数理解析研究所講究録
第 182 巻 1973 年 86-101

S6

実双曲型空間上のlaplacianの固有函数のポアッソン積分表示

広大理　峰村勝弘

§0. 序

最近 Helgason は[6]において，単位円内部のPoincaré-metricから作られるlaplacianの固有函数はすべて単位円上の(佐藤の)超函数をPoisson積分して得られることを示した。ここでは一般に実双曲型空間において同様の事実が成立することを述べる。すなわち実双曲型空間上のlaplacianの任意の固有函数は，境界上のある超函数のPoisson積分として表わされる。

§1. 準備

Gを連結な実半単純 Lie grp で中心が有限とする。Gの Lie alg. を$\mathfrak{g}_0$とし $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{k}_0+\mathfrak{p}_0$を一つのCartan分解とする。$\mathfrak{a}_+$を$\mathfrak{p}_0$の一つの max. abelian subsp. $\mathfrak{a}_0$を$\mathfrak{a}_+$を含む$\mathfrak{g}_0$の max. abel. subalg. (従って$\mathfrak{g}_0$のCartan subalg.)とし，$\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{a}_\mathfrak{k}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{p}$をそれぞれ $\mathfrak{a}_+$, $\mathfrak{a}_-=\mathfrak{a}_0\cap\mathfrak{k}_0$, $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{k}_0$, $\mathfrak{p}_0$の$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$における複素化とする。$(\sqrt{-1}\mathfrak{a}_-+\mathfrak{a}_+)^*$と$\mathfrak{a}_+^*$に compatible order を入れ，このorderに関する$(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$の positive root 全体を$P$と記す。$P_+=\{\alpha\in P\,;\,\alpha|\mathfrak{a}_+\neq 0\}$とおく。$\mathfrak{g}^\alpha$で$\alpha$の root subsp. を表わす。

$\alpha \in \mathfrak{a}^+$ に対して $\bar{\alpha}$ で α の $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ 上への制限を表わす。

$\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in P_+}\bar{\alpha}$, $\mathfrak{n} = \sum_{\alpha\in P_+}\mathfrak{g}^{\alpha}$, $\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{n}\cap\mathfrak{g}_0$, とし

K, A, N をそれぞれ $\mathfrak{k}_0, \mathfrak{a}_+, \mathfrak{n}_0$ を Lie alg. とする G の analytic subgroups とする。 $x \in G$ に対して $H(x) \in \mathfrak{a}_+$ を

$x \in K\cdot\exp H(x)\cdot N$ で定める。

$X = G/K$, $B = K/M$ (但し $M = Z_K(A)$) とし, dk, db をそれぞれ K, B 上の K-inv. な normalized meas. とする。

§2. B上の連続函数の Poisson 積分.

以後ことわりのない限り $\mathrm{rank}(X) = 1$ とする。

$s \in \mathbb{C}$ に対し $X\times B$ 上の函数 $P_s(z,b)$ を

$$P_s(xK, kM) = \exp\{-(1+s)\rho H(x^{-1}k)\} \qquad x\in G,\ k\in K$$

で定義し, $\varphi \in C(B)$ (B上の連続函数)に対して X上の函数 $\mathcal{P}_s(\varphi)$ を

$$\mathcal{P}_s(\varphi)(z) = \int_B P_s(z,b)\varphi(b)\,db \qquad z\in X$$

で定義する。

R を K の irred. unit. rep. の equi. class 全体とし, R^0 を とくに M に関して class 1 のもの全体とする。 $R\ni\gamma$ の代表元 (τ^γ, W^γ) をとり fix. $d(\gamma) = \dim W^\gamma$ とおく。 W^γ の orthonormal base $\{w_1^\gamma, \cdots, w_{d(\gamma)}^\gamma\}$ を $\gamma\in R^0$ のときは w_1^γ が M-fixed vector になる様に選んでおく。 $(\ ,\ )$ で W^γ 上の unitary 内積を表わす。

$$\tau_{ij}^{\gamma}(k) = (\tau^{\gamma}(k) w_j^{\gamma}, w_i^{\gamma})$$
$$\varphi_{ij}^{\gamma}(k) = d(\gamma)^{1/2}\,\overline{\tau}_{ij}^{\gamma}(k)$$
$$\varphi_i^{\gamma} = \varphi_{i1}^{\gamma} \quad (\gamma \in R^0)$$

