数理解析研究所講究録
第 178 巻 1973 年 1-8

ある PBIBD に対するアソシエート・クラスの reduction

阪大・基工　景山三平

§1. 要約

いくつかの BIBD のクロネッカー積等で構成される l associate classes の PBIBD が，$l > l_1$ を満すある適当な正整数 l_1 に対して l_1 associate classes の PBIBD に reduce するための必要十分条件を与える。

§2. 序

v 個の処理を，それぞれ k $(2 \leqq k < v)$ 個のプロットから成る b 個のブロックに次の三条件を満すように配置するとき，この計画をパラメーター v, b, r, k, λ をもつ BIBD という：

(i) 各ブロックには，k 個の相異なる処理が施される．

(ii) 各処理は，すべて r 回反復して施される。

(iii) 相異なる二つの処理の組は，λ 回同じブロックで生起す

3.

この BIBD の incidence matrix $N=\|n_{ij}\|$ $(i=1,2,\cdots,v;\ j=1,2,\cdots,b)$ を

$$n_{ij}=\begin{cases}1, & i\text{-th 処理が } j\text{-th ブロックに施される}\\ 0, & \text{その他.}\end{cases}$$

と定義すれば，上の (i), (ii), (iii) は

$$\sum_{i=1}^{v} n_{ij}=k,\quad \sum_{j=1}^{b} n_{ij}=r,\quad \sum_{j=1}^{b} n_{ij}n_{i'j}=\lambda\ \ {}^{\forall}(i\neq i')$$

と示される。

更に，上記の v 個の処理の中に m class の association scheme が定義されているとき，条件(iii)の代りに次の

(iii)′ i-th associates である二つの相異なる処理の組は，λ_i 回同じブロックで生起する $(i=1,2,\cdots,m)$。

を仮定すれば，上記は PBIBD の定義を与えている。

ここで v 個の処理の中に m class の association scheme が定義されているとは，次の条件を満す関係が定義されているときをいう：

(a) 任意の二つの処理は，互いに 1-st, 2-nd, $\cdots$, m-th associates のいずれかである（各処理は，それ自身の 0-th associates である）。

(b) どの処理αも，n_i 個の i-th associates をもつ。ここで n_i は α に無関係な定数である。

(c) i-th associates である二つの処理 α, β に対して，α の j-th associates であり，同時に β の k-th associates であるような処理の個数は p^i_{jk} で，この数は 個々の組 (α, β) に無関係な定数である。

計画のクロネッカー積や reduced design は，Vartak [3] により association scheme を明白には考えずに扱われた。ある PBIBD のパラメーターをもつ配置が与えられたとき，その design に match した association scheme を決定することは，その association scheme の一意性を示す問題と関連して重要である。ここでは，§1 で述べたことを明らかにしたいが，これらの問題は，特に PBIBD の構成に関して理論的にも実用的にも重要視されている。

Vartak の方法と筆者の方法との違いは，前者は PBIBD N の会合数 λ_i と第2種のパラメーター p^i_{jk} を用いるのに対して後者は N の会合数と NN' の固有根を用いる点にある。

§3 諸定理

Association scheme の行列表示として，association matrices

$A_0, A_1, \cdots, A_m$ を

$$A_i = \| a^\beta_{\alpha i} \| \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, v;\ i = 0, 1, \cdots, m)$$

$$a^\beta_{\alpha i} = \begin{cases} 1, & \alpha \text{番目と} \beta \text{番目の処理が } i\text{th associates} \\ & \text{のとき} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

と定義する。このとき，これらの association matrices の linear closure $\mathfrak{A} = [A_0, A_1, \cdots, A_m]$ は，処理の association algebra と呼ばれる $m+1$ 次元可換環となる[1]。 また $\mathfrak{A}$ の mutually orthogonal idempotents が $A_0^\#, A_1^\#, \cdots, A_m^\#$ で与えられると，それらは $\mathfrak{A}$ の ideal base として の表示にも使われる，即ち $\mathfrak{A} = [A_0^\#, A_1^\#, \cdots, A_m^\#]$。

一般に PBIBD のパラメーター $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ が必ずしもすべて異ならない時，或るassociation scheme に基づいている その PBIBD の m 個の associate classes もまた，必ずしもすべて異ならないかもしれない。 これらのことをふまえて，ここでは Kageyama [2] を中心に述べたい。

