数理解析研究所講究録
第176巻 1973年 105-128

解の一様安定性と概周期性

東北大 理 中島文雄

§1. まえがき

概周期系における解の安定性と概周期性との関連について，多くの人々により研究されて来た。特に周期系では次の結果が知られている[5]，

周期系において，一様安定かつ有界な解が存在すれば，概周期解が存在する。

以下，上の問題が概周期系でも成立するかという事を考えよう。先ず，上の結果は一般の概周期系では成立しない。即ち，ある3次元の非線型系では，一様安定かつ有界な解は存在するが，概周期解は存在しない。この事は§6で述べる。しかし，特殊な場合，例えば線型系や一次元の系では成立する。この事は§3～§5で述べる。又上の結果は，Favard[1]，[2]，Opial[3]の諸定理と密接に関連している。

§2 . 記号と定義 .

R^nをn次元ユークリッド空間とし，$R^1=R$と表す。$x\in R^n$に対し，$|x|$でそのユークリッドnormを示す。A，Bを位相空間とした時，C(A,B)でAからBへの連続関数の全体を表す。

次の微分方程式系を考える

$$(*)\quad \frac{dx}{dt}=f(t,x)\ ,$$

ここで，$t\in R$，$x\in R^n$ かつ $f(t,x)\in C(R\times R^n;R^n)$である。(*)の解で，$(t_0,x_0)\in R\times R^n$を通る任意の解を$x(t,t_0,x_0)$と表し，$x(t,t_0,x_0)$がすべての$t\in R$で定義されている時，

$\sup_{t\in R}|x(t,t_0,x_0)|<\infty$ ならば "有界(on R)"，

$\sup_{t\geqq 0}|x(t,t_0,x_0)|<\infty$ ならば "有界($t\geqq 0$)"

と表す。

(*)の解$x(t)$ (defined on R)に対し，2種類の安定性を定義し更に，それらが独立な概念であることを示す．

定義1．$x(t)$が一様安定(uniformly stable)であるとは，$\forall \varepsilon>0$に対し，$\delta=\delta(\varepsilon)>0$が定り$|x(t_0)-x_0|<\delta$ for some $t_0\in R$ならば

$$|x(t)-x(t,t_0,x_0)|<\varepsilon \quad \text{for } t\geqq t_0.$$

定義2．$x(t)$がFavardの意味で安定とは，$\forall \varepsilon>0$に対し，$\delta=\delta(\varepsilon)>0$が定り，$|x(0)-x_0|<\delta$ならば，

$$|x(t)-x(t,0,x_0)|<\varepsilon \quad \text{for all } t\in R.$$

特に，定義2において$x(t)$が有界(on R)ならば，$x(t,0,x_0)$も有界(on R)となり，有界な解は唯一つではない。以下，簡単のため一様安定，Favardの意味での安定を，各々u.s，F-安定と略記する。

u.sがF-安定を意味しない例を述べる。

$$(**) \quad \frac{dx}{dt}=\alpha(t)x,$$

ここで，x，$t\in R$で$\alpha(t)$は概周期関数で，負値とする。すると(**)の0-解はu.sであるが，有界(on R)な解は0-解唯一つしかないから，F-安定ではない。

次に，F-安定がu.sを意味しない例を述べる。
Favardの結果[1, p48]によれば，ある概周期関数$\alpha(t)$が存在して，これに対し(**)を考えると，その任意の解$x(t, t_0, x_0)$は有界(on R)となる。従って，0-解はF-安定である。他方，次の事も成立する

$$\inf_{t\leq 0}|x(t, t_0, x_0)| = 0.$$

従って，0-解はu.sではない。

最後に，概周期関数$f(t)$に対し，関数族$H(f)$を定義する。

定義3.

$$H(f) = \{ g(t) ; f(t+t_k) \to g(t) \quad \text{as } k\to\infty$$

uniformly on R for some sequence $\{t_k\}\}$.