とおく。π を K の $C(K)$, $C(B)$, $C(X)$ 上での left regular rep. とする。

$$V^{\gamma} = \{ f \in C(K) \mid f \text{は} \pi \text{の下で} \gamma \text{に従って変換する} \}$$

とおく。Kostant [10] の結果から、$\gamma \in R^0$ のとき W^{γ} の M-fixed vector は scalar 倍を除いて w_1^{γ} に一致するから

$$L^2(B) = \sum_{\gamma \in R^0} V^{\gamma},$$
$$V^{\gamma} = \sum_{i=1}^{d(\gamma)} \mathbb{C}\,\varphi_i^{\gamma} \quad (\gamma \in R^0).$$

Δ を $X = G/K$ 上の、$\mathfrak{g}_0$ の Killing form から得られる G-inv. riemannian metric に対応する laplacian とし、$s \in \mathbb{C}$ に対して

$$\mathcal{H}_s(X) = \{ f \in C^{\infty}(X) \mid \Delta f = (s^2-1)\langle \rho, \rho \rangle \}$$
$$\mathcal{H}_s^{\gamma}(X) = \{ f \in \mathcal{H}_s(X) \mid f \text{は} \pi \text{の下で} \gamma \text{に従って変換する} \}$$

μ_0 を positive reduced restricted root とする。

$$P_{\mu_0} = \{ \alpha \in P_+ \mid \overline{\alpha} = \mu_0 \} \qquad p = \# P_{\mu_0}$$
$$P_{2\mu_0} = \{ \alpha \in P_+ \mid \overline{\alpha} = 2\mu_0 \} \qquad q = \# P_{2\mu_0}$$

とおく。$\mathbb{C}$ 上の函数 $e(s)$ を

$$e(s) = \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{p}{2} + 1 + \left(\tfrac{p}{2} + q\right)s\right)\right)^{-1} \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{p}{2} + q + \left(\tfrac{p}{2} + q\right)s\right)\right)^{-1}$$

で定めると．Helgason [6] における結果より次の命題を得る。

<u>命題 2.1.</u> (1) $\mathcal{P}_s$ は $C(B)$ を $\mathcal{H}_s(X)$ に写す.

(2) $e(s) \neq 0 \Longleftrightarrow \mathcal{P}_s$ が $C(B)$ 上 1:1

(3) $\mathcal{H}_s^\gamma(X) \neq \{0\} \Rightarrow \gamma \in R^0$

(4) $\mathcal{P}_s(V^\gamma) \subset \mathcal{H}_s^\gamma(X)$ $(\gamma \in R^0)$. もし $\mathcal{P}_s$ が V^γ 上 1:1 なら

$\mathcal{P}_s(V^\gamma) = \mathcal{H}_s^\gamma(X)$.

以後．$f_{si}^\gamma = \mathcal{P}_s(\varphi_i^\gamma)$ $f_s^\gamma = f_{s1}^\gamma$ とおく.

<u>命題 2.2.</u> $e(s) \neq 0$, $f \in \mathcal{H}_s(X)$ とする

(1) ある $a_i^\gamma \in \mathbb{C}$ が存在して $\forall z \in X$ に対し

$$f(z) = \sum_{\gamma \in R^0} \sum_{i=1}^{d(\gamma)} a_i^\gamma f_{si}^\gamma(z) \qquad (\text{絶対収束})$$

(2) $\varphi_f^z(k) = f(kz)$ $(k \in K)$ とおくと

$$\varphi_f^z = \sum_{\gamma \in R^0} d(\gamma)^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{d(\gamma)} a_i^\gamma f_{sj}^\gamma(z) \varphi_i^\gamma \qquad (K\text{上一様収束})$$

(3) $\| \ \|$ を $L^2(K)$ の norm とすると，

$$\|\varphi_f^z\|^2 = \sum_{\gamma \in R^0} d(\gamma)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{d(\gamma)} |a_i^\gamma|^2\right) \left(\sum_{j=1}^{d(\gamma)} |f_{sj}^\gamma(z)|^2\right).$$

