数理解析研究所講究録
第 182 巻 1973 年 1-24

群のAmenabilityと表現論

鹿児島大学 教養部 酒井幸吉

はじめに

群あるいは半群に対して，amenabilityという概念がある．これに関する本格的な研究は，J. Dixmier [13]，E. Følner [20, 21] 及び M. M. Day [8, 9] 等により着手された．以来，amenabilityをもつ群，半群について，多くの研究者により詳しく調べられている．今後もこの方面について豊富な理論展開が期待される．本稿では局所Compact群に限定し，amenabilityが群のどの様な性質と関連していかについてのべる．後半では，amenableな変換群及びextremely amenabilityについても触れることにする．多くの結果は半群の場合にも拡張され，議論が複雑になるとはいえ興味深いものがある．amenabilityは，半群上の解析学において，特に有効な役割を果すものと思われる．

〈記号〉 本文では，群Gといえば，局所Compactなものとす

る．G上の関数fに対して，$\bar{f}$，$\tilde{f}$，$\check{f}$は，それぞれ $\bar{f}(g) = \overline{f(g)}$，$\tilde{f}(g) = \overline{f(g^{-1})}$，$\check{f}(g) = f(g^{-1})$ $(g \in G)$によって定まるものとする．また$s \in G$に対して，${}_sf$，f_sは，それぞれ ${}_sf(g) = f(sg)$，$f_s(g) = f(gs)$ $(g \in G)$と定める．一般に，位相空間Xに対して，X上の有界連続関数全体及び有界関数全体の作るBanach空間（ノルムはsup. ノルム）をそれぞれCB(X)，B(X)で表わす．またX上の関数族$\mathfrak{F}$に対して，$\mathfrak{F}_r$は$\mathfrak{F}$に属する実数値関数の全体とする．一般に集合Eに対して，その特性関数を1_Eで表わすことにする．

§1 Amenability

Gは群とする．G上の関数族$\mathfrak{F}$にて，任意の$s \in G$に対して，$f \in \mathfrak{F} \Rightarrow {}_sf \in \mathfrak{F}$であるとき，$\mathfrak{F}$は左不変であるという．いま$\mathfrak{F}$は$L^\infty(G)$の左不変な閉部分空間であり，更に次の条件

(1) $1_G \in \mathfrak{F}$ かつ $f \in \mathfrak{F} \Rightarrow \bar{f} \in \mathfrak{F}$

をみたすものとする．$\varphi \in \mathfrak{F}^*$が次の条件(2)〜(4)をみたすとき，$\mathfrak{F}$上の<u>mean</u>という．

(2) $\varphi(\bar{f}) = \overline{\varphi(f)}$ $(\forall f \in \mathfrak{F})$，(3) $\varphi(1_G) = 1$，

(4) $\mathfrak{F}_r \ni f,\ f \geq 0 \Rightarrow \varphi(f) \geq 0$．

ここで(4)の代りに$\|\varphi\| = 1$としてもよい．更に次の条件

(5) $\varphi({}_sf) = \varphi(f)$ $(\forall (s, f) \in G \times \mathfrak{F})$

をみたすとき，φは$\mathfrak{F}$上の<u>left invariant mean</u>（以下LIM

と略記する）であるという．もし $L^\infty(G)$ 上にLIMが存在するとき，Gは<u>amenable</u>であるという．

いまG上の関数fにて，任意の $\varepsilon>0$ に対して，Gの単位元の近傍Uが存在して

$$|f(ug)-f(g)|<\varepsilon \quad (\forall (u,g)\in U\times G)$$

となるとき，fは左一様連続であるという．有界な左一様連続な関数の全体をLUC(G)で表わす．このときCB(G)，LUC(G)は $L^\infty(G)$ の左不変な閉部分空間であり，条件(1)をみたすものである．$L^\infty(G)$ 上のLIMはCB(G)，LUC(G)上のLIMとみなせるが，逆に次の結果がある．

定理1（Greenleaf [34]）．<u>CB(G)またはLUC(G)上にLIMが存在すれば，Gはamenableである．</u>

いま $P(G)=\{\alpha\in L^1_r(G):\ \alpha\geq 0,\ \|\alpha\|_1=1\}$ とおき，Hulanicki [40] で導入された，(5)より強い条件

(6) $\quad \varphi(\alpha * f)=\varphi(f) \quad (\forall (\alpha,f)\in P(G)\times L^\infty(G))$

