.

[証明の方針] $\frac{1}{2}\ddot{I} = U+2h$ を用いる. $U-m_1m_3x^{-1}$ は $\tau\leqq t<t_1$ において有界. 故に $\frac{1}{2}\ddot{I}-m_1m_3x^{-1}$ は有界.
したがって上記の積分の収束は, $t\to t_1$ のとき $\dot{I}$ が有限な limit をもつことと同等. さて $\ddot{I}>0$ for $\exists t_2\leqq t<t_1$, $\dot{I}$ は $t_2\leqq t<t_1$ において単調. よって $\dot{I}$ は有界であることを示せばよい. Iの定義式より

$$\frac{1}{2}\dot{I} = \sum m q\dot{q} = \sum_{1}^{3}(m_1 q_k\dot{q}_k + m_2 q_{k+3}\dot{q}_{k+3} + m_3 q_{k+6}\dot{q}_{k+6})$$

重心はOにあるから, $m_3\dot{q}_{k+6} = -m_1\dot{q}_k - m_2\dot{q}_{k+3}$ を得る. これを代入して, $x_1,\dots,x_6$ の定義に注意すれば

$$\frac{1}{2}\dot{I} = m_1\{x_1\dot{q}_1+x_2\dot{q}_2+x_3\dot{q}_3\} + m_2\{x_4\dot{q}_4+x_5\dot{q}_5+x_6\dot{q}_6\}.$$

右辺の各項にSchwarzの不等式を応用すれば

$$\frac{1}{2}|\dot{I}| \leqq m_1 xV_1 + m_2 r_{23}V_2, \qquad x=r_{13}$$

すでに示したように $x^2V_1^2\to 0$, 故に $xV_1\to 0$ as $t\to t_1$. また r_{23}, V_2 は $t\to t_1$ のとき有限確定値をとる. [終]

さて新しい変数 s を次式によって定義すると,

$$s(t) \equiv \int_{\tau}^{t} \frac{dt}{x(t)} \qquad \tau \leqq t < t_1 ,$$

は　$\tau \leqq t < t_1$　において　正則かつ有界である．x_k, y_k　を　s　の関数と考えれば，　$x_k(s), y_k(s)$　は　$0 \leqq s < s_1$　において　正則となる．しかし　$t \to t_1$　のとき　$x \to 0$　かつ $xy^2 \to 2(m_1 m_3)^2/(m_1+m_3)$　であるから，$y \to \infty$ as $t \to t_1$，　したがって　$y_1(s), y_2(s), y_3(s)$　のうち少くとも一つは　$s = s_1$　において　正則でなくなる．

さて　s　を独立変数にとれば　運動方程式

$$\dot{x}_k = E_{y_k}, \quad \dot{y}_k = -E_{x_k} \quad (k = 1, \ldots, 6)$$

は，

$$x'_k = x E_{y_k}, \quad y'_k = -x E_{x_k} \quad (k = 1, \ldots, 6)$$

となる．Hamiltonian form にするために，Poincaré にしたがって，E の代りに

$$F \equiv x(T - U - h) \equiv x(E - h)$$

をとれば，もとの方程式の解は　$E = h$　をみたすから，

$$x'_k = F_{y_k}, \quad y'_k = -F_{x_k} \quad (k = 1, \ldots 6)$$

を満足する．逆に　$F = 0, x \neq 0$　なる　後者の解は前者の解となる．しかも　xT, xU　は　$t \to t_1$　のとき有限な limit をもつ．しかし，　$F_{x_1}, F_{x_2}, F_{x_3}$　のうち　$t \to t_1$　のとき有界でないものがある．故に Hamiltonian form ではあるが，$t = t_1$　の近くでの解を調べるには　まだ　適当ではない．

§3 Sundman の変換.

Sundman は衝突の時刻 t_1 の近傍での解を調べるために, Newtonian form でかかれている方程式に特別な変換を行って, 新しい方程式の右辺は t_1 の近傍で有界であるようにした。一方 Levi-Civita は Sundman の変換を, Hamiltonian form でかかれている方程式に対して試みた。Levi-Civita の発見した canonical 変換 $(x,y)\to(\xi,\eta)$ は birational な関係式

$$(3.1)\qquad \begin{aligned} &\xi_k = x_k y^2 - 2y_k \sum_{l=1}^{3} x_l y_l,\quad \eta_k = y_k y^{-2} \quad (k=1,2,3)\\ &\xi_k = x_k,\qquad \eta_k = y_k \quad (k=4,5,6)\end{aligned}$$

or

$$(3.2)\qquad \begin{aligned} &x_k = \xi_k \eta^2 - 2\eta_k \sum_{l=1}^{3} \xi_l \eta_l,\quad y_k = \eta_k \eta^{-2} \quad (k=1,2,3)\\ &x_k = \xi_k,\qquad y_k = \eta_k \quad (k=4,5,6),\end{aligned}$$

$$y^2 \equiv y_1^2 + y_2^2 + y_3^2,\qquad \eta^2 = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2$$

で与えられる. Levi-Civita の変換の方がいろんな点ですぐれているように思われる. このように特異性(衝突の時刻の近傍では autonomous 系の右辺が有界でなくなる)を解消する変換は regularizing transformation と呼ばれる. このすぐれた Levi-Civita の変換も Sundman のものと