$\mathfrak{L}$ で $\mathfrak{g}$ の universal enveloping algebra を表わし．$\mathfrak{L}$ の元を G 上の left-invariant differential operator とみなす。Ω を $\mathfrak{L}$ の Casimir element とすると $f \in C^\infty(X)$ に対し

$$(\Delta f)(xK) = \Omega f(x).$$

一方 $u \in \mathfrak{L}\mathfrak{k}$ ならば $f \in C^\infty(X)$ に対して $uf = 0$ on X だから

Ω を modulo $\mathfrak{L}\mathfrak{k}$ で変形できる。$X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$ を $\langle X_\alpha, X_{-\alpha}\rangle = 1$,
$H_1 \in \mathfrak{a}_\mathfrak{p}$, $H_2, \dots, H_m \in \mathfrak{a}_\mathfrak{k}$ を, $\{H_1, \dots, H_m\}$ が $\mathfrak{a}$ の base で

$$\langle H_i, H_j \rangle = \delta_{ij}$$

になる様に選んでおく。$X_\alpha = Z_\alpha + Y_\alpha$ ($Z_\alpha \in \mathfrak{k}$, $Y_\alpha \in \mathfrak{p}$) と分解して

$$\omega_{\mu_0} = \sum_{\alpha \in P_{\mu_0}} (Z_\alpha Z_{-\alpha} + Z_{-\alpha} Z_\alpha)$$

$$\omega_{2\mu_0} = \sum_{\alpha \in P_{2\mu_0}} (Z_\alpha Z_{-\alpha} + Z_{-\alpha} Z_\alpha)$$

とおく。$\mu_0(H_0) = 1$ なる $H_0 \in \mathfrak{a}_+$ の元により $a_t = \exp tH_0$ ($t \in \mathbb{R}$)
とおいて A に parameter を導入する。このとき

<u>命題2.3.</u> $f \in \mathcal{H}_s(X)$ に対して $\sigma = p/2 + q$ とおくと、

$$\frac{d^2}{dt^2} f(a_t k) + (p \coth t + 2q \coth 2t) \frac{d}{dt} f(a_t k)$$
$$- \frac{2p+8q}{(\sinh t)^2} [\pi(\omega_{\mu_0}) f](a_t k) - \frac{2p+8q}{(\sinh 2t)^2} [\pi(\omega_{2\mu_0}) f](a_t k)$$
$$+ (1 - s^2)\sigma^2 = 0$$

が成り立つ。

§3. Fatou type の定理.

ここでは、次§において $f_{s,i}^\gamma$ を決定する時に必要な次の定理を述べる。$f_s = P_s(1_B)$ (1_B は B 上恒等的に1をとる函数) とおく。
f_s は Harish-Chandra の球函数 φ_λ ($\lambda = -\sqrt{-1}\, s\rho$) に一致する。

<u>定理3.1.</u> $\mathrm{Re}(s) > 0$ とする。$f_s(ak)$ ($a \in A$) は $\rho(H(a))$ が十分大のとき 0 にならず、$\varphi \in C(B)$ に対して

$$\lim_{P(H(a))\to\infty} \frac{1}{f_s(ak)}(\mathcal{P}_s\varphi)(kak) = \varphi(kM)$$

が K上一様に成立する。

定理3.1の為の補題を述べる。

補題3.2. $s\in\mathbb{C}$ とすると

$$f_s(a_t k) = (\cosh t)^{(s-1)\sigma} F\left(\frac{1-s}{2}\sigma, \frac{1-s}{2}\sigma + \frac{1-q}{2}, \frac{p+q+1}{2}; (\tanh t)^2\right)$$

ここに F は超幾何函数を表わす。

略証. 命題2.3. において $\pi(\omega_{1}\mu_0)f = \pi(\omega_2\mu_0)f = 0$ だから
$z = (\tanh t)^2$ とおいて

$$\frac{d^2}{dz^2}f_s + \frac{(p+q+1)+(q-3)z}{2z(1-z)}\frac{d}{dz}f_s + \frac{(1-s^2)\sigma^2}{4z(1-z)^2}f_s = 0$$

を得る。これを解いて $f_s(ek)=1$ から補題を得る。

補題3.3. $\xi = \mathrm{Re}(s) > 0$ とする。$\exists\delta>0$ があって、十分大なる t に対して

$$2\delta(\cosh t)^{(\xi-1)\sigma} \geq |f_s(a_t k)| \geq \delta(\cosh t)^{(\xi-1)\sigma}$$

が成立する。

系3.4. $\xi = \mathrm{Re}(s) > 0$ とすると. $\exists\eta>0$ があって 十分大なる t に対して.

$$\frac{f_\xi(a_t k)}{|f_s(a_t k)|} \leq \eta$$

が成立する.