$H(f)$をfのclosed hullと呼ぶ。

§3. 線型概周期系.

我々の目的とする結果は定理3.1である。実は，その定理の仮定はFavardの定理の仮定の特殊な場合となっていることを示す。この事により，u.sは後者の定理の仮定の具体例として捉えられる。

次の線型概周期系を考える

(3.1) $$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t),$$

ここで $t\in R$, $x\in R^n$, 又 $A(t)$ は $n\times n$ 行列, $f(t)$ は n-vector で, その成分は概周期関数とする。

定理 3.1. 系(3.1)が u.s な有界な解 ($t\geq 0$) を持てば, 系(3.1)は概周期解を持ち, その module は $A(t)$ と $f(t)$ の module の和に含まれる.

Favard は次の結果を示している [1, P59].

定理 3.2. $A(t)$ の closed hull $H(A)$ の任意の元 $B(t)$ に対し, 次の系を考える

(3.2) $$\frac{dx}{dt} = B(t)x.$$

系(3.2)の有界な解 (on R) $x(t)$ は 0-解でないならば

$$\inf_{t\in R} |x(t)| \neq 0$$

と仮定する。このとき, 系(3.1)が有界な解 ($t\geq 0$) を持てば, 系(3.1)は概周期解を持ち, その module は $A(t)$ と $f(t)$ の module の和に含まれる。

以下、定理3.1の仮定は定理3.2の仮定を意味することを示す。　系(3.2)の有界な解(on R)で一次独立なものの次元を $m\ (\leqq n)$ とする。その一組みを $\{x_j(t)\}_{j=1}^{m}$ で表す。$B(t)$ の概周期性より数列 $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ が存在して，$k \to \infty$ の時，

$$t_k \to -\infty \ , \quad \text{かつ} \quad B(t+t_k) \to B(t)$$

$$\text{uniformly on } R$$

となる。他方，$x_j(t)$ の有界性から $\{x_j(t+t_k)\}_{k=1}^{\infty}$ は R の任意のcompact set上で一様収束すると仮定して良い。その極限を，各々 $y_j(t)$ とすると，$y_j(t)$ は系(3.2)の有界な解となる。$\{y_j(t)\}_{j=1}^{m}$ が一次独立であることを示す。

ある定数 $\{c_j\}_{j=1}^{m}$ に対して

$$\sum_{j=1}^{m} c_j y_j(0) = 0$$

とする。

$$\sum_{j=1}^{m} c_j x_j(t_k) \to 0 \quad \text{as } t_k \to -\infty$$

となる。今，$\sum_{j=1}^{m} c_j x_j(t)$ は系(3.2)の解であり，その0-解

も、やはりu.s であるので

$$\sum_{j=1}^{m} c_j x_j(t) \equiv 0 \text{。}$$

すると $\{x_j(t)\}_{j=1}^{m}$ の一次独立性より

$$c_1 = \cdots = c_m = 0 \text{。}$$

従って、$\{y_j(t)\}_{j=1}^{m}$ の一次独立性が示された。故に、系(3.2)の有界な解(on R) $x(t)$ は

$$x(t) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j y_j(t) \quad \text{for some constants } \{\lambda_j\}$$

と表わされる。今、$x(0) \neq 0$ とすると、

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_j(t_k) \longrightarrow x(0) \qquad \text{as } t_k \to -\infty$$

であるから、ある正数 $\varepsilon > 0$ が取れて、十分大なる k_0 に対し

$$\left| \sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_j(t_{k_0}) \right| \geq \varepsilon > 0 \text{。}$$

系(3.2)の0-解はU.Sであるから，ある$\delta'>0$が存在して

$$\left|\sum_{j=1}^{m}\lambda_j x_j(t)\right| \geq \delta' > 0 \quad \text{for } t \leq t_{k_0}.$$

故に，$\forall t \in R$に対して

$$\left|\sum_{j=1}^{m}\lambda_j y_j(t)\right| = \lim_{t_k \to -\infty}\left|\sum_{j=1}^{m}\lambda_j x_j(t+t_k)\right| \geq \delta'.$$

従って

$$|x(t)| \geq \delta' \quad \text{for all } t \in R.$$

これで，定理3.2の仮定が導かれた。

§4. 一階単独の概周期系.

