数理解析研究所講究録
第 182 巻 1973 年 119-140

一般 Lorentz 群上の調和解析

佐大 理工 　 牟田洋一

§0. 序

G を中心有限な連結半単純 Lie 群，K をその極大 compact 部分群とする．今 Γ が G の離散部分群で $\Gamma\backslash G$ が compact になるようなものであれば，Hilbert 空間 $L^2(\Gamma\backslash G)$ における G の正則表現 U は重複度有限な可算個の既約表現の和に分れる：

$$U = \bigoplus_{j=1}^{\infty} \pi_j . \tag{1}$$

右辺に現われる既約表現のうち class 1 の表現の spectrum —G/K の laplacian の固有値ではかったもの— の漸近行動はいくつかの G に対して計算されている（[3]，[4]，[11]）．Gangolli [3] は，π_j のうち fixed $\delta\in\hat{K}$ を含むものについて spectrum の漸近行動を求めることを提唱している．我々は一般 Lorentz 群に対してこの問題を考察しよう．

§1. 一般 Lorentz 群 とその表現

n を2以上の整数とする. R^{n+1} の正則一次変換 $g=(g_{ij})_{0\leq i,j\leq n}$ で2次形式

$$-x_0^2+x_1^2+\cdots+x_n^2$$

を不変にするものは $GL(n+1,R)$ の閉部分群, よって Lie 群をつくる. これの identity component $G_+(n)$ を $n+1$ 次の一般 Lorentz 群とよぶ.

$$K=\left\{k=\begin{pmatrix}1&0\\0&k_1\end{pmatrix}:\ k_1\in SO(n)\right\},$$

$$A_+=\left\{a_t=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}\,t&\mathrm{sh}\,t&\\ \mathrm{sh}\,t&\mathrm{ch}\,t&0\\ 0&&1\ \ddots\ 1\end{pmatrix}:\ t\in R\right\},$$

$$N=\left\{n=\begin{pmatrix}1+\frac{\Delta}{2}&-\frac{\Delta}{2}&\xi_2\cdots\xi_n\\ \frac{\Delta}{2}&1-\frac{\Delta}{2}&\xi_2\cdots\xi_n\\ \xi_2&-\xi_2&1\ \ 0\\ \vdots&\vdots&\ddots\\ \xi_n&-\xi_n&0\ \ 1\end{pmatrix}:\ \xi_i\in R,\ \Delta=\sum\xi_i^2\right\}$$

はそれぞれ $G=G_+(n)$ の compact, abelian および nilpotent subgroup で, $G=KA_+N$ はその岩沢分解を与える. $M=Z_K(A_+)$ は $m=\begin{pmatrix}1&0\\0&m_1\end{pmatrix}$, $m_1\in SO(n-1)$ の全体である.

compact 群 $K\cong SO(n)$ の既約 unitary 表現 τ_Λ はその最高 weight Λ によって定まるが

a) $n=2l+1$ ($l\geq 1$) のとき.

$$\Lambda=(m_1,m_2,\cdots,m_l)\in Z^l:\ m_1\geq m_2\geq\cdots\geq m_l\geq 0$$

の全体が同値類の集合をつくる．

b) $n=2l$（$l \geqq 1$）のとき．

$$\Lambda=(m_1, m_2, \cdots, m_l) \in \mathbb{Z}^l \ : \ m_1 \geqq \cdots \geqq m_{l-1} \geqq |m_l|$$

の全体が同値類の集合をつくる．

$M \cong SO(n-1)$ の表現についても同様である．

次に G の表現について述べる．我々にとって continuous および discrete の principal series の表現が特に重要である．

a) $n=2l+1$（$l \geqq 1$）のとき．

rank $G >$ rank K だから discrete series はない．$M \cong SO(2l)$ の既約表現 σ_λ と $\nu \in \mathbb{R} \cong \hat{A}_+$ に対し，$\sigma_\lambda \otimes \nu$ から induce される G の表現を $\mathcal{D}_{\lambda,\nu}$ で表わせば

$$\left\{ \mathcal{D}_{\lambda,\nu} \ : \ \begin{array}{l} \lambda=(n_1, \cdots, n_l) \in \mathbb{Z}^l, \quad \nu \in \mathbb{R} \\ n_1 \geqq \cdots \geqq n_{l-1} \geqq |n_l| \end{array} \right\}$$