<u>補題3.5.</u> $Re(s)>0$ とする。B における eM の任意の近傍 U に対して

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{b\in B-U} \left| \frac{P_s(a_tk, b)}{f_s(a_tk)} \right| = 0$$

<u>定理3.1の略証</u> $a=a_t$ とおく.

$$\mathcal{P}_s(\varphi)(ka_tk) = \int_B P_s(a_tk, b)\varphi(kb)db$$

に注意すれば

$$\left| \frac{1}{f_s(a_tk)} \mathcal{P}_s(\varphi)(kM) - \varphi(kM) \right|$$

$$\leqq \int_B \left| \frac{P_s(a_tk, b)}{f_s(a_tk)} \right| |\varphi(kb) - \varphi(kM)|\, db$$

$\varphi\in C(B)$ より 任意の $\varepsilon>0$ に対してある近傍 $U\ni eM$ で

$$|\varphi(kb) - \varphi(kM)| < \varepsilon \quad (b\in U)$$

が任意の $k\in K$ に対して成り立つものが存在する。

$$m = 2\sup_{b\in B} |\varphi(b)|$$

とおけば

$$\int_B \left| \frac{P_s(a_tk, b)}{f_s(a_tk)} \right| |\varphi(kb) - \varphi(b)|\, db$$

$$\leqq \varepsilon \int_U \left| \frac{P_s(a_tk, b)}{f_s(a_tk)} \right| db + m \sup_{b\in B-U} \left| \frac{P_s(a_tk, b)}{f_s(a_tk)} \right|$$

$$\leqq \varepsilon \frac{f_\sigma(a_tk)}{|f_s(a_tk)|} + m \sup_{b\in B-U} \left| \frac{P_s(a_tk, b)}{f_s(a_tk)} \right|$$

従って系3.4と補題3.5からすぐ証明される。

§4. 実双曲型空間上のlaplacianのK-finite固有函数

以後 $G=SO_0(n,1)$(一般ローレンツ群)として話を進める。極大部分群Kは$SO(n)$に同型で $X=G/K$ は実双曲型空間と呼ばれる。

$G=SO_0(n,1)$に関する性質を少し列記する。([15]参照)

(1) $P_{\mu_0}=P_+$, $P_{2\mu_0}=\phi$, $p=n-1$, $q=0$.

(2) ω_KをKのCasimir作用素とし、$\mathfrak{m}_0$をMのリー環とすると、

$$\omega_{\mu_0}\equiv\frac{n-2}{n-1}\omega_K \mod \mathfrak{m}_0\mathfrak{U}.$$

(3) R^0はN^0と同一視出来て、その同一視の下では、次の性質がある。

$l\in N^0$, $f\in \mathcal{H}_s^l$とすると

$$\pi(\omega_K)f=\lambda_l f \qquad 但し\ \lambda_l=\frac{l(l+n-2)}{2(n-2)}.$$

(2),(3)より $f\in\mathcal{H}_s^l$ならば $a\in A$に対して

$$[\pi(\omega_{\mu_0})f](a)=\frac{l(l+n-2)}{2(n-1)}f(a)$$

が成り立つ。従って命題2.3より次の補題を得る。

<u>補題4.1.</u> $l\in N^0$, $f\in\mathcal{H}_s^l$とすると、

$$\frac{d^2}{dt^2}f+(n-1)\coth t\frac{df}{dt}-\frac{l(l+n-2)}{(\sinh t)^2}f+(1-s^2)\sigma^2f=0.$$

$z=(\tanh\frac{t}{2})^2$ で変数変換すると補題4.1の微分方程式は

$$z(1-z)^2\frac{d^2f}{dz^2}+\frac{1}{2}(1-z)(nz-4z+n)\frac{df}{dz}$$
$$-\ell(\ell+n-2)\frac{(1-z)^2}{4z}+(1-s^2)\sigma^2 f=0$$