を考える．$L^\infty(G)$ 上のmean φ が(6)をみたすとき，<u>topological left invariant mean</u>（TLIMと略記）という．TLIMはLIMであることは明らかであるが，つい最近次の結果がえられた．

定理2（Renaud [60]）．<u>$L^\infty(G)$ 上のLIMは，TLIMになる．</u>

Compact群G上のHaar積分はCB(G)上のLIMであるから，

Compact群はamenableである．またabel群もamenableになる（[13]）．更に次の定理より，solvable群もamenableになることがわかる．

定理3（Rickert [62]）．(i) Gがamenableならば，その閉部分群もamenableである．

(ii) NはGの閉正規部分群とする．Gがamenableならば，G/Nもamenableになる．

(iii) Gの閉正規部分群Nに対して，N及びG/Nがamenableならば，Gもamenableである．

定理1～3はamenableな群の研究において，基本的な役割を果すものである．

さてamenableでない群の例として，[13]で指摘されているように，二つの生成元をもつ自由群F_2（discrete群として）がある．更にDixmierは"discrete群がamenableであるための必要十分条件は，F_2を部分群として含まないことである"ということを予想している．最近Keller [42]がこの問題について一定のアプローチを試みているが，まだ解決をみるに至っていない．

以上LIMだけを対象としてきたが，right invariant mean（RIMと略記）も同様に定義される．いまφは$L^\infty(G)$上のLIM [RIM]とすると，$\check{\varphi}(f) = \varphi(\check{f})$　$({}^\forall f \in L^\infty(G))$によ

って $\check{\varphi}$ を定めると，これは RIM [LIM] になる．従って $L^\infty(G)$ 上の LIM の存在と RIM の存在は同値になる．更に，LIM であると同時に RIM でもあるものが存在する．しかし半群の場合は，LIM の存在は必ずしも RIM の存在を意味しないので，left amenable，right amenable の区別がある．

§ 2.　Dixmier の条件

群 G が amenable であるための条件として，Dixmier [13] 及び Følner [20] によってえられたものについてのべる．いま任意の整数 $n \geqq 1$ に対して，次の型の関数を作る．

$$(7)\qquad h = \sum_{k=1}^{n} ({}_{s_k}f^k - f^k) \qquad (s_k \in G,\ f^k \in CB_r(G)).$$

この様な型の関数の全体を $H(G)$ とする．このとき次の条件 (D) を考える．

(D)：任意の $h \in H(G)$ に対して $\sup_{x \in G} h(x) \geqq 0$.

いま $CB(G)$ 上に LIM φ が存在するとしよう．§ 1 の (3)，(4) は $\inf_{x \in G} f(x) \leq \varphi(f) \leq \sup_{x \in G} f(x) \quad (\forall f \in CB_r(G))$. と同値だから，$h \in H(G)$ に対して $0 = \varphi(h) \leqq \sup_{x \in G} h(x)$ となる．逆に条件 (D) が成立するとき，Hahn-Banach の定理より，$\varphi(H(G)) = 0$，$\varphi(1_G) = 1$ かつ $\|\varphi\| = 1$ となる $\varphi \in CB(G)^*$ が構成される．これは $CB(G)$ 上の LIM である．すなわち，

定理 4．条件 (D) は，G が amenable であることと同値である．

一般に$\mathfrak{F}$は$L^{\infty}(G)$の左不変な閉部分空間とし，§1の条件(1)をみたすとする．この$\mathfrak{F}$についても，(7)型の関数を作り，条件(D)を考えることができ，これは$\mathfrak{F}$上にLIMが存在するための必要十分条件になる([36]，[63])．

さて，Dixmier は CB(G)上にLIMが存在するとき，これを利用して，Gの有界表現はunitary表現にsimilarになることを明らかにした．いまGのHilbert空間上への弱連続な表現$g \to T_g$ $(g \in G)$が，$\sup_{g \in G} \|T_g\| < \infty$ をみたすとき，この表現は有界であるという．

定理5．<u>Gがamenableならば，Gの有界な弱連続表現はunitary表現にsimilarとなる</u>．

このことは，Compact群に対してはよく知られているが，Haar積分の代りにCB(G)上のLIMを用いて，Compact群の場合と同様にしてえられる．更にDixmierは，この定理の逆も成立することを予想している．

§3．　Dayの理論

ここでは，Day [9, §5] がdiscrete半群に対して展開した理論を，局所compact群Gの場合に適用してみよう．いまネット$\{\varphi_\alpha\} \subset P(G)$に対して，次の条件を考える．