密接な関係があるように思われるので，あえて Sundmanの変換と呼ぶことにしたい。

上記の変換の導き方は極めて heuristic method であるが，これが canonical であることは計算によって直接に確めることができる．じっさい 12次の行列

$$\mathfrak{M} \equiv \begin{pmatrix} (x_{k\xi_l}) & (x_{k\eta_l}) \\ (y_{k\xi_l}) & (y_{k\eta_l}) \end{pmatrix} \in Sp(6),$$

すなわち $\mathfrak{M}$ は 12次の symplectic 群の要素となるから。

Siegel の書物にしたがって導き方の概略を説明しよう。

衝突 $P_1 \to P_3$ のときは，P_2 の影響は無視できる．そこで重心は O にあるとして P_1, P_3 を2体問題として考える：

$$T = \tfrac{1}{2}(m_1^{-1}+m_3^{-1})(y_1^2+y_2^2+y_3^2),\quad U = m_1 m_3 (x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{-\frac{1}{2}} = m_1 m_3 x^{-1}$$

(see p.6)

$$F = \tfrac{1}{2}(m_1^{-1}+m_3^{-1})\, x y^2 - m_1 m_3 - h x$$

となる。$h=0$, $\frac{1}{2}(m_1^{-1}+m_3^{-1})=1$ なる特別な場合を考え，また付加定数 $-m_1 m_3$ を無視して，

$$(3.3) \qquad x_k' = F_{y_k}, \qquad y_k' = -F_{x_k} \qquad (k=1,2,3)$$

$$F \equiv F(x_k, y_k) \equiv (x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{1}{2}}(y_1^2+y_2^2+y_3^2)$$

を考える。$v \equiv v(x,\xi)$, $\det|v_{x_k\xi_l}| \neq 0$ に対して

$y_k = v_{x_k}$, $\eta_k = -v_{\xi_k}$ $(k=1,2,3)$ によって定められる変換 $(x,y)\to(\xi,\eta)$ は canonical であり，新しい F は $F(x_k, v_{x_k})$ で与えられる．このとき v を適当にとって，$F(x_k, v_{x_k})$ を ξ のみの関数 $\lambda(\xi_k)$ となるようにできないか？ そうすれば，新しい方程式は $\xi_k' = \lambda_{\eta_k} = 0$, $\eta_k' = -\lambda_{\xi_k}$ となり，積分として $\xi_k = const$, $\eta_k + \lambda_{\xi_k} s = \zeta_k = const$ が得られる．
v は，次の偏微分方程式を満足しなければならない：

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{1}{2}}(v_{x_1}^2+v_{x_2}^2+v_{x_3}^2)=\lambda(\xi_k),$$

$$\det|v_{x_k \xi_l}| \neq 0.$$

これを解くために，平面における同じような問題をまず考え，それを 3次元の場合に拡張することを試みる．平面の場合は，

$$(x_1^2+x_2^2)^{\frac{1}{2}}(v_{x_1}^2+v_{x_2}^2)=\lambda(\xi_k), \quad \det|v_{x_k \xi_l}| \neq 0.$$

$z \equiv x_1+\sqrt{-1}\,x_2$ とおき，v を 解析関数 $\phi(z) \equiv u+\sqrt{-1}\,v$ の虚部として求めてみる．Cauchy-Riemann より

$$u_{x_1} = v_{x_2}, \quad v_{x_1}^2+v_{x_2}^2 = u_{x_1}^2+u_{x_2}^2 = |\phi_z|^2$$

故に

$$|z\phi_z^2| = \lambda(\xi_k)$$

は const. でなければならない．$z\phi_z^2$ は解析関数であるから，$z\phi_z^2 \equiv const$ でなければならない．

$$z\phi_z^2 = \bar{\zeta} = \xi_1 - \sqrt{-1}\,\xi_2, \quad \phi_z = (\bar{\zeta}/z)^{\frac{1}{2}}$$

$\zeta = \xi_1 + \sqrt{-1}\,\xi_2$ は complex const.

とおけば, 積分して $\phi(z)=2\sqrt{\xi z}$. よって

$$\sqrt{-1}\,v=\sqrt{\xi z}-\sqrt{\xi\bar{z}}$$

(ϕ は z,ξ の関数とみて, $2\sqrt{-1}\,v=\phi(z,\xi)-\phi(\bar{z},\bar{\xi})$), 故に

$$\begin{aligned} v^2&=2|\xi z|-\xi z-\xi\bar{z}\\ &=2\{(\xi_1^2+\xi_2^2)^{\frac{1}{2}}(x_1^2+x_2^2)^{\frac{1}{2}}-(\xi_1x_1+\xi_2x_2)\}\end{aligned}$$

をえる. 計算によって $\xi z\neq 0$ ならば

$$\det|v_{x_k\xi_l}|=\frac{1}{4|\xi z|}\neq 0.$$

これで $v(x,\xi)$ は問題の偏微分方程式の解になることがわかった.

