数理解析研究所講究録
第 180 巻 1973 年 30-38

Boole 代数値実数論

名大 教養 難波 完爾

$\mathcal{B}$ を完備ブール代数とするとき，truth value として $\mathcal{B}$ の中の値をとる集合論の model の一つの例 $V^{\mathcal{B}}$ を R. M Solovay, D. Scott が与えた。この集合論の中での実数に関する一般的考察を行うのが当面の目的である．

よく知られているように $\mathbf{2} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ は任意の Boole 代数の完備部分代数である．即ち $i : \mathbf{2} \hookrightarrow \mathcal{B}$，したがってこの i は自然な inclusion map.

$$i^* : V^{\mathbf{2}} \hookrightarrow V^{\mathcal{B}}$$

をひきおこす、ここに $V^{\mathbf{2}}$ は集合論の自然な，即ち 2 値の model である．

自然数や有理数の概念は absolute であることはよく知られていることであるが，しかし，これは一般に Boole 代数の中で，n を自然数とするとき，(n, ∞)-分配法則 ((n,∞)-DL) 即ち

$$\prod_{j<n} \sum_{\nu<\rho} a_{j\nu} = \sum_{f \in \rho^n} \prod_{j<n} a_{jf(j)}$$

が成立するという事実に対応している訳である．

さて 2 値の実数の全体を $\mathbb{R}$，即ち普通の意味での実数，又

$\mathcal{B}$-valued の実数の全体を $\mathbb{R}^{\mathcal{B}}$ と記する．即ち $\mathbb{R}^{\mathcal{B}}$ は $\mathrm{V}^{\mathcal{B}}$ の中で実数であるという値が $\mathbb{1}$ をとるもの・全体とする．明らかに

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{2}} \subset \mathbb{R}^{\mathcal{B}}$$

が成立する．

次に X を topological space，$\mathbb{B}$ を X の上の一つの Borel family，μ を $\mathbb{B}$ の上の一つの実数値 measure とし

$$I_\mu = \{ A \in \mathbb{B} : \mu(A) = 0 \}$$

とすると $\mathbb{B}/I_\mu = \mathcal{B}$ は完備ブール代数である．一般に次のような事実が知られている．即ち $\mathbb{B}$ は κ 完備な X の上の部分集合族，I は $\mathbb{B}$ の κ 完備な ideal，そして $\mathbb{B}$ が I 上 κ^+ saturated 即ち $\mathbb{B}/I$ の disjoint，$\neq 0$ 元は高々 κ 個しか存在しないときは，$\mathbb{B}/I$ は完備ブール代数になる．これは次のようである：

$$\underset{}{0} \longrightarrow \underset{\kappa\text{-comp.}}{I} \longrightarrow \underset{\substack{\kappa\text{-comp.}\\ \kappa^+\text{sat.}}}{\mathbb{B}} \longrightarrow \underset{\text{comp.}}{\mathbb{B}/I} \longrightarrow 0 \qquad \text{exact.}$$

この種の complete Boolean algebra の例の代表的なものは次のようである：

(1) $\mathbb{B}$ Borel family，μ : $\mathbb{B}$ 上の σ-additive measure，$I_\mu = \{ A \in \mathbb{B} : \mu(A) = 0 \}$ とするとき，$\mathcal{B} = \mathbb{B}/I_\mu$ は complete．これを measure (complete) algebra と呼ぶことにする．

(2) X を可算公理を満足する Baire space とし，$\mathbb{B}$ をその上の Borel family，I を $\mathbb{B}$ の中の first category の集合の全体の作る

ideal とすると $\mathcal{B}/I=\mathcal{B}$ は完備ブール代数である．

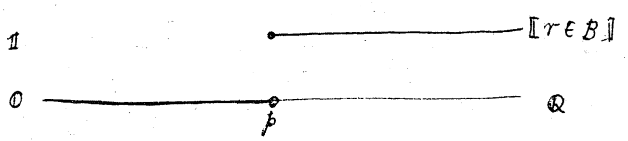
$V^{\mathcal{B}}$ の中での実数を有理数の Dedekind cut と考える．即ち実数とは有理数 $\check{Q}=Q\ (=Q^{\mathcal{B}})$ の上の一つの切断 $(A|B)$ のことである．ここで上組 B について考えると，有理数 r に対して $r\in B$ の truth value $[\![r\in B]\!]$ は $\mathcal{B}$ の中の値をとり次の条件を満足する：