次の一階単独の概周期系を考える

$$(4.1)\qquad \frac{dx}{dt} = f(t, x) \qquad (n=1),$$

ここで $t, x \in R$, $f(t,x) \in C(R\times R; R)$ で, $f(t,x)$ は $x \in R$ に対し一様に t の概周期関数であり, 次の意味でリプッッツ条件を満すとする, 即ち, $^{\forall}M > 0$ に対し, 定数 $L = L(M) > 0$ が存在して

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leqq L|x-y| \quad \text{for } t \in R,\ |x|, |y| \leqq M.$$

である. 系(4.1)における概周期解の存在について次の結果が知られている。

定理4.1, [3]. 系(4.1)において $f(t,x)$ は x について単調減少(あるいは増加)とする。このとき系(4.1)が有界な解(on R)を持てば, それは概周期解であり、その module は $f(t,x)$ の module に含まれる。

定理4.2 [2] 系(4.1)において有界な解(on R) $x(t)$ が存在して，$x(t)$ は T-安定で，更に $x(0)$ は[注, 4.1]の意味で単調な点とする。このとき，$x(t)$ は概周期解であり，そのmodule は $f(t,x)$ の module に含まれる。

[注, 4.1]

(i) $f(t,x)$ が x について単調減少とは，$x \geqq y$ ならば

$$f(t,x) \leqq f(t,y) \quad \text{for all } t \in R$$

となることである。単調増加も同様に定義する。

(ii) $x(0)$ が単調な点であるとは，${}^{\forall}x_0 \in R$ に対し

$$M(x_0) = \sup_{t \in R} x(t, 0, x_0)$$

$$m(x_0) = \inf_{t \in R} x(t, 0, x_0)$$

とするとき，$x_0 < x(0) < y_0$ ならば

$$M(x_0) < M(x(0)) < M(y_0)$$

かつ

$$m(x_0) < m(x(0)) < m(x_0) \quad 。$$

[注,4.2] 定理4.1の仮定は特殊な場合を除いて定理4.2の仮定を意味する。特殊な場合とは，系(4.1)が有界な解(on R)を唯一つしか持たない場合である。その場合，概周期解の存在は明らかである。

我々は定理4.1，4.2を次の定理に統一できる。

<u>定理4.3</u>、<u>もし系(4.1)がu.sな有界な解(on R)を持てば</u>，<u>それは概周期解であり</u>，<u>そのmoduleは$f(t,x)$のmoduleに含まれる。</u>

定理4.3の略証は次の§で述べる。定理4.1，4.2，4.3の関連について述べる。先づ，定理4.1の仮定から定理4.3の仮定が導かれることは明らかである($f(t,x)$が単調増加の時は，時刻tを負の向きに考えれば良い)。次に定理4.2の仮定が定理4.3の仮定を意味することを示す。

<u>定理4.4.</u>　<u>定理4.2における解$x(t)$はu.sである。</u>

証明には次の補題が必要である。

補題．定理4.2の解 $x(t)$ に対し次の事が成立する，

$\forall\varepsilon>0$ に対し $\delta'=\delta'(\varepsilon)>0$ が存在して，ある $t_0\in R$ で