これを3次元に拡張するために

$$v^2=2\left(\xi x-\sum_{l=1}^{3}\xi_l x_l\right),\quad \xi=(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)^{\frac{1}{2}},\ x=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{1}{2}}$$

とおいてみる. $F(x_k,y_k)=xy^2=x(y_1^2+y_2^2+y_3^2)$ であるから, 上記の v を $F(x_k,v_{x_k})$ に代入したとき, ξ だけの関数 $\lambda(\xi_k)$ になることがわかれば, この v は問題の偏微分方程式の解になる. 定義により, 微分して

(3.4) $vv_{x_k}=x_kx^{-1}\xi-\xi_k\ (x\neq 0),\quad vv_{\xi_k}=\xi_k\xi^{-1}x-x_k\ (\xi\neq 0).$

はじめの式に x をかけ, 2乗して k に関して加えれば,

$$x^2v^2\sum_1^3 v_{x_k}^2=2\xi^2x^2-2\xi x\sum_1^3\xi_l x_l=\xi x v^2.$$

故に

$$(3.5)\qquad x\sum_1^3 v_{x_k}^2 = \xi, \qquad (xv^2 \neq 0).$$

Jacobian は $\det|v_{x_k \xi_l}| = \dfrac{-1}{4\xi x v}$ $(\xi x v \neq 0)$.
(註. Jacobian $\neq 0$ であることは 簡単にでるが, 上記の値になることは証明できなかった). よって

$$\lambda(\xi_k) = \xi$$

ととればよい. $\xi x v \neq 0$ であるためには, 2つの実ベクトル (ξ_1, ξ_2, ξ_3) と (x_1, x_2, x_3) は 1次独立でなければならない. 母関数 $v(x_k, \xi_k)$ によって生成される canonical 変換を求めよう. まず (3.4) のはじめの式に x, あとの式に ξ をかければ,

$$x v v_{x_k} = x_k \xi - \xi_k x = -\xi v v_{\xi_k}$$

$y_k = v_{x_k}$, $\eta_k = -v_{\xi_k}$ より, $\qquad x y_k = \xi \eta_k \quad (k=1,2,3).$

また (3.5) より, $\qquad x y^2 = \xi.$

(3.4) のあとに式に ξ をかけ 2乗して k に関して加えて, $\qquad \xi\sum_1^3 v_{\xi_k}^2 = x \quad$ or $\quad \xi\eta^2 = x$.

故に $x y_k = \xi\eta_k$, $x y^2 = \xi$ より, $\qquad \eta_k = y_k y^{-2} \quad (k=1,2,3).$

また $x y_k = \xi\eta_k$, $\xi\eta^2 = x$ より, $\qquad y_k = \eta_k \eta^{-2} \quad (k=1,2,3).$

x_k の式を求めるために, (3.4) と $v_{x_k} = y_k$ とから,

$$v y_k = x_k x^{-1}\xi - \xi_k,$$

これに x_k をかけて, k に関して加えれば

$$v\sum_{k=1}^{3} x_k y_k = x\xi - \sum_{k=1}^{3} x_k \xi_k = \frac{v^2}{2} \quad \text{or} \quad \sum_{k=1}^{3} x_k y_k = \frac{v}{2}.$$

同じようにして，(3.4)のあとの式に $v_{\xi_k} = \eta_k$ を代入して

$$v\eta_k = x_k - \xi_k \xi^{-1} x$$

をえるから，

$$v\sum \xi_k \eta_k = \sum x_k \xi_k - \xi x = -\frac{v^2}{2} \quad \text{or} \quad \sum_{1}^{3} \xi_k \eta_k = -\frac{v}{2}.$$

$v y_k = x_k x^{-1}\xi - \xi_k$ より，

$$\xi_k = x_k x^{-1}\xi - v y_k = x_k x^{-1}\xi - 2y_k \sum_{l=1}^{3} x_l y_l.$$

$xy^2 = \xi$ であったから，(3.1) のはじめの式

$$\xi_k = x_k y^2 - 2y_k \sum_{1}^{3} x_l y_l \qquad (k=1,2,3)$$

をえる。 また $v\eta_k = x_k - \xi_k \xi^{-1} x$ より，

$$x_k = \xi_k \xi^{-1} x - 2\eta_k \sum_{1}^{3} \xi_l \eta_l.$$

$\xi\eta^2 = x$ であったから，(3.2) のはじめの式

$$x_k = \xi_k \eta^2 - 2\eta_k \sum_{1}^{3} \xi_l \eta_l$$

をえる.

上記の discussion では，2つのベクトル (x_1, x_2, x_3), (ξ_1, ξ_2, ξ_3) は real かつ 1次独立であるということが仮定されている. (3.1) の逆変換が (3.2) であるためには，$\eta \neq 0$, $y \neq 0$ であればよい.