が continuous series を尽す．$\mathcal{D}_{\lambda,\nu}$ の character $\Theta_{\lambda,\nu}$ は G 上の tempred distribution である．

Plancherel formula は，$\varphi \in C_c^\infty(G)$ に対して

$$c \cdot \varphi(1) = \sum_{\lambda \in \hat{M}} P(\lambda) \int_{\mathbb{R}} \Theta_{\lambda,\nu}(\varphi) \cdot \prod_{j=1}^{l} ((n_j+l-j)^2+\nu^2)\, d\nu \qquad (2)$$

によって与えられる．ここに

$$P(\lambda) = \prod_{i<j} ((n_i+l-i)^2-(n_j+l-j)^2)$$

であり，c は Haar 測度のとり方で決る constant >0.

b) $n=2\ell$ ($\ell \geq 1$) のとき．

$\mathrm{rank}\, G=\mathrm{rank}\, K=\ell$ であるから，a) で述べた continuous series のほかに discrete series が存在する．discrete series の表現は $\lambda=(n_1,\cdots,n_{\ell-1})\in\hat{M}$ と $n_{\ell-1}\geq p>0$ なる $p\in\mathbf{Z}$ および $+,-$ によって記述できる．それらを

$$D^+_{\lambda,p},\quad D^-_{\lambda,p}\ :\ \lambda=(n_1,\cdots,n_{\ell-1})\in\hat{M},\ n_{\ell-1}\geq p>0$$

で表わす．

Plancherel formula は，$\forall\varphi\in C_c^\infty(G)$ に対して

$$c'\cdot\varphi(1)=\sum_{\lambda,p}Q(\lambda,p)\{\Theta^+_{\lambda,p}(\varphi)+\Theta^-_{\lambda,p}(\varphi)\}$$

$$+\sum_{\lambda\in\hat{M}}R(\lambda)\int_{\mathbf{R}}\Theta_{\lambda,\nu}(\varphi)\cdot\prod_{j=1}^{\ell-1}\left(\left(n_j+\ell-j-\tfrac{1}{2}\right)^2+\nu^2\right)\cdot\nu\,\mathrm{th}\,\pi\nu\,d\nu \qquad (3)$$

により与えられる．ここに $\Theta^\pm_{\lambda,p}$ は表現 $D^\pm_{\lambda,p}$ の character,

$$Q(\lambda,p)=\left(p-\tfrac{1}{2}\right)\prod_{j=1}^{\ell-1}\left(\left(n_j+\ell-j-\tfrac{1}{2}\right)^2-\left(p-\tfrac{1}{2}\right)^2\right)$$
$$\times\prod_{j=1}^{\ell-1}\left(n_j+\ell-j-\tfrac{1}{2}\right)\cdot\prod_{i<j}\left(\left(n_i+\ell-i-\tfrac{1}{2}\right)^2-\left(n_j+\ell-j-\tfrac{1}{2}\right)^2\right),$$

$$R(\lambda)=\prod_{j=1}^{\ell-1}\left(n_j+\ell-j-\tfrac{1}{2}\right)\cdot\prod_{i<j}\left(\left(n_i+\ell-i-\tfrac{1}{2}\right)^2-\left(n_j+\ell-j-\tfrac{1}{2}\right)^2\right).$$

また c' は a) での c と同様の意味をもつ．

§2. 関数環 $\mathcal{S}_\Lambda(G)$，球関数 および Fourier 変換

$G=G_+(n)$ の Schwartz space $\mathcal{S}(G)$ は，vector space の構造のほかに

$$(\varphi\circ\psi)(g)=\int_G \varphi(g_1^{-1}g)\psi(g_1)\,dg_1\ ,$$
$$\varphi^*(g)=\overline{\varphi(g^{-1})}$$