となる。この微分方程式の解の基本系は

$$z^{\frac{\ell}{2}}(1-z)^{(1-s)\sigma}F(\ell+(1-s)\sigma, -s\sigma+\tfrac{1}{2}, \ell+\sigma+\tfrac{1}{2}; z),$$
$$z^{-\frac{\ell+1}{2}-\sigma}(1-z)^{(1-s)\sigma}F(-\ell-(1+s)\sigma+1, -s\sigma+\tfrac{1}{2}, -\ell-\sigma+\tfrac{3}{2}; z)$$

で与えられる。$f\in\mathcal{H}_s^\ell$ は t に関して C^∞ だから f は最初の解の定数倍で与えられる。即ち ある $c\in\mathbb{C}$ が存在して $f\in\mathcal{H}_s^\ell$ は

$$f(a_{2t}K)=c\,(\tanh t)^\ell(\cosh t)^{2(s-1)\sigma}$$
$$\times F(\ell+(1-s)\sigma, -s\sigma+\tfrac{1}{2}, \ell+\sigma+\tfrac{1}{2}; (\tanh t)^2)$$

と表わされる。

ここで $f_s=\mathcal{P}_s(1_B)=f_{s1}^0\ (=f_s^0)$ に注意する。$f_s(eK)=1$ だから，$c=1$ 即ち

$$f_s(a_{2t}K)=(\cosh t)^{2(s-1)\sigma}F((1-s)\sigma, -s\sigma+\tfrac{1}{2}, \sigma+\tfrac{1}{2}; (\tanh t)^2).$$

今 $\mathrm{Re}(s)>0$ と仮定する。このとき（[11, p.244]）

$$\lim_{z\uparrow 1}F(\ell+(1-s)\sigma, -s\sigma+\tfrac{1}{2}, \ell+\sigma+\tfrac{1}{2}; z)=\frac{\Gamma(\ell+\sigma+\frac{1}{2})\Gamma(2s\sigma)}{\Gamma(s\sigma+\frac{1}{2})\Gamma(\ell+(1+s)\sigma)}$$

従って $\varphi\in V^\ell$，$f=\mathcal{P}_s(\varphi)$ とおくと $f\in\mathcal{H}_s^\ell$ で，

$$\lim_{t\to\infty}\frac{f(a_{2t}K)}{f_s(a_{2t}K)}=c\,\frac{\Gamma(\ell+\sigma+\frac{1}{2})}{\Gamma(\sigma+\frac{1}{2})}\cdot\frac{\Gamma((1+s)\sigma)}{\Gamma(\ell+(1+s)\sigma)}$$

一方定理3.1より

$$\lim_{t\to\infty}\frac{f(a_{2t}K)}{f_s(a_{2t}K)}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{f_s(a_{2t}K)}\mathcal{P}_s(\varphi)(a_{2t}K)=\varphi(eM)$$

従って $Re(s)>0$ のとき、

$$f(a_{2t}K)=\varphi(eM)\,e(l,s)(\tanh t)^{l}(\cosh t)^{2(s-1)\sigma}$$
$$\times F(l+(1-s)\sigma,-s\sigma+\tfrac12,l+\sigma+\tfrac12;(\tanh t)^2) \quad \cdots\cdots(*)$$

が成り立つ。但し

$$e(l,s)=\frac{\Gamma(\sigma+\frac12)\Gamma(l+(1+s)\sigma)}{\Gamma(l+\sigma+\frac12)\Gamma((1+s)\sigma)}.$$

ところが $e(l,s)$ は l を固定した時 s の多項式で従って $\mathbb{C}$ 上 holomorphic. 従って l, t を固定すると $(*)$ の両辺は s に関して holomorphic. よって一致の定理より $(*)$ は任意の $s\in\mathbb{C}$ に対して成立する。よって

<u>命題4.2.</u> $s\in\mathbb{C}$, $l\in\mathbb{N}^0$, $\varphi\in V^l$, $f=\mathcal{P}_s(\varphi)$ とすると

$$f(a_{2t}K)=\varphi(eM)\,e(l,s)\,(\tanh t)^{l}(\cosh t)^{2(s-1)\sigma}$$
$$\times F(l+(1-s)\sigma,-s\sigma+\tfrac12,l+\sigma+\tfrac12;(\tanh t)^2)$$

とくに $\varphi=\varphi_i^l$ とおけば、$\varphi_i^l(eM)=\delta_{i1}\,d(l)^{1/2}$ ($d(l)$ は表現 l の degree) だから

命題4.3. $s \in \mathbb{C}$, $l \in N^0$

$$f_s^l(a_{2t}K) = f_{s1}^l(a_{2t}K) = d(l)^{1/2} e(l,s)(\tanh t)^l (\cosh t)^{2(s-1)\sigma}$$
$$\times F(l+(1-s)\sigma, -s\sigma+\tfrac{1}{2}, l+\sigma+\tfrac{1}{2}; (\tanh t)^2).$$
$$f_{si}^l(a_{2t}K) = 0 \quad (2 \le i \le d(l)).$$

§5. $B = K/M$ 上の(佐藤の)超函数のポアッソン積分.