(DW):　$\underline{w^*\text{-}\lim_{\alpha} ({}_s\varphi_\alpha - \varphi_\alpha) = 0 \quad (\forall s \in G).}$

(DS):　$\underline{\lim_{\alpha} \|{}_s\varphi_\alpha - \varphi_\alpha\|_1 = 0 \quad (\forall s \in G).}$

$P(G) \subset L^\infty(G)^*$ とみなすと，$P(G)$の各元は$L^\infty(G)$上のmeanと考えることができる．更に$P(G)$は$L^\infty(G)$上のmeanの全体の中でw^*-denseになる．このことより，$\varphi \in L^\infty(G)^*$がLIMならば，ネット$\{\varphi_\alpha\} \subset P(G)$で$\varphi = w^*\text{-}\lim_\alpha \varphi_\alpha$となるものが存在し，このネットは(DW)をみたす．逆に(DW)をみたすネット$\{\varphi_\alpha\} \subset P(G)$が存在すれば，$L^\infty(G)$上のmean全体は$w^*$-compactだから，$\{\varphi_\alpha\}$の$w^*$-cluster pointが存在し，これはLIMになる．従って

定理6. <u>Gがamenableであるための必要十分条件は，(DW)をみたすネット$\{\varphi_\alpha\} \subset P(G)$が存在することである．</u>

いま$P(G)$の中に(DW)をみたすネットが存在すれば，(DS)をみたすネットも存在する．このことは，[9]でも示されているが，Namioka [54]による簡明な証明がある．

定理7. <u>Gがamenableであるための必要十分条件は，(DS)をみたすネット$\{\varphi_\alpha\} \subset P(G)$が存在することである．</u>

§4. Mitchellの理論

J.V. Neumanが群G上のalmost periodicな関数に対して，不変平均の存在証明に用いた方法のアナロジーによって，LUC(G)上にLIMが存在するための条件がえられる．いま，$f \in LUC_r(G)$に対して，$\{f_s : s \in G\}$のconvex hullを作り，これのcompact一様位相による閉包を$\Theta(f)$で表わす．任意の

$f \in LUC_r(G)$ に対して, $\Theta(f)$ が定数関数を含むとき, G は right stationary であるという. そこで $Z(f)=\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda 1_G \in \Theta(f)\}$ とおく. このとき次の定理が成り立つ.

定理8. G が amenable であるための条件は, G が right stationary となることである. このとき, $f \in LUC_r(G)$, $\lambda \in Z(f)$ に対して, $\varphi(f)=\lambda$ となる $LUC(G)$ 上の LIM が存在する.

この定理は, まず discrete 群については Mitchell [50] により示され, 一般の場合は Granirer and Lau [33] により明らかにされた. 更に Wong [72] は, $L^\infty(G)$ 上に TLIM が存在するための条件として, 上と類似の結果を示した.

§5. Følner の条件

1955年 Følner [21] は discrete 群 G に対して, 次の条件を考えた.

$(FC)_d$: 任意の $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < 1$) 及び G の有限集合 K に対して, G の有限集合 E で

$$|E \cap sE| > (1-\varepsilon)|E| \qquad (\forall s \in K)$$

となるものが存在する. ここで $|E|$ は E のカージナル数である. このとき

定理9. discrete 群 G が amenable であるための必要十分条件は, $(FC)_d$ が成立することである.

Følnerは，Dixmierの条件（D）を用いて，上の定理の十分性を示したが，Dayの理論からも明らかである．一方，必要性に関するFølnerの証明は非常に複雑であるが，Namioka [54] はDayの理論（定理7）を用いて簡明な証明を与えている．discrete群については，上の定理は，次節でのべるHulanicki - Reiter理論の内容を完全に含んでいる．いま $f = |E|^{-1} 1_E$，$h = |E|^{-\frac{1}{2}} 1_E$ とおいて，$(FC)_d$ を書きかえてみよう．f に対しては，$f \in L^1(G)$ とみなすと，$f \geq 0$，$\|f\|_1 = 1$ であり，

$$\| f - {}_s f \| < 2\varepsilon \quad (\forall s \in K).$$

となる．このことは，amenableなdiscrete群は，§6の条件 (P_1) をみたすことを示している．一方，h に対しては，$h \in L^2(G)$ とみなすと，$\|h\|_2 = 1$ であり，

$$| h * \tilde{h}(s) - 1 | < \varepsilon \quad (\forall s \in K)$$

となる．これは，amenableなdiscrete群 G では，G 上の定数関数 1_G が $h * \tilde{h}$ 型の正定値関数でcompact一様に近似できることを示すものであり，§6の条件（R）が成立しているのである．

