

## 二次元しきい値関数セル空間の 信号伝播パターン

京大 理学部 小瀬 洋一

### § 1. はじめに

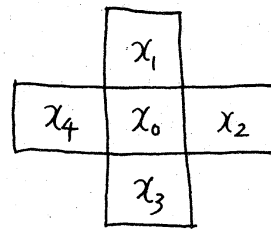
二次元の Neumann 近傍を持つセル空間において、各セルがしきい値関数で定義されている場合の信号伝播について基礎的な考察を行なう。以下においては、四角無限または有限な領域を扱うが、その際の境界条件はすべて 0 に固定されているとする。信号は初期状態設定として与えられ、特定のセルのみが時刻 1 において状態 '1' になっているものとする。任意の時刻  $t$  における、考えている領域のすべてのセルの状態が記述できれば、信号伝播の様相も理解できる。

しきい素子はニューロンの一つのモデルと考えられるが、本文では特にそのことを意識しているわけではない。二次元セル空間の解析を行なうに際して、セルの遷移関数をしきい値関数に限定したということである。このように限定しても、対象が二次元であるため、一般に系は十分複雑になり、いく

つかの興味ある現象を観察することができる。

### 二次元しきい値関数セル空間の定義

二次元の格子点の集合  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  ( $\mathbb{Z}$ : 整数の集合), またはその部分集合の各点に, 同じ遷移関数を持つ,  $\tau$ -セルオートマトン  $(S, f)$  が配列されているとする. ここに  $S = \{0, 1\}$  で, 遷移関数  $f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$  は次のようなしきい値関数で与えられるとする.



状態  $x_0$  のセルの近傍

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = [a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 - \theta].$$

ここに  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$  は各々結合係数であり,  $\theta$  はしきい値である. また,  $[g]$  は  $g \geq 0$  の時 1,  $g < 0$  の時 0 とする.

以下の考察においては, しきい値  $\theta$  は正であるとする. 即ち, いわゆる静止状態 (quiescent state) '0' の存在を仮定することになる. 考えている領域のすべてのセルは同期的に動作するものとし, 時刻は整数値で表示する.

### §2. 四分無限セル空間の信号伝播パターン

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  の任意の元を  $(x, y)$  とする.  $(x, y)$  に関して, 次のような 4 つの四分無限領域を考える.

$$QS_a(x, y) = \{ (u, v) \mid u \geq x, v \leq y, (u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \}$$

$$QS_b(x, y) = \{ (u, v) \mid u \leq x, v \leq y, (u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \}$$

$$QS_c(x, y) = \{ (u, v) \mid u \geq x, v \geq y, (u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \}$$

$$QS_d(x, y) = \{ (u, v) \mid u \leq x, v \geq y, (u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \}$$

$QS_p(x, y)$  ( $p = a, b, c$  又は  $d$ ) の各点に  $\mathbb{Z}$  で定義されたセル  $(S, f)$  が配列され, 境界条件はすべて  $0$  に固定されている系を考える. 任意の時刻  $t$  における系の状態配列

$C_{p(x, y)}(t)$  は  $QS_p(x, y)$  から  $S$  への関数であり, 大域的状態遷移関数を  $F$  と書けば,  $F(C_{p(x, y)}(t)) = C_{p(x, y)}(t+1)$  となる. 初期状態配列  $C_{p(x, y)}(1)$  を次のように定める.

$$C_{p(x, y)}(1)(u, v) = \begin{cases} 1 & (u, v) = (x, y) \text{ の時} \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases}$$

$QS_p(x, y)$  における  $(S, f)$  の信号伝播パターンとは,

$$C_{p(x, y)}(1), C_{p(x, y)}(2), \dots, C_{p(x, y)}(t), \dots$$

なる系列のことである.

伝播パターンのタイプは任意の  $p$  ( $a, b, c$  又は  $d$ ) について言わねるものであるが, 説明の簡単のため,  $p = a$  の場合について述べる.

