数理解析研究所講究録
第179巻 1973年 90-101



# 制御集合の上の2方向オートマトン

東北大 工学部　　高浪五男

## §1 はじめに

Ginsburg と Spanier (1968) は制御された文法の概念を導入し，制御されない場合よりもより複雑な言語が生成されることを示した．

ここでは，有限個の遷移関数をもつ2方向オートマトンを各ステップに用いる関数を指定することによって制御するという概念を導入する．遷移関数の系列の集合を制御集合と呼び，このようなオートマトンが受理する言語のクラスを特性化する．

§2では，制御集合の上の2方向オートマトン，特に，制御集合の上の2方向有限またはプッシュダウンオートマトンを定義する．

§3では，制御集合の上の2方向有限オートマトンとプッシュダウンオートマトンが受理する言語のクラスの間の関係

を考察し，通常の2方向プッシュダウンオートマトンが受理する言語のクラスは文脈自由形制御集合の上の2方向有限オートマトンが受理する言語のクラスと一致することを示す．さらに，正規制御集合の上の2方向有限オートマトンが受理する言語のクラスは正規集合のクラスと一致することを示す．

§4では，文脈自由形制御集合の上の2方向有限オートマトンが受理する言語をある形の文脈自由形言語と写像によって特性化する．さらに，これらが受理する言語のクラスの2，3の閉包的性質を調べる．最後に，制御集合の上の2方向有限オートマトンと2方向順序変換との関係を述べる．

## §2　制御集合の上の2方向オートマトン

制御集合の上の2方向オートマトン，特に制御集合の上の2方向プッシュダウンオートマトンを定義する．

〔定義1〕　両端記号 $\{¢, \#\}$ を持つ制御集合の上の2方向プッシュダウンオートマトン（以下，2PDAと書く）は7組 $A = (K, \Sigma \cup \{¢, \#\}, \Gamma, \Delta, p_0, Z_0, F)$[1] である．ここに，Kは状態の有限集合，Σは入力アルファベット（有限），Γはプッシュダウン記号の有限集合，$Z_0$は初期プッシュダウン記号，$p_0$は初期状態，$F \subset K$は最終状態の集合，$\Delta = \{\delta_1, \cdots, \delta_m\}$は遷移関数の有限集合で，各元は $K \times (\Sigma \cup \{¢,$

1　制御集合の上の2方向有限オートマトン（以下，2FAと書く）は5組 $A = (K, \Sigma \cup \{¢, \#\}, \Delta, p_0, F)$ である．ここに，Δの各元は $K \times (\Sigma \cup \{¢, \#\}) \times K \times \{0, 1, -1\}$ の部分集合である．

$\#\}) \times \Gamma \times K \times \Gamma^* \times \{0, 1, -1\}$ の有限部分集合である.

すべての $(q, a, Z, q', \gamma, d) \in \delta_i$ $(1 \le i \le m)$ について $d \ne -1$ ならば $A$ を制御集合の上の1方向プッシュダウンオートマトンと呼ぶ.

2PDAへの入力は $\{\text{¢}\}\Sigma^*\{\#\}$[2] の元である.

〔定義2〕 $\upharpoonright$ を $\Sigma \cup \{\text{¢}, \#\}$ にない記号とする. 制御集合の上の2PDAの時点表示(ID)は3組 $(q, x\upharpoonright y, \gamma)$ である. ここに, $q \in K$, $xy \in \{\text{¢}\}\Sigma^*\{\#\}$, $\gamma \in \Gamma^*$ である.

〔定義3〕 二つのID間の関係 $\vdash^{\delta_i}$ は次のように定義される.