さて条件 $(FC)_d$ を，一般の局所compact群 G に拡張する試みは，Hulanicki [39] でも行われているが，次のEmerson and Greenleaf [16] において与えられたものが自然である．

(FC)：任意の $\varepsilon > 0$ 及び G の任意のcompact集合 K に対し

て，G の compact 集合 U で

$$0<|U|<\infty\ ,\quad |U \triangle sU|/|U|<\varepsilon \quad (\forall s\in K)$$

をみたすものが存在する．ここで $|U|$ は U の Haar 測度であり，$U\triangle sU$ は U と sU の対称差である．

(A): 任意の $\varepsilon>0$ 及び単位元を含む G の任意の compact 集合 K に対して，G の compact 集合 U で

$$0<|U|<\infty\ ,\quad |U \triangle KU|/|U|<\varepsilon \quad (\forall s\in K)$$

をみたすものが存在する．

このとき，[16] は (FC) と (A) は同値であることを示し，更に次の結果を証明している．

定理 10. 条件 (FC)，(A) はいずれも G が amenable であることと同値である．

§6. Hulanicki - Reiter の理論

いま，群 G に対して，次の各条件を考える．

(R): G 上の compact な台をもつ連続関数のネット $\{h_\alpha\}$ が存在して，正定値関数のネット $\{h_\alpha * \tilde{h}_\alpha\}$ が G 上の定数値関数 1_G に compact 一様収束する．

(R)′: G の単位表現は，G の $L^2(G)$ 上の左正則表現に (Fell [18] の意味で) weakly contained である．

(R)″: G の任意の既約 unitary 表現は左正則表現に weakly contained である．

$1 \leqq p < \infty$ に対して,

(P_p): 任意の $\varepsilon > 0$ 及び G の compact 集合 K に対して, $f \in L^p(G)$ で, $f \geqq 0$, $\|f\|_p = 1$ かつ

$$\|f - {}_sf\| < \varepsilon \quad (\forall s \in K)$$

なるものが存在する. とに (P_1) は Reiter の条件といわれるものである.

(J): $L^\infty(G)$ 上に TLIM が存在する.

このとき, (R)$\Leftrightarrow$(R)$'\Leftrightarrow$(R)$''$ であることは Godement [25], Fell [18] の討論よりわかるが, Reiter [57] にて, (R)$\Leftrightarrow$(P_1) なることが明らかにされた. 更に Glicksberg [24] の結果を用いて, Reiter [58] は, G が amenable ならば (P_1) が成立することを示した. 一方, Hulanicki [40] は, (J)$\Rightarrow$(R)$\Rightarrow$(P_1)$\Rightarrow$(J) であることを明らかにした.

定理11. 条件 (R), (P_1) 及び (J) は, いずれも G が amenable であることと同値である.

なお (J) $\Leftrightarrow$ (amenability) であることの直接的な証明は Namioka [55] にあるが, Renaud [60] の結果より TLIM と LIM の区別は不要となったのである. また Stegeman [70] は, (P_1)$\Leftrightarrow$(P_p) ($1 < p < \infty$) であることを示している.

さて, 上の定理より, G の amenability と G の unitary 表現の所謂 weakly containment property との間に密接な関

係があることがわかるが，更にGreenleaf [35]でも，これに関連する結果が示されている．いま次の条件を考える．

(WF1): Gの任意の既約unitary表現T及び任意の閉部分群Hに対して，Tは${}_G\mathrm{U}^{T|H}$にweakly containedである．

ここで$T|H$はTのHへの制限であり，これをGの表現に誘導したものを${}_G\mathrm{U}^{T|H}$としている．

このとき，次の定理が成立する．

定理12. (WF1)はGがamenableであることと同値である．

このことは，Fell [19]で予想されていたものである．

§7. Fixed point property

Gのamenabilityと所謂fixed point propertと密接に結びついている．いま次の条件を考える．

$(FP)_c$: 群Gが局所凸ベクトル空間の凸compact集合Q上にjointly連続かつaffinelyに変換群として作用しているとする．すなわち，$G\times Q\to Q$への連続写像$(g,x)\to gx$で，

$$g_1(g_2x)=(g_1g_2)x \quad , \quad ex=x \quad (g_1,g_2\in G,\ x\in X),$$

$$g(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)=\lambda_1gx_1+\lambda_2gx_2 \quad (\lambda_1,\lambda_2\geqq 0,\ \lambda_1+\lambda_2=1,$$

$x_1, x_2\in X$, $g\in G$) なるものが与えられたとする．このとき，Qの中にG-fixed point x_0 (i.e. $gx_0=x_0$ $(\forall g\in G)$)が存在する．

$(FP)_s$: $(FP)_c$にて，Gの作用がseparately連続であるとおきかえた条件.