$|x(t_0)-x_0|<\delta'$ ならば

$$(4.2)\qquad |x(0)-x(0,t_0,x_0)|<\varepsilon\,.$$

補題の証明を行う。$x(t_0)>x_0$ の場合を示す。$x(t_0)<x_0$ の場合も同様である．Favard は次の事を示している［2, P93］

有界な解 $y(t)\,(\neq x(t))$ に対し

$$(4.3)\qquad \inf_{t\in R}|x(t)-y(t)|\neq 0\,.$$

$x(t)$ の下-安定性より，$x(0)$ の十分近くに $x_1<x(0)$ を取ると $x(t,0,x_1)$ は有界（on R）で，更に(4.3)より定数 $\gamma>0$ が存在して

$$x(t,0,x_1)+\gamma<x(t)\quad \text{for all } t\in R\,.$$

$\delta(\varepsilon) < \delta'$ と取ると，ある $t_0 \in R$ で

$$0 < x(t_0) - x_0 < \delta'$$

ならば，$x(t, t_0, x_0)$ は ${}^\forall t \in R$ で定義されて

$$x(t, 0, x_1) < x(t, t_0, x_0) < x(t) \quad \text{for all } t \in R.$$

今，補題が成立しないとすると，ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して，かつ自然数 k に対し，$t_k, x_k \in R$ が存在して

$$(4.4) \quad 0 < x(t_k) - x_k < \frac{1}{k}$$

かつ

$$\varepsilon_0 < x(0) - x(0, t_k, x_k)\,.$$

系(4.1)の解 $y(t)$ で，$y(0) = x(0) - \frac{\varepsilon_0}{2}$ なるものを考えると，(4.3)より，$\varepsilon_1 > 0$ が取れて

$$y(t) < x(t) - \varepsilon_1 \quad \text{for all } t \in R$$

かつ，

$$x(0, t_k, x_k) < y(0)$$

であるから

$$x(t,t_k,x_k) < y(t) \quad \text{on } R \text{。}$$

従って，

$$x(t,t_k,x_k) < x(t)-\varepsilon_1 \quad \text{on } R.$$

$t=t_k$ とおくと，

$$\varepsilon_1 < x(t_k)-x_k \text{。}$$

(4.4)より $\frac{1}{k} > \varepsilon_1$ となり，kは任意であるから矛盾。

以上で補題の証明は終る。次に定理4.4の証明を行う。

$\forall \varepsilon>0$に対し，$\delta'(\varepsilon)$を補題に現れた定数，$\delta(\varepsilon)$ を下-安定の定数とする。$\forall \varepsilon>0$ に対し，$\delta_0(\varepsilon)=\delta'(\delta(\varepsilon))$ と置くと，ある$t_0 \in R$で，$|x(t_0)-x_0|<\delta_0(\varepsilon)$ ならば補題より

$$|x(0)-x(0,t_0,x_0)|<\delta(\varepsilon) \text{。}$$

すると，$\mathcal{F}$-安定性より

$$|x(t)-x(t,t_0,x_0)|<\varepsilon \quad \text{on } R\text{。}$$

従って，$x(t)$ は u.S である。証明を終る．

§5．定理4.3の証明．

定理4.3の証明を述べる。証明の前半は本質的に［2］あるいは［3］の議論に依る。

系(4.1)において，与えられた u.S な有界な解 (on R) を $\varphi(t)$ とする。$^{\forall} g\in H(f)$ に対し次の系を考える

$$(5.1) \qquad \frac{dx}{dt}=g(t,x)\text{。}$$

(5.1)の解のある集合 $\mathcal{F}(g)$ を定義する，

$\mathcal{F}(g)\ni x(t)$ とは，ある数列 $\{t_k\}$ が存在して
$k\to+\infty$ の時，

$$f(t+t_k,x)\to g(t,x) \quad \text{uniformly on } R\times[a,b]$$

$$\varphi(t+t_k) \longrightarrow x(t) \quad \textit{uniformly on any compact set in } R.$$