(1) $r<s \longrightarrow [\![r\in B]\!]\le[\![s\in B]\!]$,

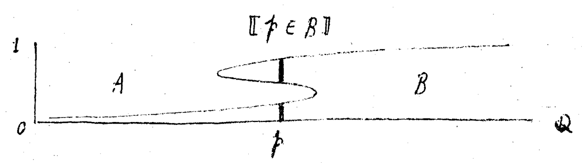
(2) $\sum_{r\in Q}[\![r\in B]\!]=\mathbb{1}$, $\prod_{r\in Q}[\![r\in B]\!]=\mathbb{0}$.

即ち，$V^{\mathcal{B}}$ の中の実数とは，$h(r)=[\![r\in B]\!]$ で定められた $h:Q\to\mathcal{B}$，が Q から $\mathcal{B}$ の中への順序準同型で $\inf_{r\in Q}h(r)=\mathbb{0}$, $\sup_{r\in Q}h(r)=\mathbb{1}$ となることである．これに対しては atomic な Boole 代数 $\{\mathbb{0},\mathbb{1}\}=\mathbf{2}$ と，例えば $[0,1]$ の上の regular open set の作る non-atomic な Boole 代数に対して $r\in B$ を例示すれば，ある程度のイメージが得られるであろう．

$\mathbf{2}$:



[0 1] の regular open algebra :



以上のことより次の定理を得る：

定理1．$\mathcal{B}$ を次の性質で定義された完備ブール代数とする．

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \longrightarrow & I & \longrightarrow & \mathbb{B} & \longrightarrow & \mathcal{B} & \longrightarrow 0 & & \text{exact}, \\ & \kappa\text{-comp.} & & \kappa\text{-comp.} & & \text{comp.} & & & \kappa \geq \omega \\ & & \kappa^{+}\text{-sat.} & & & & & & \end{array}$$

このとき，$\mathbb{R}^{\mathcal{B}}$ の実数と X 上の $\mathbb{B}$ measurable function は自然に対応している．

証明．$\mathbb{R}^{\mathcal{B}}$ の実数，即ち Q の一つの切断 (A, B) を考える．有理数 r に対して，$h(r) = [\![r \in B]\!] = [A_r]$ とおく．即ち $A_r \in \mathbb{B}$ を代表元としてとる．このとき，$x \in X$ に対して measurable function $k(x)$ を次のように定める：

$$k(x) = \inf\{r \in Q : x \in A_r\}$$

この場合 A_r のとり方により k は変化するが，ほとんど到るところ一致する．次に $k : X \longrightarrow R$ が measurable function とすれば，

$$\{x \in X : k(x) < r\} \in \mathbb{B}$$

であるから $[\![r \in B]\!] = [\{x \in X : k(x) < r\}]$ と定義すれば，B は $\mathbb{R}^{\mathcal{B}}$ の実数を表現している．

注意．このような対応で，有理数や $\mathbb{R}\ (= \mathbb{R}^{2})$ の実数に応ずる $\mathbb{R}^{\mathcal{B}}$ の実数はそれぞれ

(1) $k : X \longrightarrow Q$，

(2) $k : X \longrightarrow R$ で $\sum_{p \in \mathbb{R}} [\{x \in X : k(x) = p\}] = 1$ in $\mathcal{B}$

となる measurable function である．

例えば，$X = \mathbb{R}$ とするとき，$k(x) = x$ は $\mathbb{R}^{2}$ に対応しない $\mathbb{R}^{\mathcal{B}}$ の実数である．これは任意の実数 p に対して $\mathcal{B}$ が non-atomic

であれば，

$$\sum_{p\in\mathbb{R}} [\{x\in\mathbb{R} \ : f(x)=p\}] = 0 .$$

即ち $x \in \mathbb{R}^{B} - \mathbb{R}^{2}$．このことから $\mathbb{R}^{B}$ は $\mathbb{R}^{2}$ より非常に豊かな構造をしていることが想像出来るであろう．又同様の考察より B valued な複素数 $\mathbb{C}^{B}$ を構成でき，勿論それは複素数値の measurable function である．