方程式 (3.3) は $\xi_k' = 0$, $\eta_k' = -\xi_k \xi^{-1}$ $(k=1,2,3)$ となり，

これの解を(3.2)の(x_1, x_2, x_3)に代入すれば，一般に放物線をえる．

Sundmanの変換は s に independent であるから，Hamiltonian function F は，新しい変数を用いれば

$$F \equiv \varkappa T - \varkappa U - \varkappa h,$$

$$\varkappa T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_3}\right)\xi + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}\right)\xi\eta^2 \sum_{k=1}^{3}\eta_{k+3}^2 + \frac{1}{m_3}\,\xi \sum_{k=1}^{3}\eta_k\,\eta_{k+3}$$

$$\varkappa U = m_1 m_3 + m_2\,\xi\eta^2\left(\frac{m_3}{r_{23}}+\frac{m_1}{r_{12}}\right), \qquad x = \xi\eta^2$$

$$r_{23}^2 = \sum_{k=1}^{3}\xi_{k+3}^2, \qquad r_{12}^2 = \sum_{k=1}^{3}\left(\xi_k\eta^2 - 2\eta_k\sum_{l=1}^{3}\xi_l\eta_l - \xi_{k+3}\right)^2$$

と書け，方程式は

(3.6) $\quad \xi_k' = F_{\eta_k}, \quad \eta_k' = -F_{\xi_k} \qquad (k=1,\cdots,6).$

● (ξ_k, η_k), $k=1,\cdots,6$, は，$s=s_1$ (衝突の time) において正則である, or 収束半径が0でない $s-s_1$ のベキ級数で表わせる．

[証明の方針] $s\to s_1$ $(t\to t_1)$ のとき，ξ_k, η_k $(k=4,5,6)$ は definite limits に近づく．また r_{12}, r_{23} は正の極限に，$\xi = xy^2$ は $2(m_1m_3)^2/(m_1+m_3) \equiv c > 0$ に近づく．したがって $y\to\infty$ かつ $\eta_k = y_k/y^2 \to 0$ $(k=1,2,3)$．

故に $\qquad c/2 \leqq \xi \leqq 2c \qquad$ for $\exists\, s_0 \leqq s < s_1$.

また $\xi_4, \xi_5, \xi_6, \eta_1, \cdots, \eta_6$ は $s\to s_1$ のとき limits をもつ．よって $(\xi_4,\cdots,\eta_6)$ を9次元空間の点とみれば，これは

或るコンパクト球 K に含まれる. $S \equiv \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3);\ c/2 \leqq \xi \leqq 2c\}$ とおく. ξ, X_{12}^{-1}, X_{23}^{-1} を 12個の変数 (ξ_k, η_k) の関数とみるとき, K が十分小ならば, これらは $P = S \times K$ で正則, したがって F は $S \times K$ で正則となる. s_0 を s_1 の十分近くにとれば, 解曲線 $(\xi_k(s), \eta_k(s))$ $s_0 \leqq s < s_1$ は P に完全に含まれる. 故に $(\xi_k(s), \eta_k(s))$ は $s = s_1$ において正則. とくに ξ_1, ξ_2, ξ_3 は $s \to s_1$ のとき limits をもつ. [終]

● $x_k(t), y_k(t)$, $k = 1, \dots, 6$ は $t = t_1$ を越えて解析接続できる.

[証明の方針] $\xi_{k1} \equiv \xi_k(s_1)$, $k = 1, 2, 3$, $b = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_3}\right)$ とおく. $\eta_k' = -F_{\xi_k}$ より

$$\eta_k' = -\frac{b}{c}\xi_{k1} + O(s - s_1).$$

これを積分して

$$\eta_k = -\frac{b}{c}\xi_{k1}(s - s_1) + \cdots,$$

$$\eta^2 = b^2 (s - s_1)^2 + \cdots.$$

一方 $x_k = \xi_k \eta^2 - 2\eta_k \sum_{l=1}^{3} \xi_l \eta_l$ であるから,

$$x_k = \xi_{k1} b^2 (s - s_1)^2 + 2\xi_{k1} b^2 (s - s_1)^2 + \cdots.$$

よって

(3.7) $$x_k(t) = -b^2 \xi_{k1} (s - s_1)^2 + \cdots, \qquad (k = 1, 2, 3)$$

$$x(t) = b^2 c (s - s_1)^2 + \cdots.$$

$t' = x$ より, これを積分すれば

$$t - t_1 = \frac{1}{3} b^2 c (s - s_1)^3 + \cdots \qquad \text{or}$$

(3.8) $$s-s_1=\{3b^{-2}c^{-1}(t-t_1)\}^{\frac{1}{3}}+\cdots\cdots$$

右辺のべき級数は $t<t_1$ のときも real。解 $(x_k(t), y_k(t))$ は，$\tau\leqq t<t_1$ にそって解析接続すれば，$t=t_1$ を2位の分岐点にもつ。$x_k(t)$ は局所座標 $s-s_1$ に関して正則，$y_k(t)$ は $y_k=\eta_k\eta^{-2}$ より $s-s_1$ に関して1位の極（高々）

$$y_k(t)=-b^{-1}c^{-1}\xi_{k1}(s-s_1)^{-1}+\cdots\cdots\qquad(k=1,2,3)$$

をもつ。よって $x_k(t)$，$y_k(t)$ は特異点 $t=t_1$ を越えて解析接続できる（real s-軸に沿って s_1 を越えて接続すればよい。このとき t は real かつ t_1 を越えて増加する）［終］