ここで

$$a = \inf_{t\in R} \varphi(t) \ , \quad b = \sup_{t\in R} \varphi(t) .$$

すると $\mathcal{F}(g)$ は広義一様収束の意味で compact となり，その元はすべて U.S となる。

$\mathcal{F}(g)$ の minimal solution を定義する，

$$h = \inf \{ M(x(0)) - m(x(0)) \ ; \ x(t) \in \mathcal{F}(g) \}$$

と置く。ここで $M(x(0))$, $m(x(0))$ は［注, 4.1］の記号である。今、相空間は一次元であり，かつ $\mathcal{F}(g)$ は compact であるから、ある $x(t) \in \mathcal{F}(g)$ が存在して

$$M(x(0)) - m(x(0)) = h$$

となる。このような $x(t)$ の中で $m(x(0))$ が最小なものを $\mathcal{F}(g)$ の minimal solution と呼ぶ。$\mathcal{F}(g)$ の元は U.S であるから minimal solution は唯一つしか存在しない。それ故に、

次の事が知られる。$\mathcal{F}(f)$のminimal solution $\psi(t)$に対し、次の条件を満す任意の数列$\{t_k\}$を考える

$k \to +\infty$ の時，

$$f(t+t_k, x) \to g(t, x) \quad \text{uniformly on } R \times [a, b]$$

かつ

$$\psi(t+t_k) \to \psi^*(t) \quad \text{uniformly on any compact set in } R.$$

すると，$\psi^*(t)$は$\mathcal{F}(g)$のminimal solutionとなる。

これは$\{\psi(t+t_k)\}$の正規性を意味する。従って$\psi(t)$の概周期性が示されたことになる。

最後に $\varphi(t) \equiv \psi(t)$ を示す。仮りに$\varphi(0) > \psi(0)$とする。($\psi(0) > \varphi(0)$の場合も同様である)。$\varphi(t)$のu.s より$\varepsilon > 0$が存在して

$$(5.2) \qquad \varphi(t) > \psi(t) + \varepsilon \quad \text{for } t \leq 0.$$

他方，$\psi(t) \in \mathcal{F}(f)$ より

$$a \leqq \psi(t) \leqq b \quad \text{on } R.$$

$$\delta = \inf_{t \in R} (\varphi(t) - \psi(t)) \geqq 0$$

と置くと，

$$\inf_{t \in R} \varphi(t) \geq \delta + \inf \psi(t) 。$$

従って，　$a \geqq \delta + a$　となり，$\delta = 0$ が結論される。故に，

$$\inf_{t \in R} (\varphi(t) - \psi(t)) = 0$$

であるが，(5.2)より

$$\inf_{t \geq 0} (\varphi(t) - \psi(t)) = 0 \quad 。$$

$\varphi(t)$ の u.s より

$$(5.3) \quad \lim_{t \to \infty} (\varphi(t) - \psi(t)) = 0 \quad 。$$

今，数列 $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ とある関数 $\varphi^*(t)$ が取れて，$k \longrightarrow +\infty$ の時

$$s_k \to -\infty,$$

$$f(t+s_k, x) \to f(t,x) \quad \text{uniformly on } R\times[a,b].$$

$$\psi(t+s_k) \to \psi(t) \quad \text{uniformly on } R$$

$$\varphi(t+s_k) \to \varphi^*(t) \quad \text{uniformly on any compact set in } R.$$

すると $\varphi^*(t)\in\mathcal{F}(f)$となり，(5.2)より

$$(5.4) \qquad \varphi^*(t) \geqq \psi(t)+\varepsilon \quad \text{for all } t\in R.$$

(5.3)より

$$(5.5) \qquad \varphi^*(t) > \varphi(t) \quad \text{for all } t\in R.$$

(5.5)より，ある$\delta'>0$が取れて

$$(5.6) \qquad \varphi^*(t) \geqq \varphi(t)+\delta' \quad \text{for } t\leqq 0.$$