いまGが条件$(FP)_c$をみたせば，Gは$LUC(G)$上のmeanの集合上にjointly連続かつaffinelyに作用しているから，fixed pointが存在する．これはLIMに外ならない．従ってGはamenableになる．逆に次の定理がある．

定理13. 条件$(FP)_c$，$(FP)_s$はいずれも$LUC(G)$上にLIMが存在することと同値であり，従ってこれらはGがamenableであることと同値である.

このことは，まずdiscrete群に対してDay [10]により示され，一般の場合にはRickert [62]で(amenability)$\Leftrightarrow$$(FP)_c$となることが明らかにされた．更にMitchell [53]において$(FP)_c \Leftrightarrow (FP)_s$であることが示された．なおamenabilityと各種のfixed point propertに関して，Argabright [2]，Huff [38]，Mitchell [51, 52, 53]，Simon [69]等により詳しく研究されている.

以上群のamenabilityを特徴ずける種々の条件についてのべてきたが，この外，Day [11]，Gilbert [23]，Leptin [47]等により，convolution operatorのある性質とamenabilityが結びつくことが明らかにされている.

§8. amenableな均質空間

群Gとその閉部分群Hに対して，均質空間$Z=G/H$を作り，Z上に一つのquasi-invariant測度νを固定し，$L^1(Z)$, $L^\infty(Z)$, $P(Z)=\{f\in L^1(Z) : f\geq 0,\ \|f\|_1=1\}$などを考える．更に，$G\times Z$上の関数$\lambda(g,z)$は

$$\int f(gz)\,d\nu(z)=\int f(z)\lambda(g,z)\,d\nu(z)\qquad (\forall (g,z)\in G\times L^1(Z))$$

なるものとする．$L^\infty(Z)$上のmeanは§1と同様に定義する．またZ上の関数fに対して，Gの作用l_g $(g\in G)$を$l_gf(z)=f(gz)$ $(z\in Z)$によって定める．いま$L^\infty(Z)$上のmean φが $\varphi(l_gf)=\varphi(f)$ $(\forall (g,f)\in G\times L^\infty(Z))$をみたすとき，<u>G-invariant mean</u>（G-IMと略記）いう．もし$L^\infty(Z)$上にG-IMが存在するとき，Zは<u>G-amenable</u>であるという．一方Z上のG-一様連続な有界関数の全体を，$LUC(Z)$と表わすことにすると，$CB(Z)$, $LUC(Z)$上でも§1と同様に，G-IMを考えることができる．このとき，定理1のアナロジーとして次の結果がある．

定理14（Greenleaf [35]）．<u>$CB(Z)$または$LUC(Z)$上にG-IMが存在すれば，ZはG-amenableである</u>．

いまG自身がamenableならば，Hもamenableであり，更にZもG-amenableになる．逆に次の定理が成立する．

定理15．<u>ZがG-amenableで，Hもamenableならば，Gはamenableになる．</u>

さて，G の amenability を特徴ずける諸条件は，自然に Z の G-amenability を与える条件に拡張される．いま次の諸条件を考える．

$(D)_Z$：任意の $(s_i, f_i) \in G \times CB_r(Z)$ $(i=1\sim n,\ n=1,2,\cdots)$ に対して，$\sup_{z\in Z} \sum_{i=1}^{n} (f_i(s_i z) - f_i(z)) \geq 0$ である．

いま $\varphi \in P(Z)$ に対して，$l_s^* \varphi(z) = \varphi(s^{-1}z)\lambda(s, z)$ $((s, z) \in G \times Z)$ とおく．

$(DW)_Z$：ネット $\{\varphi_\alpha\} \subset P(Z)$ で $w^*\text{-}\lim_\alpha (l_s^*\varphi_\alpha - \varphi_\alpha) = 0$ $(\forall s \in G)$ なるものが存在する．

$(DS)_Z$：ネット $\{\varphi_\alpha\} \subset P(Z)$ で $\lim_\alpha \| l_s^*\varphi_\alpha - \varphi_\alpha \| = 0$ $(\forall s \in G)$ なるものが存在する．

$(P_1)_Z$：任意の $\varepsilon > 0$ 及び G の compact 集合 K に対して，$\| l_s^*\varphi - \varphi \| < \varepsilon$ $(\forall s \in K)$ なる $\varphi \in P(Z)$ が存在する．