$C_a(x, y)(t)$  における  $k$  対角成分  $X_k(t)$  とはベクトル

$$(C_a(x, y)(t)(x, y-k+1), C_a(x, y)(t)(x+1, y-k+2), \dots, C_a(x, y)(t)(x+k-1, y))$$

のことである. ベクトル  $(0, 0, \dots, 0)$ ,  $(1, 1, \dots, 1)$  をそれぞれ

0, 1 と書く。初期状態配列についての仮定より,

$$X_1(1) = 1, \quad X_k(1) = 0 \quad (k \geq 2) \text{ である.}$$

さらに一般に  $X_k(t) = 0$  が任意の  $k \geq t+1$  について成立する。

ここで、次のような伝播パターンを考えよう。

M	DB	W	B	.
$X_k(t) = 1$ ( $1 \leq k \leq t$ )	$X_{t-1}(t) = X_t(t) = 1$ $X_k(t) = 0$ ( $1 \leq k \leq t-2$ )	$X_t(t) = X_{t+1}(t) = \dots = 1$ $X_{t-1}(t) = X_{t-2}(t) = \dots = 0$	$X_t(t) = 1$ $X_k(t) = 0$ ( $1 \leq k \leq t-1$ )	$X_k(t) = 0$ ( $2 \leq k$ ) $X_i(t) = 0 (t \geq 2) \rightarrow 0$ $X_i(t) = 1 \rightarrow 1$ と表記

パターンの名前は各 Mass, Double Bar, Wave, Bar の頭文字をとって付けてある。さらに表中の 1 を  $(1, 0, 0, \dots, 0)$  または  $(0, 0, \dots, 0, 1)$  と置きかえた場合のパターン名は、元の名前に各 Mass 矢印  $\downarrow$  または  $\rightarrow$  を付けて呼ぶことにする。例えば  $X_k(t) = (1, 0, 0, \dots, 0)$  ( $1 \leq k \leq t$ ) なる伝播パターンは  $M\downarrow$  であり、 $X_{t-1}(t) = X_t(t) = (0, 0, \dots, 0, 1)$ ,  $X_k(t) = 0$  ( $1 \leq k \leq t-2$ ) なるパターンは  $\overline{DB}$  と名付けられる。

$p = a$  以外の場合についても、遷移関数および状態配列を  $x$  軸または  $y$  軸に関して折りまげることにより、同様な伝播パターン  $M, DB, W, B, 0, 1$  を考えることができる。この場合には矢印  $\uparrow, \leftarrow$  もあらわれる。同じ文字で示されるパターン (矢印の付いたものと付かないもの) をまとめてタイプ

$\rho$  と呼び、各々  $M, DB, W, B \cdot$  と書く。

補題 1.  $(S, f)$  が  $QS_a(x, y)$  において各々の伝播パターンをとる条件は下表の通りである。

		M	DB	W	B
無印	$(a_1), (a_4)$	$(a_0 + a_2 + a_3)$	$(\overline{a_0 + a_2 + a_3})$	$(a_2 + a_3)$	$(\overline{a_2 + a_3})$
↓	$(a_1), (\overline{a_4})$	$(a_0 + a_3)$	$(\overline{a_0 + a_3})$	$(a_3)$	$(\overline{a_3})$
→	$(\overline{a_1}), (a_4)$	$(a_0 + a_2)$	$(\overline{a_0 + a_2})$	$(a_2)$	$(\overline{a_2})$
·	$(\overline{a_1}), (\overline{a_4})$	1		0	
		$(a_0)$		$(\overline{a_0})$	

但し、 $(a)$  とは  $a \geq \theta$ ,  $(\overline{a})$  とは  $a < \theta$  の意味である。

証明. 伝播パターン  $M$  の場合について証明する。(他の場合も同様にして証明される。) まず、 $(a_1), (a_4), (a_0)$  が  $(a_0 + a_2 + a_3)$  が満たされているとする。  $t=2$  の時、 $X_1(2) = X_2(2) = 1$  となりパターン  $M$  の要件を満たしている。  
 $t \leq r$  の時  $M$  の要件を満たしているとする。  $X_k(t) = 1$  ( $1 \leq k \leq t \leq r$ ) となる。  $t = r+1$  の時、 $(a_1), (a_4)$  の条件よりまず  $X_{r+1}(r+1) = 1$  となり、同様に  $X_k(r+1)$  ( $1 \leq k \leq r$ ) も  $1$  となり、 $t = r+1$  の時も  $M$  の要件を満たす。逆に、伝播パターンが  $M$ , 即ち  $X_k(t) = 1$  ( $1 \leq k \leq t$ ) とすると、 $t=2, t=3$  とおくことにより  $(a_1), (a_4), (a_0), (a_0 + a_2 + a_3)$  が導かれる。(証明終)