$(q, a_j, Z, q, \gamma', d) \in \delta_i$ のときのみ

$$(q, a_1 \cdots \upharpoonright a_j \cdots a_n, \gamma Z) \vdash^{\delta_i} (q', a_1 \cdots \upharpoonright a_{j+d} \cdots a_n, \gamma\gamma').$$

特に空なる語 $\varepsilon \in \Delta^*$ と任意のID $(q, x\upharpoonright y, \gamma)$ について,

$$(q, x\upharpoonright y, \gamma) \vdash^{\varepsilon} (q, x\upharpoonright y, \gamma).$$

$\Delta^*$ の元 $\xi = \delta_{i_1} \cdots \delta_{i_p}$ $(p \ge 1$, 各 $\delta_{i_j} \in \Delta)$ について,

$$(q, a_1 \cdots \upharpoonright a_i \cdots a_n, \gamma) \vdash^{\delta_{i_1}} \cdots \vdash^{\delta_{i_p}} (q_p, a_1 \cdots \upharpoonright a_j \cdots a_n, \gamma_p)$$

を簡単に

$$(q, a_1 \cdots \upharpoonright a_i \cdots a_n, \gamma) \vdash^{\xi} (q_p, a_1 \cdots \upharpoonright a_j \cdots a_n, \gamma_p)$$

と書く.

$C \subseteq \Delta^*$ について,

$$T(A; C) = \{x \in \Sigma^* \mid (q_0, \upharpoonright \text{¢} x \#, Z_0) \vdash^{\xi} (q', \text{¢} x \# \upharpoonright, \gamma),$$
$$q' \in F, \gamma \in \Gamma^*\}.$$

2 語の集合 $X$ と $Y$ について, $XY = \{xy \mid x \in X, y \in Y\}$ で $xy$ は $x$ と $y$ の並置である. $X^0 = \{\varepsilon\}$ (空なる語) とする. $i > 0$ について, $X^{i+1} = X^i X$ で $X^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} X^i$ とする. $\phi$ は空集合を表わす.

任意の集合 $C'$（必ずしも $\Delta^*$ に含まれない）について，$T(A;C') = T(A;C'\cap\Delta^*)$．$T(A;C')$ を両端記号を持つ制御集合の上の2PDA $A$ が受理する言語という．

両端記号なしの制御集合の上の2PDAに関する諸定義は両端記号がない以外は上記の定義と同じである．

通常の2PDA（2FA）[3] $A$ は $\Delta$ が1個の元からなる制御集合の上の2PDA（2FA）とみることができ，$A$ が受理する言語 $T(A)$ は $T(A;\Delta^*)$ に等しい．

## §3 制御集合の上の2方向オートマトンが受理する言語

記法：$\mathcal{L}_{CF}$ を文脈自由形言語のクラス，$\mathcal{L}_R$ を正規集合のクラスとする．[4]

〔補題1〕 $\mathcal{L}$ をAFL（言語の抽象族）とする．両端記号を持つ（なしの）制御集合の上の2PDA $A$ と $C\in\mathcal{L}$ が与えられると，$T(A;C) = T(B;C'\cap L')$ なる両端記号を持つ（なしの）制御集合の上の2FA $B$ と $C'\in\mathcal{L}$ および $L'\in\mathcal{L}_{CF}$ が存在する．

証明　$A$ が両端記号なしの場合についてのみ示す．$A = (K,\Sigma,\Gamma,\Delta,q_0,Z_0,F)$ とする．$C\in\mathcal{L}$ であるから，各 $\sigma\in\Delta$ はただ1個の元からなると仮定してもよい．1方向PDA $A'$ と制御集合の上の2FA $B$ をつぎのように構成する：$\Lambda =$

3　通常のオートマトンについて，$\vdash^{\delta}$ の代りに関係 $\vdash$ を用いる．通常の1方向オートマトンは7組 $A=(K,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,F)$ と書く．ここに遷移関数 $\delta$ は $K\times\Sigma^*\times\Gamma\times K\times\Gamma^*$ の有限部分集合である．