を考えることにより topological $*$-algebra となる．K の既約表現 τ_Λ を一つ固定する．その次元を d_Λ，character を

$$\chi_\Lambda(k)=d_\Lambda\cdot \mathrm{Tr}[\tau_\Lambda(k)]$$

と書く．

$$\bar{\chi}_\Lambda\circ\varphi=\varphi\circ\bar{\chi}_\Lambda=\varphi\ ,$$
$$\int_K \varphi(kgk^{-1})\,dk=\varphi(g)\qquad (g\in G)$$

をみたす $\varphi\in\mathcal{S}(G)$ の全体 $\mathcal{S}_\Lambda(G)$ は $\mathcal{S}(G)$ の可換な sub-algebra である（[15] (ii)）．したがって特に $\forall\pi\in\hat{G}$ は τ_Λ を高々1回しか含まない．

さて可換 topological $*$-algebra の調和解析の一般論によれば，$\mathcal{S}_\Lambda(G)$ の unitary characters を見出して Fourier 変換を実行することができるはずである．

実際，τ_Λ を含む G の既約 unitary 表現 π の character を Θ_π とすれば，$\forall\varphi\in\mathcal{S}_\Lambda(G)$ に対し

$$\Theta_\pi(\varphi)=d_\Lambda\cdot\int_G \varphi(g)\,\zeta_\pi(g)\,dg$$

が成立つ．ここに ζ_π は，Godement [5] によって define された表現 π に対する τ_Λ-spherical function であり，以下の性質をみたす：

(i) $\zeta_\pi(kgk^{-1}) = \zeta_\pi(g) \qquad \forall g \in G,\ k \in K,$

(ii) $\chi_\Lambda \circ \zeta_\pi = \zeta_\pi \circ \chi_\Lambda = \zeta_\pi \quad ,$

(iii) $\int_K \zeta_\pi(kgk^{-1}g')\,dk = \zeta_\pi(g)\,\zeta_\pi(g') \ ,$

(iv) ζ_π は $\zeta_\pi(1) = 1$ をみたす G 上の positive-definite な関数である，

v) ζ_π は Ω の eigenfunction である．

そこでこれら Λ-spherical functions ζ_π の全体が $\mathcal{S}_\Lambda(G)$ の dual をなし，$\varphi \in \mathcal{S}_\Lambda(G)$ の Fourier 変換を

$$\tilde{\varphi}(\pi) = \int_G \varphi(g)\,\zeta_\pi(g)\,dg \qquad (4)$$

によって define できることがわかる．

§1 で述べた continuous series の表現 $\mathfrak{D}_{\lambda,\nu}$ が τ_Λ を含むのは $\lambda \in \hat{M}$ が $\tau_\Lambda|M$ に含まれるとき，かつそのときに限る．このような $\lambda \in \hat{M}$ の全体を $\hat{M}(\Lambda)$ で表わす．$\lambda \in \hat{M}(\Lambda)$ のとき $\mathfrak{D}_{\lambda,\nu}$ の表現空間において実際に表現作用素の trace を計算することにより，対応する Λ-spherical function $\zeta_{\lambda,\nu}$ をもとめることができる．$\lambda \in \hat{M}(\Lambda)$ の character を χ_λ と書くとき $\zeta_{\lambda,\nu}$ は

$$\zeta_{\lambda,\nu}(g) = \int_K \beta_{\lambda,\nu}(kgk^{-1})\,dk\,, \tag{5}$$

$$\beta_{\lambda,\nu}(ka_tn) = \frac{(\chi_\Lambda\circ\eta_\lambda)(k)}{(\chi_\Lambda\circ\eta_\lambda)(1)}\,e^{-(\frac{n-1}{2}+i\nu)t}$$