$B = K/M$ は real-analytic に $(n-1)$ 次元球面 S^{n-1} と同相であるので, compact connected orientable な real analytic manifold である。従って B は複素近傍 U をもつ ([2]). U の open set V に対し $H(V)$ で, V 上 holomorphic な函数全体で, compact set 上の一様収束による位相を入れた空間を表わす。このとき, B 上 real analytic function の全体 $\mathcal{A}(B)$ は

$$\mathcal{A}(B) = \underset{V \supset B}{\mathrm{ind.\,lim}}\, H(V)$$

で位相が(通常)導入される。$\mathcal{A}(B)$ から $\mathbb{C}$ への一次写像でこの位相で連続なもの全体を $\mathcal{A}'(B)$ で表わす. $\mathcal{A}'(B)$ の元は analytic functional と呼ばれる ([14]). 一方 B が compact orientable だから (orientation を fix してやれば) 佐藤 [18] により $\mathcal{A}'(B)$ は B 上の(佐藤の)超函数の空間 $\mathcal{B}(B)$ に同型となる。以下, $\mathcal{A}'(B)$ の代りに $\mathcal{B}(B)$ とかき, 超函数と書く。とくに B が riemannian manifold のときは B 上の laplacian を用いて $\mathcal{B}(B)$

が characterize される。それを次に述べる。

$\mathcal{B}(B) \ni T$ の $\varphi \in \mathcal{A}(B)$ での値を積分の形に

$$\int_B \varphi(b)\, dT(b)$$

と記す。$\mathcal{F}_b \subset \mathbb{C}^{\mathcal{N}}$ を

$$\mathcal{F}_b = \left\{ (a_i^l)_{1 \le i \le d(l)}^{l \in N^0} \;\middle|\; a_i^l \in \mathbb{C},\ \sum_{l \in N^0} \sum_{i=1}^{d(l)} |a_i^l| \exp(-t\lambda_l^{1/2}) < \infty \ \ ({}^\forall t > 0) \right\}$$

$$但し\ \lambda_l = \frac{l(l+n-2)}{2(n-2)}$$

で定義し、$\mathcal{B}(B)$ から $\mathbb{C}^{\mathcal{N}}$ への map Ψ を

$$\Psi(T) = (a_i^l) \quad T \in \mathcal{B}(B)$$

$$a_i^l = \int_B \bar{\varphi}_i^l(b)\, dT(b)$$

で定めると Ψ は $\mathcal{B}(B)$ から $\mathcal{F}_b$ の上への isomorphism である。([, 定理1.8])。$\mathcal{F}_b$ は又

$$\mathcal{F}_b = \left\{ (a_i^l)_{1 \le i \le d(l)}^{l \in N^0} \;\middle|\; a_i^l \in \mathbb{C},\ \sum_{l \in N^0} \sum_{i=1}^{d(l)} |a_i^l|^2 \exp(-t\lambda_l^{1/2}) < \infty \ \ ({}^\forall t > 0) \right\}$$

としても与えられることに注意しておく。

$T \in \mathcal{B}(B)$ に対して T のポアッソン積分を次の様に定義する。$P_s(z, b)$ は b に関して real analytic だから T がほどこせて、

$$\mathcal{P}_s(T)(z) = \int_B P_s(z, b)\, dT(b)$$

とおく。

命題5.1. $T\in\mathcal{B}(B)$, $(a_i^l)=\Phi(T)$ とすると, 任意の $z\in X$ に対して

$$\mathcal{P}_s(T)(z)=\sum_{l\in N^0}\sum_{i=1}^{d(l)} a_i^l f_{si}^l(z)$$

命題5.2. (1) $s\in C$, $(a_i^l)\in\mathcal{F}_b$ に対して

$$\sum_{l\in N^0}\sum_{i=1}^{d(l)} a_i^l f_{si}^l(z)$$

は X 上広義一様絶対収束する。

(2) $e(s)\neq 0$ とし, $f\in\mathcal{H}_s(X)$ を命題2.2によって

$$f=\sum_{l\in N^0}\sum_{i=1}^{d(l)} a_i^l f_{si}^l$$

と展開すると $(a_i^l)\in\mathcal{F}_b$.