$(R)_Z$：G の単位表現は，G の $L^2(Z)$ 上に構成される準正則表現に weakly contained である．

$(FP)_Z^c$：G が局所凸ベクトル空間の凸 compact 集合 Q 上に，jointly 連続かつ affinely に変換群として作用し，更に Q の中に H-fixed point があるとする．このとき，G-fixed point も存在する．

$(FP)_Z^s$：$(FP)_Z^c$ にて，G の作用が separately 連続であるとした条件．

このとき，次のことが成立する．

定理16（Greenleaf [35], Eymard [17]）．条件 $(D)_Z$，$(DW)_Z$，$(DS)_Z$，$(P_1)_Z$，$(R)_Z$，$(FP)_Z^c$，$(FP)_Z^s$ は，いずれも Z が G-amenable であることと同値である．

この定理では，所謂 Følner 型の条件が除かれている．これは，ν が特に invariant である場合に考えられる．

定理17（[35]）．Z 上に G-invariant 測度 ν があるとする．このとき Z が G-amenable であるための必要十分条件は次の $(FC)_Z$ が成立することである．

$(FC)_Z$: 任意の $\varepsilon > 0$ 及び G の compact 集合 K に対して，Z の compact 集合 U で，

$$0 < \nu(U) < \infty \quad , \quad \nu(U \triangle sU)/\nu(U) < \varepsilon \quad (\forall s \in K)$$

となるものが存在する．

一般に位相空間 Z に，群が変換群として作用しているとき，Z に対しても G-amenability を考えることができる．これに関しては，[35] で議論されているが，まだ残されている問題も多い．

§9. Extremely amenability

ここでは S は半群（discrete）であるとする．$B(S)$ 上の mean φ が $\varphi(f \cdot h) = \varphi(f)\varphi(h)$ $(\forall f, h \in B(S))$ をみたすとき，multiplicative であるという．もし $B(S)$ 上

に multiplicative な LIM（MLIM と略記）が存在するとき，S は extremely left amenable（ELA と略記）であるという．ELA な半群については，Mitchell [51]，Granirer [30, 32, 33] において詳しく研究されている．

いま S に対して次の条件を考える．

(ED): 任意の $(s_i, f_i, g_i) \in S \times B(S) \times B(S)$ $(i=1, 2, \cdots, n,\ n=1, 2, \cdots)$ に対して，

$$\sup_{s \in S} \sum_{i=1}^{n} f_i(s)\left(g_i(s_i s) - g_i(s) \right) \geqq 0.$$

(EDS): S 上の dirac 測度のネット $\{\delta_{s_\alpha}\} \subset B(G)^*$ で

$$\lim_{\alpha} \| \delta_{s s_\alpha} - \delta_{s_\alpha} \| = 0 \quad (\forall s \in S)$$

なるものが存在する．

(F): 任意の $a, b \in S$ に対して，common right zero $c \in S$ が存在する．すなわち $ac = bc = c$ となる $c \in S$ が存在する．

(EFP): S の各元が，compact Hausdorff 空間 X 上の連続写像 $s: x \to sx$ $(x \in X)$ を引き起し，$s_1(s_2 x) = (s_1 s_2)x$ $(s_1, s_2 \in S,\ x \in X)$ であるとする．このとき，X は S-fixed point をもつ．

(EM): 任意の $f \in B_r(S)$ に対して，right orbit $\{f_s : s \in S\}$ の pointwise 閉包は S 上の定数値関数を含む．

このとき，次の結果が成立する．

定理18（Granirer [30]）．半群Sに対して，上の各条件（ED），（EDS），（F），（EFP），（EM）は，いずれもSがELAであることと互に同値である．

なお，条件（ED），（EDS），（F），（EM）はextremely amenabilityに対する，それぞれDixmier型，Day型，Følner型，Mitchell型の条件である．Lau [43, 44]はextremely amenabilityを一般化して，N-extremely amenabilityなる考えを導入している．一方，集合Zに対して，半群Sが作用しているとして，ZのS-extremely amenabilityを考えることができる．このとき，上の条件（ED），（EDS）及び（F）は，ZのS-extremely amenabilityを特徴ずける条件に拡張できる．この議論は，筆者の[65]にある．最後にELAな群は，単位元だけから成るtrivialなものに限ることを注意しておく．

おわりに

本稿では，amenabilityを特徴ずけること，すなわちLIMの存在条件を主にのべたが，LIMそのものの性質あるいはLIMの集合の構造についても広く調べられている．この方面からもamenableな群，半群に関する情報が えられる．次頁にある文献リストは，本文で引用したものに限定せず，amenabilityに関連するものを，入手できた範囲で作成したものである．

REFERENCES

[1] L. Aragbright, Invariant means on topological semigroups, Pacific J. Math. 16(1966), 193-203.

