数理解析研究所講究録
第181巻 1973年 64-67

Neuron の action potential に関する Zeeman 方程式について。

大阪市立大学 理学部
田尾鶚三

これまで微分方程式をもちいて現象を解析する過程は，次の順序をたどるのを常とした。

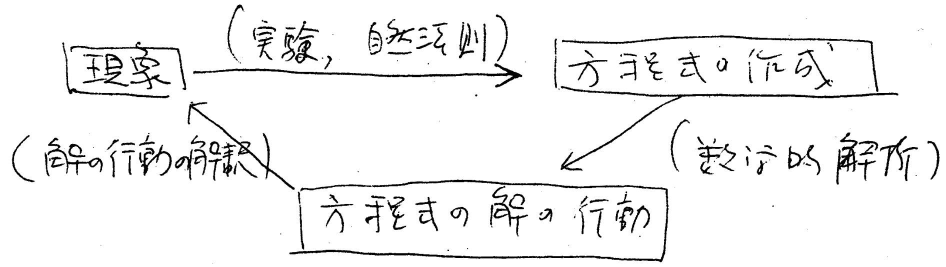
1° 現象において基本的な要因と思われる変量を変数にえらぶ。

2° 変量間の物理的，化学的，其の他自然科学的法則あるいは実験より，変数間に成立する関係式，すなわち微分方程式をつくる。

3° 作られた微分方程式を数学的に解析する。

4° その解の行動より現象を解析する。

図式で示せば，



上の図式を逆にたどることは出来ないであろうか？

すなわち，現象より解の行動が推測されるとき，その解の行動より，解がそのような行動をする微分方程式を作成し，微分方程式にあらわれる変数間の関係を解き明かす自然法則

を発見すること，また変数に対応する基本的要因を見つけ出すこと。さらに又そのような事を実験の指針にすることは不可能であろうか？

公理的思考方法は近代数学の一つの基本的思考方法であるが，応用数学にあらわれる微分方程式には，ad hoc的な構成的方法がいかにも多い。この中において解の行動に公理的な規制を与えて，公理を満足する方程式を分類することを実行することは極めて意義深いと思われる。

そのためには，方程式の解の行動から方程式を分類する数学的理論が可成り発展していることが必要であろう。近年の力学系の位相的研究，とくにその中でも前衛的なR. Thomによる"catastropheの理論"はこのような方向への一歩前進を約束する。

Neuronのaction potentialに関する微分方程式はHodgkin - Huxleyの微分方程式が名高い。それは現象から実験的，自然科学的法則より作られた，その意味において，古典的な構成的方程式である。

ところでaction potentialの行動は極めて明白である。すなわち

1° 静止（平衡）状態

2° 行動への閾値の存在

3° 急激な行動

4° 3°に比較して，ゆっくりと平衡状態への復帰，

そこで 1°—4° を公理として，その解がそのような行動を示す方程式を全て探すことが出来ないか？

R. Thom の理論によると，微分方程式の"位相的に同値"な分類において，そのような方程式は，次に示す方程式に本質的に同値である。

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = -(x^3 + ax + b) & (\varepsilon > 0) \\ \dot{a} = -2a - 2x \\ \dot{b} = -a - 1 \end{cases}$$

この基本的な型から実験に合うような式を(同値類の中から)さがすには，やはり ad hoc 的な修正をほどこすことが必要である。第1式は基本的であるので第2，第3式を修正して，E.C. Zeeman は次の方程式を得た。

$$\dot{x} = -1.25\,(x^3 + ax + b)$$

$$\dot{a} = \{x + 0.06(a+0.5)\}\{x - 1.5a - 1.67\}\{0.054(b-0.8)^2 + 0.75\}$$

$$\dot{b} = -2.38[a+0.5]_+(b+1.4) - (4[x+0.5]_-)^2(b-4.95) - 0.15(b-0.15)$$

ここに $[y]_+ = \begin{cases} y & y \geq 0 \\ 0 & \end{cases}$, $[y]_- = \begin{cases} 0 & y \geq 0 \\ y & y \leq 0 \end{cases}$

とする。

文献

E.C. Zeeman : Differential equations for heartbeat and nerve impulse, Towards a theoretical biology, 4, (Ed. C.H. Waddington, E.U.P. 1972)