命題5.2は f_s^l の具体的な形を用いて証明される。その為に超幾何函数に関するある不等式が必要であるが、ここでは省略する。

命題5.3. $X=G/K$ を§2における条件の空間とし, f_n ($n\in N^0$) は Δ の固有値 μ の固有函数で, $\sum_{n\in N^0} f_n$ が X 上広義一様絶対収束しているものとする。このとき $\sum_{n\in N^0} f_n$ も又 固有値 μ

の Δ の固有函数である

命題5.3は Mean value theorem を用いて証明される。詳しくは Helgason [7, Chap. X, §7] 参照.

定理5.4. Xを実双曲型空間とする。このとき
(1) $\mathcal{P}_s$ $(s\in\mathbb{C})$ は $\mathcal{B}(B)$ から $\mathcal{H}_s(X)$ への写像である。
(2) $e(s)\neq 0$ ならば $\mathcal{P}_s$ は $\mathcal{B}(B)$ から $\mathcal{H}_s(X)$ の上への同型写像である。

系5.5. Δの任意の固有函数はB上のある超函数のある$s\in\mathbb{C}$によるポアッソン積分として得られる。

References

[1] R. Courant and D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics, 2, Interscience, New York (1962).

[2] H. Grauert, On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds, Ann. of Math., 68(1958), 460-472.

[3] Harish-Chandra, Spherical functions on a semisimple Lie group I, Amer.J.Math., 80(1958), 241-310.

[4] M. Hashizume, A. Kowata, K. Minemura and K. Okamoto, an integral representation of an eigenfunction of the laplacian on the euclidean space, Hiroshima Math.J., 2(1972), 535-545.

[5] M. Hashizume, K. Minemura and K. Okamoto, Harmonic fanctions on hermitian hyperbolic spaces, Hiroshima Math.J., 3(1973), 81-108.

[6] S. Helgason, A duality for symmetric spaces with applications to group representations, Advanced in Math., 5(1970), 1-154.

[7] S. Helgason, Differential Geometry and Symmetric Spaces, Academic Press, New York (1962).

[8] K. Jhonson and N. R. Wallach, Composition series and intertwining operators for the spherical principal series, Bull. Amer.Math.Soc., 78(1972), 1053-1059.

[9] A. W. Knapp, Fatou's theorem for symmetric spacws I, Ann.of Math., 88(1968), 106-127.

[10] B. Kostant, On the existence and irreducibility of certain series of representations, Bull.Amer.Math.Soc., 75(1969), 627-642.

[11] N. N. Lebedev, Special Functions and their Applications, Prentice-Hall, London (1965).

[12] J. L. Lions and E. Magenes, Problemes aux limites non homogenes (VII), Ann.Math.Pura Appl., 4(1963), 201-224.

[13] A. Martineau, Distributions et valeurs au bords des fonctions folomorphes, Theory of Distributions (Proc.Internat.Summer Inst.), Lisbon (1964), 193-326.

[14] A. Martineau, Les hyperfonctions de M. Sato, Seminaire Bourbaki 13(1960/1), No.214.

[15] K. Minemura, Harmonic functions on real hyperbolic spaces, Hiroshima Math.J., 3(1973), 121-151.

[16] K. Okamoto, Harmonic Analysis on homogeneous vector bundles, Lecture notes in Math., Springer-Verlag, 266(1972), 255-271.

[17] A. Orihara, Bessel functions and the euclidean motion group, Tohoku Math.J., 13(1961), 66-74.

[18] M. Sato, Theory of hyperfunctions II, J.Fac.Sci.Univ.Tokyo, 8(1959), 387-436.

[19] M. Sugiura, Fourier series of smooth functions on compact Lie groups, Osaka J.Math., 8(1971), 33-47.

[20] R. Takahashi, Sur les representation unitaires des groupes de Lorentz generalises, Bull.Soc.Math.France, 91(1963), 289-433.