今，パラメーター $v, n_i, p^i_{jk}, b, r, k, \lambda_i$ をもつ m associate classes の PBIBD の incidence matrix $N = \| n_{\alpha a} \|$ を

$$n_{\alpha a}=\begin{cases}1, & \alpha\text{番目の処理が }a\text{番目のブロックで生起する}\\ 0, & \text{その他}\end{cases}$$

と定義すると，次の補題[4]が成立する。

補題A

・NN' は association algebra $\mathfrak{A}$ に属する。しかも

・$NN'=\sum_{j=0}^{m}\lambda_j A_j=\sum_{i=0}^{m}f_i A_i^{\#}$ ，ここで

・$f_i=\sum_{j=0}^{m}\lambda_j z_{ij}$ （z_{ij} は $P_j=\|p_{ij}^{k}\|\ \ i,k=0,1,\cdots,m$ の固有根）は，NN' の固有根である。特に，

・$f_0=rk=\sum_{i=0}^{m}n_i\lambda_i$

・f_i は不等式 $0\leqq f_i\leqq rk\ (i=0,1,\cdots,m)$ を満す。その重複度は $\mathrm{trace}(A_i^{\#})$ である。

補題Aは，『m associate classes の PBIBD N に対して，NN' は高さ $m+1$ 個の λ_i と f_i をそれぞれもつ』ことを意味している。これは以下の定理の必要条件を導くのに用いられる。

以下，design とその incidence matrix とは同じ記号でかくことにする。

定理 1

N_i をパラメーター $v_i, b_i, r_i, k_i, \lambda_i$ $(i=1,2)$ をもつ BIBD とする。このとき，

(i) rectangular association scheme をもつ高さ 3 associate classes のクロネッカー積による PBIBD $N=N_1 \otimes N_2$ が L_2 association scheme をもつただ二つの相異なる associate classes の PBIBD に reducible であるための必要十分条件は，

$$v_1 = v_2\ ,\ k_1 = k_2$$

である。

(ii) rectangular association scheme をもつ高さ 3 associate classes の PBIBD $N=N_1 \otimes N_2 + N_1^* \otimes N_2^*$ が L_2 association scheme をもつただ二つの相異なる associate classes の PBIBD に reducible であるための必要十分条件は，

$$v_1 = v_2\ ,\ b_1(r_2-\lambda_2) = b_2(r_1-\lambda_1)\ ,$$

$$b_i \neq 4(r_i-\lambda_i)\ ,\ i=1,2$$

である。ここで N_i^* は BIBD N_i の complementary である。

(i), (ii) の比較の簡単な例として，例えば N_1 $(v_1=b_1=3,\ r_1=k_1=2,\ \lambda_1=1)$，$N_2$ $(v_2=5,\ b_2=10,\ r_2=4,\ k_2=2,\ \lambda_2=1)$ 又は，$N_1=N_2$ $(v=b=3,\ r=k=2,\ \lambda=1)$ が考えられる。

定理２

N_i をパラメーター $v_i, b_i, r_i, k_i, \lambda_i$ $(i=1,2,\cdots,m)$ をもつ BIBD とする。このとき

F_m type association scheme をもつ高々 2^m-1 associate classes のクロネッカー積による PBIBD $N=N_1\otimes N_2\otimes\cdots\otimes N_m$ が hypercubic association scheme をもつただ m 個の相異なる associate classes の PBIBD に reducible であるための必要十分条件は，

$$v_1=v_2=\cdots=v_m, \quad k_1=k_2=\cdots=k_m$$

である。

（注意）

(i) $m=3$ のとき 上の hypercubic association scheme は通常 cubic association scheme と呼ばれている。

(ii) $m < m_1 \leqq 2^m-1$ なる適当な m_1 に対して，m_1 associate classes の PBIBD への reduction も考えることができる。

(iii) 定理１の (i) の型の一般化については別の機会に述べたい。

References

[1] Bose, R.C. and Mesner, D.M. (1959). On linear associative algebras corresponding to association schemes of partially balanced designs. Ann. Math. Statist. 30, 21–38.

[2] Kageyama, S. (1972). On the reduction of associate classes for certain PBIB designs. Ann. Math. Statist. 43, 1528–1540.

[3] Vartak, M.N. (1955). On an application of Kronecker product of matrices to statistical designs. Ann. Math. Statist. 26, 420–438.

[4] Yamamoto, S. and Fujii, Y. (1963). Analysis of partially balanced incomplete block designs. J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I 27, 119–135.