4　言語，AFL，準同形写像，代入等の概念については〔Ginsburg と Spanier 1968 等〕を参照

$\{\lambda_i \mid \delta_i \in \Delta\}$ とする．ここに $\delta_i = (k, a, Z, k', \gamma, d)$ について $\lambda_i = (k, a, k', d)$ である．$A' = (K, \Lambda, \Gamma, \beta, k_0, Z_0, F)$ とする．ここに，$\beta = \{(k, \lambda_i, Z, k', \gamma) \mid \delta_i = (k, a, Z, k', \gamma, d) \in \Delta\}$ である．$B = (K, \Sigma, \Lambda, k_0, F)$ とする．$\Delta^*$ から $\Lambda^*$ への準同形写像 $h$ を各 $\delta_i$ について $h(\delta_i) = \lambda_i$ によって定義する．このとき，$T(A; C) = T(B; h(C) \cap T(A'))$ がなりたつ．$C \in \mathcal{L}$ であるから $h(C) \in \mathcal{L}$ で，$T(A') \in \mathcal{L}_{CF}$ である．

〔定義 4〕 $A = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, k_0, Z_0, F)$ を制御集合の上の 2PDA とする．すべての $\delta_i$ について $(k_i, a_i, t_i, d_i) \in \delta_i$ ならば $d_i \neq 0$ のとき $\xi = \delta_1 \cdots \delta_n \in \Delta^*$ は 0 ムーブなしという．$C \subseteq \Delta^*$ の各元が 0 ムーブなしのとき $C$ を 0 ムーブなしという．

つぎのことは明らかである．

〔補題 2〕 両端記号を持つ（なしの）制御集合の上の 2FA $A$ と $C \in \mathcal{L}$, $L \in \mathcal{L}_{CF}$ が与えられたとき，$T(A; C \cap L) = T(B; C' \cap L')$ なる制御集合の上の 2FA $B$ と $C' \in \mathcal{L}$, $L' \in \mathcal{L}_{CF}$ が存在する．ここに，$C'$, $L'$ は 0 ムーブなしで，$B$ の各遷移関数はただ 1 個の元からなる．

〔補題 3〕 $\mathcal{L}$ を AFL とする．両端記号を持つ（なしの）制御集合の上の 2FA $B$ と $C' \in \mathcal{L}$, $L' \in \mathcal{L}_{CF}$ が与えられるとき，$T(B; C' \cap L') = T(A; C)$ なる両端記号を持つ（なしの）制

御集合の上の2PDA $A$と$C \in \mathcal{L}$が存在する．

証明　$B$が両端記号なしの場合についてのみ示す．$B=(K, \Sigma, \Delta, k_0, F)$で$\Delta=\{\delta_1, \cdots, \delta_m\}$とする．$T(B; C' \cap L')=T(B; (C' \cap \Delta^*) \cap (L' \cap \Delta^*))$で$C' \cap \Delta^* \in \mathcal{L}$，$L' \cap \Delta^* \in \mathcal{L}_{CF}$であるから，$C' \subseteq \Delta^*$，$L' \subseteq \Delta^*$と仮定できる．さらに，$C'$，$L'$は0ムーブなしで，$\Delta$の各元はただ1個の元からなると仮定できる．$L'=T(A')$なる1方向PDA $A'$が存在する．$A'=(S, \Delta, \Gamma, \beta, s_0, Z_0, G)$とする．制御集合の上の2PDA $A$をつぎのように構成する：$A=(S \times K, \Sigma, \Lambda, \Gamma, (s_0, k_0), Z_0, G \times F)$で，$\Lambda=\{\lambda_1, \cdots, \lambda_m, \lambda_{m+1}\}$で各$\lambda_i$はつぎのように定義される．

$$\lambda_i=\{((s, k), a, Z, (t, k'), \gamma, d) \mid (s, \delta_i, Z, t, \gamma) \in \beta$$
$$\text{で}\ \delta_i=(k, a, k', d)\} \quad 1 \leq i \leq m,$$
$$\lambda_{m+1}=\{((s, k), a, Z, (t, k), \gamma, 0) \mid$$
$$(s, \varepsilon, Z, t, \gamma) \in \beta, \ {}^\forall k \in K \text{と}\ a \in \Sigma\}.$$