(3.7)，(3.8) から，$x_k(t)=-b^2\xi_{k1}(3b^{-2}c^{-1})^{2}(t-t_1)^{\frac{2}{3}}+\cdots\cdots$。
故に $t=t_1$ で2体 P_1, P_3 は衝突する。それから互に反射する $t>t_1$ が t_1 に十分近ければ $x>0$ かつ y は有限。(3.2) によって $(\xi,\eta)\rightarrow(x,y)$ にうつるとき，$t>t_1$ のときも解であることは，Eulerの10個の積分は，t の解析関数であるから，この解析接続において不変であることからわかる。故に

$$\underset{(k=1,\cdots,6)}{\xi_k'=F_{\eta_k},\ \eta_k'=-F_{\xi_k}}\Rightarrow\underset{(k=1,\cdots,6)}{x_k'=F_{y_k},\ y_k'=-F_{x_k}}\Rightarrow\underset{(k=1,\cdots,9)}{\dot{x}_k=E_{y_k},\ \dot{y}_k=-E_{x_k}}\Rightarrow\underset{(k=1,\cdots,9)}{\dot{q}_k=E_{p_k},\ \dot{p}_k=-E_{q_k}}$$

$t_1<t$ なる t をえらび，$\dot{q}_k=E_{p_k}$，$\dot{p}_k=-E_{q_k}$ の解は t まで接続されたものとする。この t を改めて τ とかき，解を $t>\tau$

の方向へ解析接続するとき有限な時刻 $t=t_2$ において特異点に出会うならば，ふたたび 2体は衝突しなければならない。(角運動量定数は すべては 0でないと仮定している!)
このとき衝突は P_1とP_3との間で起るかどうかは わからない。同じような Sundman 変換を行えば 解は t_2 を越えて接続できる。この方法で 特異点の列 $\{t_n\}$ を得る。

● $\{t_n\}$ は 有限な点 t_∞ には集積しない。

[証明の方針] U は各 t_n において無限大となる。かつ $t \to t_\infty$ のとき $U \to \infty$。もし $U \leqq A < \infty$ ならば Cauchy の存在定理により 解は $t=t_\infty$ において正則，故に n が十分大であれば t_n は解の正則点となり，これは矛盾である。
よって $t \to t_\infty$ のとき，$\min\{r_{12}, r_{23}, r_{31}\} \to 0$.
$\frac{1}{2}\ddot{I} = U + 2h$ より，

$$\ddot{I} > 0 \quad \exists t_0 \leqq t < t_\infty, \quad \ddot{I} = \infty \quad at \ \forall t_n$$

p.7 で説明したように $\dot{I}$ は各 t_n の左側で連続かつ増加，有限な limit をもつ。同じことが t_n の右側でもいえるから，$\dot{I}$ は $t_0 \leqq t < t_\infty$ で 連続，増加，有界な関数である。
よって I は $t_0 \leqq t < t_\infty$ で正の下界をもつ。辺のどれか一つ，r_{13} は 0 に近づき，残りの二つは 或る正の数より大きい。
t_0 を適当にとれば，$t_0 \leqq t < t_\infty$ における衝突は P_1 と P_3

なる特定の2体間でのみ起ることになる。したがってSundmanの変換をただ一回だけ行なうことにより この区間内の無限回の衝突における解の行動がわかる。よって

$$\lim_{t\to t_\infty} \xi = \lim xy^2 = \frac{2(m_1 m_3)^2}{m_1+m_3} > 0.$$

特異点 t_n に対応して $s_n = \int_{t_0}^{t_n} \frac{dt}{x(t)}$, かつ $s_\infty = \int_{t_0}^{t_\infty} \frac{dt}{x(t)}$ は収束する。よって $\{s_n\}$ は有限な s_∞ に収束する。ところが $x(s)$ は各 s_n, および s_∞ において正則かつ s_n は $x(s)$ の zeros である。故に $x(s)\equiv 0$. 矛盾 [終]

$t \geqq \tau$ および $t \leqq \tau$ に対して解析接続できる。

§4 Sundman の定理

Sundman は一つの新しい変数 ω を導入して, 時間 t および 9つの座標 $q_1,\dots,q_9$ を単位円の内部 $|\omega|<1$ で ω の正則な関数によって表現した。このとき real t 軸には $-1<\omega<1$ を対応させる。

証明の方針はつぎの通り。Sundmanの変換において, 独立変数 s は衝突する2体間の距離 x に depend する。したがって二つの質点は変換のたびにつねに区別されているから 独立変数の変換は, 3体に関して対称性をもたない。ところが, 2体 P_1, P_3 が時刻 t_1 において衝突すると仮定すれば; $t\to t_1$

(特異点)のとき, $U \approx m_1 m_3 x^{-1}$ となるから, x^{-1}の代りに U をとって

$$s = \int_\tau^t U\,dt$$

を独立変数にとれば, どの2体が衝突してもこの s はまえの s と同じ役目をするであろう. $t \to \pm\infty$ のとき $s \to \pm\infty$ となるように

$$s \equiv \int_\tau^t (U+1)\,dt$$

を, Sundman 変換における独立変数にとる. real s-line 上の任意の点 s_0 に対し, s_0 を中心とする或る円板 K_0 が対応して, 時間 t および 9つの座標 $q_1, \dots, q_9$ は K_0 で一様収束する $s - s_0$ のべき級数で表現される.