他方，$b=\sup_{t\leq 0}\varphi(t)$ か $b=\sup_{t>0}\varphi(t)$ であるが

前者の場合は，(5.6)に矛盾する。後の場合は(5.5)より

$$b = \overline{\lim_{t\to\infty}}\, \varphi(t)$$

となり，(5.3)より

$$b = \overline{\lim_{t\to\infty}}\, \psi(t) \quad .$$

すると(5.4)より

$$b \geqq \sup_{t\in R} \varphi^*(t) \geqq \sup_{t\in R} \psi(t) + \varepsilon = b + \varepsilon \quad .$$

これは $\varepsilon > 0$ に矛盾する。以上で $\varphi(t) \equiv \psi(t)$ が証明された。

[注，5.1]　定理4.3の仮定において解の一様安定性が満せないことは，Opialの例[4]から知られる。

§6．概周期解を持たない概周期系。

次の概周期系を考える。

$$(6.1)\begin{cases} (イ)\cdots\cdots\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\alpha(t)y \\ \dfrac{dy}{dt} = \alpha(t)x \end{cases} \\ (ロ)\cdots\cdots \dfrac{dz}{dt} = \begin{cases} 1-(x^2+y^2) & \text{for } x^2+y^2 \leqq 1 \\ 0 & \text{for } x^2+y^2 > 1, \end{cases} \end{cases}$$

ここで $$\alpha(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right).$$

次の事が成立する。系(6.1)は u.S な有界な解(on R)は持つが概周期解は持たない。

先づ，(イ)は 0－解以外に概周期解を持たないことを示す、系(イ)において，$x+iy=w\in\mathbb{C}$ とおくと(イ)は次の方程式と同値である

$$\frac{dw}{dt} = i\alpha(t)w \qquad (i=\sqrt{-1})$$

この基本解は

$$(6.2)\qquad w(t) = \exp\left(i\int_0^t \alpha(s)ds \right).$$

Favard は次の事を示している。

(6.2) が概周期的である必要十分条件は

$$\int_0^t \alpha(s)ds = ct + \text{概周期関数}$$

の形に表現されることである。ここで c は $\alpha(t)$ の平均値である。

今の場合、$\alpha(t)$ の平均値は 0 であり ($c=0$), その積分は非有界であるから上の事は成立しない。即ち (6.2) は概周期的ではない 従って (イ) は 0-解以外に概周期解を持たない。

次に (6.1) は概周期解を持たない事を示す。もし (6.1) が概周期解 $\{x(t), y(t), z(t)\}$ を持てば, $\{x(t), y(t)\}$ は (イ) の概周期解となるから $x(t) = y(t) = 0$ on R となる。すると (ロ) より

$$\frac{dz}{dt} = 1$$

となり, $z(t)$ の概周期性 (実は有界性) に矛盾する。

最後に，(6.1)の解 $\{x(t), y(t), z(t)\}$ で，

$$x^2(0) + y^2(0) > 1$$

なる解を考える。するとこの解に対し (6.1) は次の系となる。

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\alpha(t)y \\ \dfrac{dy}{dt} = \alpha(t)x \\ \dfrac{dz}{dt} = 0 \end{cases}$$

従って，$\{x(t), y(t), z(t)\}$ は有界 (on R) で，その十分近くから出る解に対し U.S である。

参考文献

[1]. J. Favard, Sur les équations différentielles linéaires á coefficients presque-periodiques, Act. Math., 51 (1928), 31-81.

[2]. ———, Sur les équations différentielles scalaires presque periodiques, Journ. de Math., 1964, (87-97).

[3]. Z. Opial, Sur les solutions presque-periodiques des équations differentielles du premir et du second ordre, Ann. Polon. Math., 7 (1959), 51-61.

[4]. ———, Sur une équation differentielle presque-periodique sans solution presque-periodique, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astron. Phys. 9 (1961), 673-676.

[5]. T. Yoshizawa, Some remarks on the existence and stability of almost periodic solutions, Stud. Appl. Math. 5.