$\Lambda^*$から$\Delta^*$への準同形写像$h$を$h(\lambda_i)=\delta_i\ (1 \leq i \leq m)$で$h(\lambda_{m+1})=\varepsilon$によって定義する．このとき，$T(A; h^{-1}(C'))=T(B; C' \cap L')$がなりたつ．$C' \in \mathcal{L}$であるから，$h^{-1}(C') \in \mathcal{L}$である．

〔定理4〕$\mathcal{L}$をAFLとする．$C \in \mathcal{L}$で$A$を両端記号を持つ（なしの）制御集合の上の2PDAとするとき，$T(A; C)$

なる形のすべての集合の族は$T(A';C'\cap L')$なる形のすべての集合の族と一致する．ここに，$C'\in\mathcal{L}$，$L'\in\mathcal{L}_{CF}$で$A'$は両端記号を持つ（なしの）制御集合の上の２ＦＡである．

証明　補題１と３より得られる．

〔補題５〕　両端記号を持つ（なしの）制御集合の上の２ＦＡ　$A$と$C\in\mathcal{L}_{CF}$が与えられると，$T(A;C)=T(B)$なる両端記号を持つ（なしの）通常の２ＰＤＡ　$B$が存在する．

証明　補題３の証明と同様である．

〔定理６〕　つぎの形のすべての集合の族は互いに等しい．

（１）　$T(A;L_R)$．ここに$A$は両端記号を持つ（なしの）制御集合の上の２ＰＤＡで，$L\in\mathcal{L}_R$．

（２）　$T(A')$．ここに$A'$は両端記号を持つ（なしの）通常の２ＰＤＡである．

（３）　$T(A'';L_{CF})$．ここに$A''$は両端記号を持つ（なしの）制御集合の上の２ＦＡで，$L_{CF}\in\mathcal{L}_{CF}$.

証明　定理４と補題５より得られる．

つぎのことは補題３の証明と同様にして示される．

〔補題７〕　両端記号を持つ（なしの）制御集合の上の２ＦＡと$C\in\mathcal{L}_R$が与えられると，$T(A;C)=T(B)$なる両端記号を持つ（なしの）通常の２ＦＡが存在する．

〔定理８〕　$A$を制御集合の上の２ＦＡで$C\in\mathcal{L}_R$とするとき，

T（A；C）なる形のすべての集合の族は$\mathcal{L}_R$に等しい．

証明　通常の2FAが受理する言語は正規集合である．

## §4　制御集合の上のある特性化

両端記号なしの文脈自由形制御集合の上の2FAが受理する言語のクラスを$\Omega_{CF}$で表わす．ここでは，$\Omega_{CF}$をある形の言語と写像によって特性化する．そして，$\Omega_{CF}$の2，3の閉包的性質を考察する．さらに，制御集合の上の2FAが受理する言語と2方向順序変換との関係を調べる．

$\Sigma$をアルファベットとし，$\uparrow$を$\Sigma$にない記号とする．$\Xi$を$\{x_1 \uparrow x_2 \uparrow \cdots \uparrow x_n \mid n \geq 0,$　各$x_i \in \Sigma\Sigma^*\}$なる$\{\Sigma \cup \uparrow\}^*$の部分集合とする．$\Xi$の各元$x = x_1 \uparrow x_2 \uparrow \cdots \uparrow x_n$の各$x_i$の各記号について一つの数を指定する．特に，空なる語$\varepsilon$には0を指定する．

(1)　$x_1$の最初の記号（左端の記号）には1を指定する．

(2)　$x_i$の最後の記号（右端の記号）にN（i）が指定されているとき，$x_{i+1}$の最初の記号にはN（i）を指定する．

(3)　$x_i$の$j$番目の記号に$i(j)$が指定されているとき，$x_i$の$j+1$番目の記号には$i$が奇数なら$i(j)+1$を，$i$が偶数なら$i(j)-1$を指定する．