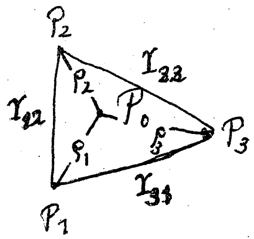
$$G_0 \equiv \bigcup_{s_0} K_0$$

は単連結領域かつ real s-line を含む. Riemann の写像定理によってこれを ω-平面内の単位円板の内部へ写像する. ただし real s-line は $-1 < \omega < 1$ に写像する. これで ω の存在はわかる. しかし ω を構成するためには, K_0の半径 ρ_0 は, $-\infty < s_0 < \infty$ において, 正の下限をもつことを証明する必要がある. Sundman は次の二つの lemmas を証明した.

● Sundman's first lemma 三つの角運動量 consts のすべては 0 でないとすれば, 3体によってつくられる 3角形の周

長は，任意の時刻において，ある正の数より大きい。すなわち 周長の，$-\infty<t<+\infty$ における，下限は正.

[証明の方針] むづかしい計算をしなければならない. P_0を重心，



$\sigma \equiv r_{12}+r_{23}+r_{31}$ とおく.

$\rho_j+\rho_k \leqq r_{jl}+r_{lk}$, $r_{jk} \leqq \rho_j+\rho_l$

$$\therefore \quad \rho_1+\rho_2+\rho_3 \leqq \sigma \leqq 2(\rho_1+\rho_2+\rho_3)$$

一方

$$I \equiv \sum_1^3 m_k\rho_k^2 \leqq \mu\sum_1^3 \rho_k^2 \leqq \mu\sigma^2, \quad \mu=\max_1^3 m_k.$$

また

$$\frac{\sigma^2}{4} \leqq (\rho_1+\rho_2+\rho_3)^2 = \Big(\sum_1^3 \sqrt{m_k}\,\rho_k\cdot\sqrt{m_k}^{-1}\Big)^2 \leqq I\cdot\sum_1^3 m_k^{-1}.$$

よって I は 上と下から押えられる. ところで σ の，$-\infty<t<\infty$ における下限が正であることを示すには，

$$I \geqq \exists\, c>0, \quad -\infty<t<\infty$$

を証明すればよい。 h (エネルギ定数) $\geqq 0$ のときは I は convex となるから，c の存在の証明は比較的やさしいが，$h<0$ のときは I は convex でないから，その証明は terribly hard (6頁). [終]

● Sundman's second lemma. 三つの角運動量 consts のすべては 0 でなければ，3角形の最短 side の反対側にある質点（衝突しない質点）の速度は，任意の時刻において，ある

正の数より小さい, 速度の, $-\infty<t<\infty$ における上限は有限.

● Sundman's 定理.

$I(\tau)<A,\ U(\tau)<A,\ |h|<A,\ \eta^{-1}<A,\qquad \eta\equiv\frac{1}{3}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$

ならば, 質量 m_1, m_2, m_3 と A のみに関係して定まる $\exists\,\delta>0$ が存在して, 時間 t と3体の 9つの座標 $q_1, \dots, q_9$ とは $-\delta<\nu<\delta$ で正則な $s=\sigma+\sqrt{-1}\,\nu$ の解析関数によって表現される. とくに

$$\sigma = \mathrm{real}\, s = \int_\tau^t (U+1)\,dt .$$

Band $-\delta<\mathrm{Im}\, s<\delta$ を, (実軸は実軸の部分に対応するように) 単位円 $|\omega|<1$ に写像する関数 ω は

$$\omega = \left(e^{\frac{\pi s}{2\delta}}-1\right)\Big/\left(e^{\frac{\pi s}{2\delta}}+1\right)$$

で与えられる.

衝突は, $-1<\omega<1$ における $\frac{dt}{d\omega}$ の零点を計算すればよい。任意の二つの衝突は或る正の時間間隔をおいて起る, (すなわち $t_n-t_{n-1}\geq K>0$, K は A と質量とのみから定まる量).

[証明の方針] 独立変数を t から $s=\int_\tau^t (U+1)\,dt$ にかえる. 3体の質量と定数Aのみによって定まる $\exists\, B\geq$

$A+1$ があって，任意に s_1 を固定するとき，

$$U \leqq B \quad at \quad s=s_1 \qquad\qquad U>B \quad at \quad s=s_1$$

であるかによって証明を別々におこなう。あとの場合は s_1 で2体が衝突する場合を cover する。

$U \leqq B$ at $s=s_1$. s を独立変数にとれば，(2.1) より

$$\begin{cases} q_k' = F_{p_k}, \quad p_k' = -F_{q_k} & (k=1,\cdots,9) \\ t' = \dfrac{1}{U+1} & \left(' = \dfrac{d}{ds}\right) \end{cases}$$

$$F = \frac{E-h}{U+1} = \frac{T-U-h}{U+1} = \frac{T-h+1}{U+1} - 1$$

証明の要点は，3体の質量と A のみに関係して定まる量 $^\exists b>0$ があって，F, $(U+1)^{-1}$ は複素領域

$$|q_k - q_k(s_1)| < b, \quad |p_k - p_k(s_1)| < b$$

において正則しかも不等式 $|T| < b_1$, $|U+1| < 4$ が成り立つことを示すことである。ここで $q_k(s_1)$, $p_k(s_1)$ は任意の real な初期値，b_1 は3体の質量と A のみに関係する量。このことがわかれば Cauchy の存在定理から，