[2] ______, Invariant means and fixed points; a sequel to Mitchell's paper, Trans. A. M. S. 130(1968), 127-130.

[3] J. Bunce, Representations of strongly amenable C^*-algebras, Proc. A. M. S. 32(1972), 241-246.

[4] C. Chou, On the size of the set of left invariant means on a semigroup, Proc. A. M. S. 23(1969), 199-205.

[5] ______, On a conjecture of E. Granirer concerning the range of an invariant mean, Proc. A. M. S. 26(1970), 105-107.

[6] ______, On topologically invariant means on a locally compact group, Trans. A. M. S. 151(1970), 443-456.

[7] ______, On a geometric property of the set on invariant means on a group, Proc. A. M. S. 30(1971), 296-302.

[8] M. M. Day, Means for the bounded functions amd ergodicity of the bounded representations of semigroups, Trans. A. M. S. 69(1950), 276-291.

[9] ______, Amenable semigroups, Illinois J. Math. 1(1957),509-544.

[10] ______, Fixed-point theorems for compact convex sets, (correction), Ibid. 5(1961), 585-589, (8(1964),713).

[11] ______, Convolutions, means, and spectra, Ibid. 8(1964),100-111.

[12] A. Derighetti, On the property P_1 of locally compact groups, Comment. Math. Helv.46(1971), 226-239.

[13] J. Dixmier, Les moyennes invariantes dans les semigroupes et leurs applications, Acta. Sci. Math. (Szeged), 12(1950), 213-227.

[14] R. Douglas, On the inversion invariance of invariant means, Proc. A. M. S. 16(1965), 642-644.

[15] H. Dye, On the ergodic mixing theorem, Trans. A. M. S. 118 (1965), 123-130.

[16] W. Emerson and F. Greenleaf, Covering properties and Følner conditions for locally compact groups, Math. Z. 102(1967), 370-384.

[17] P. Eymard, Sur les moyennes invariantes et les representations unitaires, C. R. Acad. Paris, 272(1971),1649-1652.

[18] J. Fell, The dual spaces of C-algebras, Trans. A.M. S. 94 (1960), 365-403.

[19] ______, Weak containment and induced representations of groups,II, Trans. A. M. S. 110(1964), 424-447.

[20] E. Følner, Generalization of a theorem of Bogoliouboff to topological abelian groups with appendix on Banach mean values in non-abelian groups, Math. Scand. 2(1954), 5-18.

[21] ______, On groups with full Banach mean value, Ibid. 3(1955), 243-254.

[22] ______, Note on groups with and without full Banach mean value, Ibid. 5(1957), 5-11.

[23] J. Gilbert, Convolution operators on $L^p(G)$ and properties of locally compact groups, Pacific J. Math. 24(1968),257-268.

[24] I, Glicksberg, On convex hulls of translates, Ibid. 13(1963), 97-113.

[25] R. Godement, Les fonctions de types positif et la theorie des groupes, Trans. A. M. S. 63(1948), 1-84.

[26] E. Granirer, On left amenable semigroups which admit countable

left invariant means, Bull. A. M. S. 69(1963), 101-105.

[27] ______, On amenable semigroups with a finite-dimensional set of invariant means I, II, Illinois J. Math. 7(1963), 32-48, 49-58.

[28] ______, A theorem on amenable semigroups, Trans. A. M. S. 111(1964), 367-379.

[29] ______, On the invariant means on topological semigroups and on topological groups, Pacific J. Math. 15(1965), 107-140.

[30] ______, Extremely amenable semigroups I, II, Math. Scand. 17(1965), 177-197, 20(1967), 93-113.

[31] ______, On the range of an invariant mean, Trans. A. M. S. 125(1966), 384-394.

[32] ______, Functional analytic properties of extremely amenable semigroups, Trans. A. M. S. 137(1969), 53-76.

[33] ______ and A. Lau, Invariant means on locally compact groups, Illinois J. Math. 15(1971), 249-257.

[34] F. Greenleaf, Invariant means on locally compact groups and their applications, Van Nostrand Mathematical studies 16, 1969.

[35] ______, Amenable actions of locally compact groups, J.Functional Analysis, 4(1969), 295-315.