$\Lambda'$をつぎのような性質をもつ元$x = x_1 \uparrow x_2 \uparrow \cdots \uparrow x_n$のすべ

ての集合とする：$x_i$の記号に指定された数はすべて正で，同じ数が指定された記号は同じ記号であり，$x_n$の最後の記号に指定された数は他のどの記号に指定された数より小さくない．$\Lambda = \Lambda' \cup \{\varepsilon\}$とする．

三から$\Sigma^* \cup \{d\}$への関数$\varphi$をつぎのように定義する．ここに，$d$は$\Sigma$にない記号である．

$$\varphi(x) = \begin{cases} x(1)\, x(2) \cdots x(k) & x \in \Lambda \text{ のとき} \\ d & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

ここに，$x(i)$は$x$の番号$i$に対応する記号で，$k$は$x$の右端の記号の番号である．

〔定理9〕 両端記号なしの制御集合の上の2FA $A$と$C \in \mathcal{L}_{CF}$ ($\mathcal{L}_R$) が与えられると，$T(A\,;C) = \varphi(L) \cap \Sigma^*$なる三の部分集合$L \in \mathcal{L}_{CF}$ ($\mathcal{L}_R$) が存在し，逆もなりたつ．

証明　略

任意の文脈自由形（正規）言語$L \subseteq$三について，$\varphi(L)$が文脈自由形（正規）言語ならば，$\varphi$は文脈自由性（正規性）を保存するという．つぎのことは容易にわかる．

〔補題10〕 $\varphi$が文脈自由性（正規性）を保存することと任意の両端記号なしの制御集合の上の2FA $A$と任意の文脈自由形（正規）制御集合$C$について$T(A\,;C)$が文脈自由形（正規）言語であることとは等価である．

〔系10.1〕 $L \subseteq \Xi$ が正規言語ならば，$\varphi(L)$ もそうである．

〔系10.2〕 $\varphi$ は文脈自由性を保存しない．

〔定理11〕 $\Omega_{CF}$ は反転（reversal）[5] のもとで閉じている．

証明　$x \in \Lambda$ と $x^R \in \Lambda$ は等価である．$L \in \Omega_{CF}$ ならば，$L' \in \mathcal{L}_{CF}$ で $\varphi(L') \cap \Sigma^* = L$ なる $L' \subseteq \Xi$ が存在する．$L^R = \varphi(L'^R) \cap \Sigma^*$ で $L'^R \in \mathcal{L}_{CF}$ であるから，$L^R \in \Omega_{CF}$ である．

$\Omega_{CF}$ の例を示す．$\Sigma = \{a, b\}$ とする．

（1） $L_1 = \{ba^{k^n} \mid n \geq 1\}$．ここに $k$ はある固定した正整数である．

実際に，$L'_1 = \{ba \uparrow a^{m_1} b \uparrow ba^{km_1} \uparrow \cdots \uparrow a^{m_n} b \uparrow ba^{km_n} \mid n \geq 1\}$ とすると，明らかに $L'_1 \in \mathcal{L}_{CF}$ で $L = \varphi(L'_1) \cap \Sigma^*$ である．

（2） $L_2 = \{ba^{nk^n} \mid n \geq 0\}$．ここに $k$ はある固定した正整数である．

実際に，$L'_2 = \{ba^n \uparrow a^{m_1} b \uparrow ba^{km_1} \uparrow a^{m_2} b \uparrow ba^{km_2} \uparrow \cdots \uparrow a^{m_n} b \uparrow ba^{km_n} \mid n \geq 0\}$ とすると，明らかに $L'_2 \in \mathcal{L}_{CF}$ で，$L_2 = \varphi(L'_2) \cap \Sigma^*$ である．

〔定理〕〔Gray, Harrison および Ibarra, 1967〕 $\Sigma$ をただ1個の元からなるアルファベットとする．$L \subseteq \Sigma^*$ が $L \in \Omega_{CF}$ ならば $L$ は正規言語である．