例えば，$\mathbb{C}^{2}$ と $\mathbb{C}^{B}$ 及び $\mathbb{R}^{2}$ と $\mathbb{R}^{B}$ の関係はそれぞれ，代数的数と複素数，又有理数と実数の関係に例えられよう．$\mathbb{C}^{2}$ は V^{B} の中の複素数 $\mathbb{C}^{B}$ の中の代数的閉体であるのみならず，解析的閉体ともいうべき性質を有している．即ち $\mathbb{C}^{B}$ の中の $\mathbb{C}^{2}$ 係数の解析的函数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ に対して，$f(x)=0$ なら $x\in\mathbb{C}^{2}$．
$\mathbb{C}^{B}$ は $\mathbb{C}^{2}$ の transcendental extension であるが，その generator の数は B の構造によって異なる．generator の数の非常に多いものは簡単に作ることが出来，これを用いて連続体仮説の独立性の証明が簡単に得られる．

定理 2　B を quotient complete Boolean algebra，D を V^{B} の中での $\mathbb{R}^{B}$ の Borel set の全体とする．このとき，$X\times\mathbb{R}$ の上の Borel family としての直積 $\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ の間に自然な対応がある．

証明　$\mathcal{B}_X$ の元と有理数を両端とする区間 (r_1, r_2) の直積 $A\times(r_1, r_2)$ は $\mathbb{R}^{B}$ の一つの open set を作る．即ち

$$[\![f\in u]\!] = [\{x\in X \ \ r_1 < f(x) < r_2\}]$$

それ故 $u \subset \mathbb{R}^B$ は value A で open interval, value $-A$ で空集合であって，したがって open set である value は 1 である．

次に $\mathbb{R}^B$ の有理数を両端にもつ interval は有理数値 measurable function, f_1, f_2 を用いて (f_1, f_2) の形で表現できる．よってこれに応ずる $X \times \mathbb{R}$ の集合は

$$\sum_{p\in\mathbb{R}} \{x\in X : f_1(x) < p < f_2(x)\}.$$

又 $A \subset X\times\mathbb{R}$ および $p \in \mathbb{R}$ に対して，$(A)_p = \{x\in X : \langle x\, p\rangle \in A\}$ とすると，[redacted]

$$\sum_{p\in\mathbb{R}} \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)_p = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{p\in\mathbb{R}} (A_n)_p$$

なる関係が成立する．又 $u \subset \mathbb{R}^B$ に対して $[\![p\in u]\!]$ を対応させる函数を考え u^* を次の図形が可換となるように定める．

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[r, "*"] \arrow[d, "p\in"'] & u^* \arrow[d, "(\ )_p"] \\
p\in u \arrow[r, "{[\![\ ]\!]}"'] & (u^*)_p = [\![p\in u]\!]
\end{tikzcd}$$

ここで注意すべきことは，$sat(B) < \omega_1$ のとき，例えば，measure algebra 等に於ては，基数の概念，したがって可算の概念は absolute である．即ち (ω,ω_1)-弱分配法則 ((ω,ω_1)-WDL)

$$\prod_{n<\omega}\sum_{\nu<\omega_1} a_{n\nu} = \sum_{\mu<\omega_1}\prod_{n<\omega}\sum_{\nu<\mu} a_{n\nu}.$$

したがって，可算 operation による closure の概念は V^2 の中と V^B の中で一致する．

X_i の上の Borel family $\mathcal{B}_i$ の上の measure μ_i によって決定される完備 Boole 代数を B_i とするとき，

$$\check{X}_2 \in V^{B_1}$$

であるが，V^{B_1} の中で $\check{\mathcal{B}}_2 \in V^{B_1}$ によって生成される Borel family $\tilde{\mathcal{B}}_2$ と $X_1 \times X_2$ の Borel family $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ の間に自然な対応があり

$$\begin{tikzcd}
u \in \tilde{\mathcal{B}}_2 \arrow[r, leftrightarrow, "*"] \arrow[d, "x\in"'] & u^* \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \arrow[d, "(\ )_x"] \\
\underset{(B_1)}{x_1 \in u} \arrow[r, leftrightarrow, "{[\![\ ]\!]}"'] & \underset{(2)}{(u^*)_x}
\end{tikzcd}$$