補題1の条件がすべての場合をつくしていきことに注意する。  
 $QS_p(x, y)$  ( $p = b, c, d$ ) における伝播パターンについても上と同様な関係が成立し、その結果、次の補題が成立する。

補題2  $(S, f)$  の  $QS_p(x, y)$  における信号伝播パターンは次の5つのタイプのいずれかに分類される。

M : M,  $\vec{M}$ ,  $\overleftarrow{M}$ , M↓, M↑;

DB : DB,  $\vec{DB}$ ,  $\overleftarrow{DB}$ , DB↓, DB↑;

W : W,  $\vec{W}$ ,  $\overleftarrow{W}$ , W↓, W↑;

B : B,  $\vec{B}$ ,  $\overleftarrow{B}$ , B↓, B↑;

⋮ : 0, 1.

さて、与えられた  $(S, f)$  の  $QS_p(x, y)$  における伝播パターンを  $X_p$  とする時、 $(X_a, X_b, X_c, X_d)$  を  $f$  の伝播タイプと呼ぶことにする。 $f$  の伝播タイプには、例えば、 $(M, DB↓, \overleftarrow{DB}↓)$  や  $(W, W↓, B, W↑)$  といったものがある。

補題3  $(S, f)$  の伝播タイプを  $(X_a, X_b, X_c, X_d)$  とする時、次のような性質がある。

(1)  $X_a, X_b, X_c, X_d$  はすべて  $\{M, DB, 1\}$  の元であるか、  
 $\{W, B, 0\}$  の元である。

(2)  $X_a = X$  の時 (即ち  $X↓$  や  $\overleftarrow{X}$  でない時),  $X_d$  には DB

または  $B$  のタイプはあふれぬ。

(3)  $X_a = X \downarrow$  の時  $X_c = X \uparrow$  ( $M \uparrow$  または  $W \uparrow$ ) か  $\cdot$  となる。

(4)  $X_a = \bar{X}$  の時  $X_b = \bar{X}$  ( $\bar{M}$  または  $\bar{W}$ ) か  $\cdot$  となる。

証明. (略)

補題3からも明らかのように,  $f$  の伝播タイプとしては, あらゆる限られた組合せのみが存在し得るわけで, 伝播タイプの種類は 88 である。

### §3. 有限セル空間の信号伝播パターン

長方形領域  $R_M^N = \{ (u, v) \mid 1 \leq u \leq N, 1 \leq v \leq M, (u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \}$  を考え, 先と同様に  $R_M^N$  の各点に  $(S, f)$  が配列されており, 周囲の境界条件はすべて 0 に固定されているとする. 時刻  $t$  の状態配列  $C_M^N(t)$  は  $R_M^N$  から  $S$  の写像である. 初期状態配列を

$$C_M^N(1)(u, v) = \begin{cases} 1 & (u, v) = (1, M) \text{ の時,} \\ 0 & \text{その他の場合.} \end{cases}$$

と仮定する.

さて, 任意の時刻  $t$  における状態配列  $C_M^N(t)$  を, 先に考察した四角無限空間での状態配列  $C_{p(x,y)}(t')$  のある種の重ね合せで表現することを考えよう.

まず重ね合せに関するいくつかの定義を行なう.  $A, B$  を

各々ある  $(S, f)$  の四分無限空間での状態配列とする。即ち、

$$A = C_p(x, y)(t), \quad B = C_{p'}(x, y)(t')$$

OR 演算  $(A + B)(u, v) = A(u, v) \vee B(u, v)$

AがBに優先

$$(A + B)(u, v) = \begin{cases} A(u, v) & (u, v) \text{ が } t \text{ 対角成分} \\ & \text{と } (x, y) \text{ で囲まれる} \\ & \text{三角形内にある時,} \\ (A+B)(u, v) & \text{その他の場合} \\ & \text{OR 演算} \end{cases}$$