$q_k(s)$, $p_k(s)$, $t(s)$ および相互距離 $r_{k\lambda}(s)$ は複素領域 $|s-s_1| < {}^\exists b_5$ で正則になる。b_5 も質量と A のみに関係し，初期値および s_1 の値には無関係な量。

$\bar{U} > B$ at $s = s_1$。 Sundman の変換をおこなって得られた方程式(3.6)を考える.

$$\xi_k' = F_{\eta_k}, \quad \eta_k' = -F_{\xi_k} \qquad (k=1,2,\dots,6)$$

$$t' = \frac{1}{\bar{U}+1} \qquad \left(' = \frac{d}{ds} \right),$$

$$F = \frac{xT + (1-h)x}{x\bar{U}+x} - 1, \quad \frac{1}{\bar{U}+1} = \frac{x}{x\bar{U}+x}$$

ここで $x = r_{13} = \xi\eta^2$. $x, xT, (x\bar{U}+x)^{-1}$ を ξ_k, η_k (12 個) の関数と考える. 証明の要点は, $xT, x, (x\bar{U}+x)^{-1}$ は 複素領域

$$|\xi_k - \xi_k(s_1)| < C_{49}^{-1}, \quad |\eta_k - \eta_k(s_1)| < C_{49}^{-1} \quad (k=1,\dots,6)$$

で 正則 かつ 不等式

$$|xT| < C_{46}, \quad |x| < C_{47}, \quad \frac{1}{2m_1m_3} < |x\bar{U}+x|^{-1} < \frac{2}{m_1m_3}, \quad |F| < C_{51}$$

が満足される ことを示すことである. C_{49}, C_{47}, C_{51} は3体の質量と A のみに関係して定まる正量, $\xi_k(s_1)$, $\eta_k(s_1)$ は任意の real 初期値. このことがわかれば 方程式の解 $(\xi_k(s), \eta_k(s), t(s))$ は $|s-s_1| < C_{52}^{-1}$ で 正則となる. C_{52} は質量と A のみに関係する 正量. したがって $q_k(s), t(s), x_{k\lambda}(s)$ は 複素領域 $|s-s_1| < C_{52}^{-1}$ において 正則となる. よって定理の δ は $\delta = \min(b, C_{52}^{-1})$ で与え

られる.

写像関数 ω の存在は ほとんど明かであろう. つぎに K の存在を示す。 $s=s_1$ で衝突が起れば

$$\eta_k=0\ (k=1,2,3),\quad (\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)^{\frac{1}{2}}=C\equiv\frac{2(m_1m_3)^2}{m_1+m_3}>0. \qquad at\ s=s_1$$
$$x=\xi\eta^2=0,\qquad x\,U=m_1m_3$$

$F_{\xi_k}=C^{-1}\xi^{-1}\xi_k$ at $s=s_1$ となる. 座標軸を回転して $\xi=\xi_1$ at $s=s_1$ と仮定できる. さて Cauchy 積分公式により

$$\left|\,F_{\xi_1}-F_{\xi_1}(s_1)\,\right|<\frac{1}{2C}\qquad \text{in}\ |\xi_k-\xi_k(s_1)|<C_{55}^{-1},\ |\eta_k-\eta_k(s_1)|<C_{55}^{-1}$$

C_{55} は 質量と A のみから定まる量で C_{49} より大きい. $F_{\xi_1}=C^{-1}$ at $s=s_1$ であるから,

$$F_{\xi_1}>\frac{1}{2C}\qquad \text{for}\ |s-s_1|\leqq C_{56}^{-1}<C_{52}^{-1}.$$

C_{56} は 質量と A のみに関係.

故に $\quad |\eta_1|=\left|\int_{s_1}^{s}F_{\xi_1}ds\right|\geq\frac{1}{2C}|s-s_1|.$ また C_{49} をきめるとき, $\frac{1}{4}C<|\xi|<2C$ for $|s-s_1|<C_{49}^{-1}<\frac{C}{10}$ も満足されている(自明ではない)から, $\xi>\frac{C}{4}$, よって

$$x=\xi\eta^2\geqq\frac{1}{16C}(s-s_1)^2,\quad \frac{1}{U+1}=\frac{x}{Ux+x}\geqq\frac{1}{32Cm_1m_3}(s-s_1)^2.$$

故に

$$|t-t_1|=\left|\int_{s_1}^{s}\frac{ds}{U+1}\right|\geqq\frac{1}{3}C_{57}^{-1}|s-s_1|^3,\quad C_{57}=32Cm_1m_3,$$
$$\text{for}\ s_1-C_{56}^{-1}\leqq s\leqq s_1+C_{56}^{-1}.$$

このことから, real t 軸上で, 時刻 t_1 の前後 $\frac{1}{3}C_{57}^{-1}C_{56}^{-3}$ 時間内では $x=0$ となり得ない。 よって $K=\frac{1}{3}C_{57}^{-1}C_{56}^{-3}$. [終]