即ち $[\![\ ]\!]$ と $*$ は B_1-valued な集合論と 2-valued な集合論の自然な対応を与えている。

定理 3. 上と同じ仮定の下で μ_2 は $\check{X}_2$ の上の Borel family $\tilde{\mathcal{B}}_2$ の上の B_1-valued measure に自然に拡大できる．

証明．これは Fubini の定理のいいかえにすぎないが，これを示すと，次のようである．即ち $u \in \tilde{\mathcal{B}}_2$ に対して，

$$f(x) = \mu_2((u^*)_x)$$

は measurable function である．ただし $\mu_2((u^*)_x) = \infty$ がほとんど到るところ成立するとき，R^B の方の ∞ と考える．

これが V^{B_1} の中で一つの函数である為の条件は

$$[\![u = v]\!] \leq [\![f_u = f_v]\!]$$

であるが，これは，$x \in [\![u = v]\!]$ であれば，ほとんど到るところ $\mu_2((u^*)_x) = \mu_2((v^*)_x)$ であるから，

$f_u(x) = \mu_2((u^*)_x)$ であるから

$$[\![u = v]\!] \leq \{x \in X_1 : f_u(x) = f_v(x)\} = [\![f_u = f_v]\!] .$$

即ち V^{B_1} の中で $u \longmapsto \tilde{\mu}_2(u) = f_u$ は σ-additive な $\tilde{B}_2$ の上の measure である．したがって次のものは自然に対応している：

(1) $X_1 \times X_2$ の上の $\mu_1 \times \mu_2$ measurable function,

(2) $X_1^{(B_2)}$ の中での $\tilde{\mu}_1$ measurable function,

(3) $X_2^{(B_1)}$ の中での $\tilde{\mu}_2$ measurable function,

(4) $V^{B_1 \times B_2}$ の中の実数．

定理 4．B を R の上の Lebesgue measure による measure algebra とすると，V^B の中で次の性質が成立する：

(1) $R^\vee$ は meager,

(2) $R^\vee$ は non-measurable.

証明．これは R.M. Solovay の結果であり Mathias の paper の T3303 に結果が記されている．

今 $u \in R^B$ で $u \cap R^\vee = \emptyset$ とし，u を Borel set とすると，$u^* \in R \times R$ で次の性質を有する．即ち

$$[\![\check{p} \in u^*]\!] = (u^*)_p$$

ここで $\check{p} \notin u$ である故 $\mu((u^*)_p) = 0$ したがって

$$\tilde{\mu}^*(u) = 0$$

ここに $0(p) = \mu((u^*)_p)$ で常に 0 をとる measurable function で R^B の中の 0 である．これは例えば $\tilde{\mu}^*[0\,1]^B = 1$ を意味する．

同様にして $\mu_*(\mathbb{R}^2) = 0$ である．したがって $\mathbb{R}^2$ は non-measurable である．次に $\mathbb{R}^2$ が meager であることを示す．その為に，$r_m^{(n)}$ を次のようにとる：

$$0 < r_m^{(n)} < 1 \quad , \quad \prod_{m=0}^{\infty} r_m^{(n)} > 1 - \frac{1}{2^n}$$

次に $A_m^{(n)}$ を次のように定義する．即ち $A_0^{(n)} = [0\ 1]$ ，又 $A_m^{(n)} = \bigcup_j I_j^{(m)}$ とし，$I_j^{(m)}$ を interval とする．$I_j^{(m)}$ の中央の部分よりその長さの $(1 - r_m^{(n)})$ 倍の interval を除いたものを $I_{2j}^{(m+1)}$, $I_{2j+1}^{(m+1)}$ とする．そして $A_{m+1}^{(n)} = \bigcup_j I_{2j}^{(m+1)} \cup I_{2j+1}^{(m+1)}$ ．ここで

$$K_n = \bigcap_{m=0}^{\infty} A_m^{(n)}$$

とおけば，K_n は no where dense で measure $> 1 - \frac{1}{2^n}$ である．

これに対して $u_n^* = \{(x, y) : x + y \in K_n\}$ に対する $u_n \in \mathcal{B}^B$ を考えれば u_n は $[0\ 1]^B$ の nowhere dense set で

$$\mu [\![p \in u_n]\!] > 1 - \frac{1}{2^n} .$$

したがって，$[0\ 1]^{\mathcal{B}} \subset \bigcup_{n<\omega} u_n$ が V^B の中で成立する．よって $\mathbb{R}^2$ は meager set である．