[36] E. Hewitt and K. Ross, Abstract harmonic analysis I, Springer Verlag, 1963.

[37] R. Huff, Some applications of a general Lemma on invariant means, Illinois J. Math. 14(1970), 216-221.

[38] ______, Existence and uniqueness of fixed-points for semigroups of affine maps, Trans. A. M. S. 152(1970), 99-106.

[39] A. Hulanicki, Groups whose regular representation weakly contains all unitary representations, Studia Math. 24(1964), 37-59.

[40] ______, Means and Folner condition on locally compact groups, Ibid. 27(1966), 87-104.

[41] R. Kaufman, Remak on invariant means, Proc. A.M. S. 18(1967), 120-122.

[42] G. Keller, Amenable groups and varieties of groups, Illinois J. Math. 16(1972), 257-269.

[43] A. Lau, Topological semigroups with invariant means in the convex hull of multiplicative means, Trans. A. M. S. 148 (1970), 69-84.

[44] ______, Functional analytic properties of topological semigroups and N-extreme amenability, Ibid,152(1970), 431-439.

[45] ______, Extremely amenable algebras, Pacific J. Math. 33(1970), 329-336.

[46] ______, Invariant means on dense subsemigroups of topological groups, Canad. J. Math. 23(1971), 797-801.

[47] H. Leptin, On locally compact groups with invariant means, Proc. A. M. S. 19(1968), 489-494.

[48] S. Lloyd, A mixing condition for extreme left invariant means, Trans. A. M. S. 125(1966), 461-481.

[49] S. Luthar, Uniqueness of the invariant mean on an abelian semigroup, Illinois J. Math. 3(1959), 28-44.

[50] T.Mitchell, Constant functions and left invariant means on semigroups, Trans. A. M. S. 119(1965), 244-261.

[51] ______,Fixed points and multiplicative left invariant means,

Ibid. 122(1966),195-202.

[52] ______, Function algebras, means, and fixed points, Ibid. 130(1968), 117-126.

[53] ______, Topological semigroups and fixed points, Illinois J. Math. 14(1970), 630-641.

[54] I. Namioka, Følner's conditions for amenable semigroups, Math. Scand. 15(1964), 18-28.

[55] ______, On a recent theorem by H. Reiter, Proc. A.M.S. 17 (1966), 1101-1102.

[56] C. Rao, Invariant means on spaces of continuous or measurable functions, Trans. A.M.S. 114(1965), 187-196.

[57] H. Reiter, Sur la propriete (P_1) et les fonctions de type positif, C.R. Acad. Paris, 258(1964), 5134-5135.

[58] ______, On some properties of locally compact groups, Indag. Math. 27(1965), 697-701.

[59] ______, Classical harmonic analysis and locally compact groups, Oxford Mathematical monographs, 1968.

[60] P. Renaud, Equivalent types of invariant means on locally compact groups, Proc. A.M.S. 31(1972),495-498.

[61] ______, Invariant means on a claas of Von Neumann algebras, Trans. A.M.S. 170(1972), 285-291.

[62] N. Rickert, Amenable groups and groups with the fixed point property, Ibid. 127(1967), 221-232.

[63] G. Robison, Invariant integrals over a class of Banach spaces, Pacific J. Math. 4(1954), 123-150.

[64] W. Rosen, On invariant means over compact semigroups, Proc. A.M.S. 7(1957), 1076-1082.

[65] K. Sakai, Extremely amenable transformation semigroups, to appear in Proc. Japan Acad.

[66] ______, Amenable transformation groups, to appear in Sci. Rep. Kagoshima Univ. 22(1973).

[67] ______, Amenable transformation groups II, to appear in Proc. Japan Acad.

[68] I. Schochetman, Nets of subgroups and amenability, Proc. A.M.S. 29(1971), 397-403.

[69] B. Simon, A remark on groups with the fixed point property, Ibid. 32(1972), 623-624.

[70] J. Stegeman, On a property concerning locally compact groups, Indag. Math. 27(1965), 702-703.

[71] C. Wilde and K. Witz, Invariant means and the Stone-Čech compactification, Pacific J. Math. 21(1967), 577-586.

[72] J. Wong, Topologically stationary locally compact groups and amenability, Trans. A.M.S. 144(1969), 351-363.

[73] ______, Topological invariant means on locally compact groups and fixed points, Proc. A.M.S. 27(1971), 572-578.

[74] ______, Invariant means on locally compact semigroups, Ibid. 31(1972), 39-45.