§5 Siegelの予想

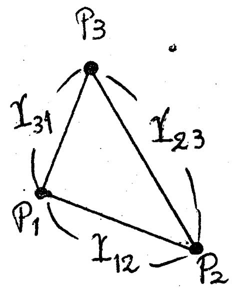
2体 P_1, P_3 が衝突するとき，新しい座標 ξ_k, η_k と s とを導入すれば，衝突の s-時刻 s_1 の近傍で ξ_k, η_k は $s-s_1$ の収束べキ級数で表現される。このとき p.16 で説明したように

(5.1) $\xi(s_1)=2(m_1m_3)^2/(m_1+m_3)$, $\eta_1(s_1)=\eta_2(s_1)=\eta_3(s_1)=0$.

ここで $\xi=(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)^{\frac{1}{2}}$. 条件(5.1)のみを満足する12個のreal初期値 $\xi_k(s_1)$, $\eta_k(s_1)$, $k=1,\dots,6$ を与える. Hamiltonian functio F はこれらの値で 0 となる. $\xi_k'=F_{\eta_k}$, $\eta_k'=-F_{\xi_k}$ $(k=1,\dots,6)$ の解に対して恒等的に 0。もとの変数 $q_k, \dot{q}_k$ $(k=1,\dots,9)$ にもどれば対応する解は衝突の軌道となる. このときのエネルギー定数は h で，F のなかに linear にはいっている. よって12の初期値とパラメーター h とは4個の解析的条件(5.1)をみたす，衝突軌道はもと9個のパラメーターを含む. 故に10個の独立なパラメーターを含む. 解はこれらのパラメーターの解析関数となる。重心は 0 にあるという条件を除けば，あと6個パラメーターがふえる。よって衝突の軌道は，$(q_k, \dot{q}_k)$ $k=1,\dots,9$ から成る18次元空間内の16次元の解析多様体をつくる. もう二組の衝突の場合があるから，全部で三つのそのような多様体がある。これら三つの多様体の in the large における構造は？ Siegelの書物には，これらは18次元空間内で dense な集合をつくることが想像される，と書かれている. 果して？ Lebesgue測度が 0 であることは知られている.

§6 3体衝突におけるSundmanの結果

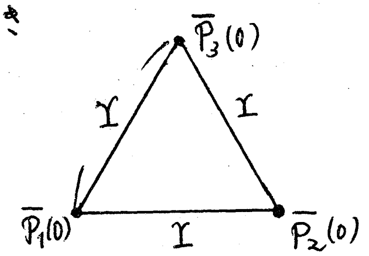
時刻 t_1 において衝突が起るものとする. t の代りに t_1-t をとれば, 衝突は $t=0$ において起ることになる. 3体同時衝突が起るときは, 3体は或る固定された平面内になければならないから, その平面を $z=0$ にとる.

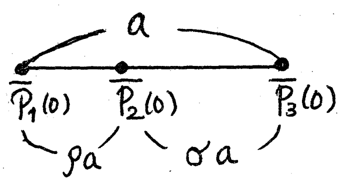


$$\bar{q} \equiv q\,t^{-\frac{2}{3}}, \quad \bar{p} = p\,t^{-\frac{2}{3}}$$
$$\bar{r}_{kl} \equiv r_{kl}\,t^{-\frac{2}{3}}$$

とおく. Sundmanは次の結果を得た.

● $t \to 0$ のとき, $\bar{r}_{kl}$ は有限確定値に近づき, 座標が q の代りに $\bar{q}$ であるものを $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ とおけば $t \to 0$ のとき





$\Delta \bar{P}_1\bar{P}_2\bar{P}_3$ は極限において正三角形になるか直線になるかのどちらかである. このとき

$$r \equiv \lim \bar{r}_{kl} = \sqrt[3]{\frac{9}{2}(m_1+m_2+m_3)}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{2}{9}a^3 &= m_1 + m_2\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\sigma^2}\right) + m_3, \\ \frac{2}{9}\sigma a^3 &= m_1\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right) + m_2\frac{1}{\sigma^2} + m_3\frac{1}{\sigma^3}\end{aligned}\right. \qquad (\rho+\sigma=1).$$

がなりたつ．　a を消去すれば

$$m_1\sigma^2(\rho^3-1)+m_2(\rho^3-\sigma^3)+m_3\rho^2(1-\sigma^3)=0.$$

この方程式は　$\rho<1$　なるただ一つの正根をもつ．　したがって　長さ a が定まる．

計算は極めて初等的であるが，ながくなるから証明は省略する．

さて　3体問題の特殊解は，任意質量に対しては，Lagrange による正三角形解と Euler による直線平衡解 の2種類だけであることはよく知られている！

3体衝突のときは　解は接続不可能であることが Siegel によって証明されている．確定特異点型の方程式に変換したとき，いわゆる固有値が irrational (or complex) になるか，rational になれば必ず対数項があらわれるという事実から，衝突時刻をこえては接続できないことが結論される．

以上が，Siegel の天体力学の衝突にかんする部分の紹介である．