と表わせる．更に $\zeta_{\lambda,\nu}$ は微分作用素 Ω の eigenfunction であるが，対応する eigenvalue は

$$-(\Lambda,\Lambda+2\delta)+\left(\frac{n-1}{2}\right)^2+\nu^2 \tag{6}$$

である．

Fourier 変換 $\varphi\to\tilde{\varphi}$ に対し，Plancherel formula は §1 での結果を用いて次のように表わすことができる：

a) $n=2l+1$ $(l\geqq 1)$ のとき．

$$c\cdot\varphi(1) = d_\Lambda\cdot\sum_{\lambda\in\hat{M}(\Lambda)} P(\lambda)\int_{\mathbb{R}}\tilde{\varphi}(\lambda,\nu)\cdot\prod_{j=1}^{l}\left((m_j+l-j)^2+\nu^2\right)d\nu \tag{7}$$

b) $n=2l$ $(l\geqq 1)$ のとき．

$$c'\cdot\varphi(1) = d_\Lambda\cdot\sum_{\lambda,p}^{\Lambda} Q(\lambda,p)\{\zeta^+_{\lambda,p}(\varphi)+\zeta^-_{\lambda,p}(\varphi)\}$$
$$+d_\Lambda\cdot\sum_{\lambda\in\hat{M}(\Lambda)} R(\lambda)\int_{\mathbb{R}}\tilde{\varphi}(\lambda,\nu)\cdot\prod_{j=1}^{l-1}\left(\left(m_j+l-j-\frac{1}{2}\right)^2+\nu^2\right)\nu\,\mathrm{th}\,\pi\nu\,d\nu. \tag{8}$$

§3. Λ-automorphic forms.

§0 で導入した Γ に更に条件

"$\forall\gamma\in\Gamma$, $\gamma\neq 1$ は G/K に fixed point をもたない"

をつけ加える。このとき $\Gamma\backslash G/K$ は C^∞-manifold で，$\Gamma\backslash G$ は $\Gamma\backslash G/K$ 上の K を structure group とする fiber bundle である．$\Gamma\backslash G$ に表現 $\tau_\Lambda = \{\tau_\Lambda, F\}$ を associate して得られる vector bundle $(\Gamma\backslash G)\times_K F \to \Gamma\backslash G/K$ を $\mathcal{F}_\Lambda$ で表わす：

$$\begin{tikzcd} \Gamma\backslash G \arrow[d] & & \mathcal{F}_\Lambda \arrow[dll, "k \to \tau_\Lambda(k)"'] \\ \Gamma\backslash G/K & & \end{tikzcd}$$

vector bundle $\mathcal{F}_\Lambda$ の 0-forms, 1-forms, …… のつくる空間 $\mathcal{A}^0 = C^\infty(\mathcal{F}_\Lambda)$，$\mathcal{A}^1$，…… に F の内積と $\Gamma\backslash G$ の invariant measure から導かれる内積を入れ，それによる $C^\infty(\mathcal{F}_\Lambda)$ の completion を $L^2(\mathcal{F}_\Lambda)$ とする．forms の間の differentiation d とその adjoint δ

$$\mathcal{A}^0 \underset{\delta}{\overset{d}{\rightleftarrows}} \mathcal{A}^1 \underset{\delta}{\overset{d}{\rightleftarrows}} \cdots$$

を普通のように定め，$C^\infty(\mathcal{F}_\Lambda)$ 上の differential operator

$$\Delta = \delta d$$

を $\mathcal{F}_\Lambda$ の laplacian と呼ぶ．Δ は，$f \in C^\infty(\mathcal{F}_\Lambda)$ に対し

$$\Delta f = \Omega f + (\Lambda, \Lambda + 2\delta) f \qquad (9)$$

によって作用する．

さて，$\Gamma\backslash G/K$ は compact であるから，Δ は重複度有限の discrete spectrum を有し，eigenvalue はすべて $\geqq 0$

である．$C^\infty(\mathfrak{F}_\Lambda)$ の元で，Δ の eigenfunction になるものを Λ-automorphic form と呼ぶ．eigenvalue $r \geq 0$ に属する Λ-automorphic forms のなす vector space $A(\Gamma, \Lambda, r)$ は常に有限次元である．そして U の分解 (1) に現われる π_j のうち τ_Λ^* を含み

$$\pi_j(\Omega) = r - (\Lambda, \Lambda + 2\delta)$$

となるものの全体を Π_r^* とおけば，[9]，[10] (ii) と (6) により

$$\dim A(\Gamma, \Lambda, r) = \sum_{\pi \in \Pi_r^*} (U : \pi) \tag{10}$$

であることが導かれる．

$C^\infty(\mathfrak{F}_\Lambda)$ の completion を $L^2(\mathfrak{F}_\Lambda)$，$\Delta$ の相異なる eigenvalues を

$$0 \leqq r_0 < r_1 < \cdots \uparrow \infty$$

とすれば

$$L^2(\mathfrak{F}_\Lambda) = \bigoplus_{j=0}^{\infty} A(\Gamma, \Lambda, r_j) . \tag{11}$$