Bを無視  $(A + B)(u, v) = A(u, v)$

これらの演算を使って、次の定理が得られる。

定理 1.  $(S, f)$  および  $M, N$  が与えられた時

$$C_M^N(t) = C_{a(l, M)}(t) + C_{b(N, M)}(t - N + 1) + C_{c(l, l)}(t - M + 1) + C_{d(N, l)}(t - M - N + 1) \Big|_{R_M^N}$$

となる。但し、時刻が負または 0 となる項はすべて 0 とする。またここで和 (+) は次の規則により、 $\Big|_{R_M^N}$  はその結果を  $R_M^N$  の領域に制限することを意味する。

$X_a$  が  $M, DB, W$  または  $B$  の時

- 1)  $X_p$  の中に  $DB(B)$  と  $M(W)$  があれば  $DB(B)$  が  $M(W)$  に優先する。
- 2)  $X_p$  の中に矢印の付かない 2 つ以上の同じ伝播パターンがあれば、 $X_a$  のそれが優先する。
- 3) その他の場合は OR 演算



$X_a$ が $X \downarrow$ の時	$C_b, C_d$ を無視して	}	OR演算.
$X_a$ が $\bar{X}$ の時	$C_c, C_d$ を無視して		
$X_a$ が $0$ または $1$ の時	$C_b, C_c, C_d$ を無視して		

証明. 可能な  $f$  の伝播タイプについて, 補題1およびそれと類似の結果を使って証明する. 詳細は略.

定理1によって,  $C_M^N(t)$  が到達する周期パターンを知ることが出来る.  $t=1$  において  $(1, M)$  におかれた '1' が対角方向の  $(N, 1)$  に達するのには  $a_1 \geq \theta, a_4 \geq \theta$  の場合であるが, この時の到達周期パターンは次のようになる.

系1.  $a_1 \geq \theta, a_4 \geq \theta$  の場合  $C_M^N(t)$  が到達する周期パターンは下表の通り.

$X_a = M$	$X_a = DB$	$X_a = W$	$X_a = B$
$\alpha = a_0 + a_1 + a_2$	$\alpha = a_0 + a_2$	$\alpha = a_1 + a_2$	$\alpha = a_2$
$\beta = a_0 + a_3 + a_4$	$\beta = a_0 + a_3$	$\beta = a_3 + a_4$	$\beta = a_3$
$([\alpha], [\beta])$		$([\alpha], [\beta])$	
$z \geq \theta \rightarrow [z] = 1$		$z \geq \theta \rightarrow [z] = 01$	
$z < \theta \rightarrow [z] = 0^+$		$z < \theta \rightarrow [z] = 0$	

但し,  $([\alpha], [\beta])$  は到達するパターンの  $M$  行目  $([\alpha])$ ,  $N$  列目  $([\beta])$  を示しており,  $0^+ = 000 \dots 01$ ,  $01$  は  $0101 \dots 01$  と  $1010 \dots 10$  の振動を示す. また  $I = (1, 1)$ ,  $(01, 01)$  の場合を除いて, 到達パターンの  $(M-1) \times (N-1)$

小行列部分は0であり,  $(1, 1)$  の場合は全体が1,  
 $(01, 01)$  の場合は全体がチェッカー・ボード・パターンの振動と  
なる。

初期状態配列をさらに一般的に'1'がどこにあっても(個数は  
当面一つに限る) いいとした場合についても定理1と同様な  
重ね合せが行なえるのかどうか検討中である。

討論頂いた西尾助教授はじめ研究室の皆さんに感謝する。

## [Discussion]

Q. 1次元はどうなりますか。

A. 2次元の場合が縮退したと考えて、同様な結果を得る。

Q. 3次元にするとか、1つの素子が回りの4個だけでなく9個と関係しているとかするとどうなりますか。

A. 非常に場合が多くなって難しい。

C. 上の質問と関連してですが、ここでの議論は色々な条件があっとうまくいったと思う。条件をはずせばどうなるか、逆に言えば、それぞれの条件が今述べた変数にどのように効いているのかに興味がある。今の場合条件とは、

1. 閾値関数に限ったこと、

2. 1つの素子は隣接している素子とだけ関係をもつ、

3. Topology 的なもの、すなわち1つの素子を四角形で表わしていることまた global には四半面を考えていること。