このことと，上の例から，つぎのことが得られる．

〔定理12〕 $\Omega_{CF}$ は $\varepsilon$ フリー準同形写像のもとで閉じていない．

5　$x \in \Sigma^*$ について，$x = \varepsilon$ なら $x^R = \varepsilon$ で $x = ay$，$a \in \Sigma$ なら $x^R = y^R a$ である．$x^R$ を $x$ の反転と呼ぶ．$\forall L \in \Omega_{CF}$ について，$L^R = \{x^R \mid x \in L\} \in \Omega_{CF}$ ならば $\Omega_{CF}$ は反転のもとで閉じているという．

したがって，$\Omega_{CF}$は文脈規定形言語のクラスと一致することはない．

$\Omega_{CF}$は逆順序変換のもとで閉じていない〔Gray et al. 1967〕．しかし，つぎの結果を得る．

〔定理13〕 $\Omega_{CF}$は逆準同形写像のもとで閉じている．

証明　略

〔定理14〕 $A$を遷移関数の集合$\Delta$を持つ制御集合の上の2FAとする．このとき，集合 $C_x=\{\xi\in\Delta^*\mid x=T(A;\{\xi\})\}$は正規で，$A$から効果的に（effectively）求められる．

証明；$A$から$C_x$を受理する有限オートマトンを構成することによって示される．

定理14からつぎの結果を得る〔Gray, et al. 1967〕．

〔定理15〕 $\Omega_{CF}$の各元は帰納的集合である．

2方向順序変換（2ST）は6組$S_2=(K, \Sigma, \Delta, H, s_0, F)$である．ここに，$K, \Sigma, s_0, F$は制御集合の上の2PDAの定義と同じである．$\Delta$は出力アルファベット，$H$は$K\times\Sigma\times\Delta^*\times K\times\{0, , -1\}$の有限部分集合である．

$S_2(x)$は入力テープが$x$で，$S_2$が$x$の最右端記号の右に動きそのときの状態が$F$に含まれるようなすべての出力語の集合である．$L\subseteq\Delta^*$について，$S_2^{-1}(L)=\{x\in\Sigma^*\mid S_2(x)\cap L\neq\phi\}$と定義する．

〔定理16〕 両端記号なしの制御集合の上の2FA $A$と$C \in \mathcal{L}$（AFL）について，$T(A;C) = S_2^{-1}(L)$なる2ST $S_2$と$L \in \mathcal{L}$が存在し，逆もなりたつ．

証明 $A = (K, \Sigma, \Delta, k_0, F)$で$\Delta = \{\delta_1, \cdots, \delta_n\}$，$C \subseteq \Delta^*$で$\delta_i = (p_i, a_i, q_i, d_i)$とする．2ST $S_2$をつぎのように構成する：$S_2 = (K, \Sigma, \Delta, H, k_0, F)$．ここに，$H = \{(p_i, a_i, \delta_i, q_i, d_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$．このとき，$x \in S_2^{-1}(C) \Leftrightarrow S_2(x) \cap C \neq \phi \Rightarrow {}^{\exists}\delta_{i_1} \cdots \delta_{i_p} \in S_2(x) \cap C \Leftrightarrow x = T(A; \{\delta_{i_1} \cdots \delta_{i_p}\}) \in T(A; C)$．ゆえに，$S_2^{-1}(C) = T(A;C)$．

文献


Baer, R. M. and Spanier, E. H. (1969), Referenced automata and metaregular families, J. Comput. System Sci. 3, 423-446.

Ehrich, R. W. and Yau, S. S. (1971), Two-way sequential transduction and stack automata, Information and Control 18, 404-446.

Gray, J. N., Harrison, H. A. and Ibarra, O. H. (1967), Two-way pushdown automata, Information and Control 11, 30-70.

Ginsburg, S. (1966), Mathematical theory of context-free languages, McGraw-Hill Book Co., New York.

Ginsburg, S. and Spanier, E. H. (1968), Control sets on grammars, Math. Systems Theory 2, 159-177.

Rabin, M. O. and Scott, D. (1959), Finite automata and their decision problems, IBMJ. Res. Dev. 114-125.

高浪，本多（1972），制御集合の上のオートマトンと変換器，電通学誌，55-3，156-162.