$\varphi \in \mathcal{S}_\Lambda(G)$ に対し，$C^\infty(G) \otimes \mathrm{Hom}(F, F)$ の元 A_φ を

$$A_\varphi(g) = \int_K \varphi(gk)\, \tau_\Lambda(k)\, dk \tag{12}$$

により，また $L^2(\mathfrak{F}_\Lambda)$ の有界作用素 T_φ を

$$(T_\varphi f)(g) = \int_G A_\varphi(g_1^{-1}g) f(g_1)\, dg_1 \tag{13}$$

によって define すると，$\{T_\varphi\ ;\ \varphi \in \mathcal{S}_\Lambda(G)\}$ は互に commute する $L^2(\mathcal{F}_\Lambda)$ の compact, normal operators の族をなし，対応 $\varphi \to T_\varphi$ は $*$-algebra $\mathcal{S}_\Lambda(G)$ の $L^2(\mathcal{F}_\Lambda)$ における表現である．したがって，Hilbert 空間 $L^2(\mathcal{F}_\Lambda)$ は T_φ, $\varphi \in \mathcal{S}_\Lambda(G)$ の同時固有空間の可算和に分解する：

$$L^2(\mathcal{F}_\Lambda) = \bigoplus_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}(\omega_j)\ . \tag{14}$$

ここに各 $\mathcal{H}(\omega_j)$ は有限次元で，$\forall f \in \mathcal{H}(\omega_j)$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}_\Lambda(G)$ に対し

$$T_\varphi f = \omega_j(\varphi) f \tag{15}$$

が成立つ．ω_j は $\mathcal{S}_\Lambda(G)$ の unitary character である．そこで今

［仮定 I］：'ω_j はすべて G 上の連続関数である'

を認めるならば，［5］に基づいて，ω_j は

$$\zeta_{\lambda,\nu}\ ,\quad \zeta^{\pm}_{\lambda,p}\ :\ \lambda \in \hat{M}(\Lambda),\ \ \nu \in \mathbb{R},\ \ \lambda > p > 0$$

のいずれかに等しいことがわかる．しかも τ_Λ を含む discrete series の表現は有限個しかないから，有限個を除いて ω_j は $\zeta_{\lambda,\nu}$ のいずれかに一致する．今 ω_j がある ζ に等しく，

$$\Omega\zeta = (r_i - (\Lambda, \Lambda+2\delta))\zeta \tag{16}$$

であるならば，$\forall f \in \mathcal{H}(\omega_j) \cap C^\infty(\mathcal{F}_\Lambda)$ に対し

$$T_{\Omega\varphi} f = \zeta(\Omega\varphi) f \quad \text{for all } \varphi \in \mathcal{S}_\Lambda(G) \tag{17}$$

が成立つ．ここで φ を $\mathcal{S}_\Lambda(G)$ の δ-sequence $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha=1}^\infty$ におきかえて $\alpha \to \infty$ とすることにより

$$\Omega f = (r_i - (\Lambda, \Lambda + 2\delta)) f$$

が得られる．このことより $A(\Gamma, \Lambda, r_i)$ は有限個の $\mathcal{H}(\omega_j)$ の direct sum として書けることがわかる．以上をまとめて

定理 1．Hilbert space $L^2(\mathcal{F}_\Lambda)$ の 2 つの分解 (11)，(14) において，高々有限個の i を除き $A(\Gamma, \Lambda, r_i)$ は有限個の $\mathcal{H}(\omega_j)$ の直和として表わされる．また表現 U の分解 (1) と $A(\Gamma, \Lambda, r_i)$ の次元の間には等式 (10) が成立つ．

次に φ を $\mathcal{S}_\Lambda(G)$ に属する関数で級数

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} A_\varphi(g_1^{-1} \gamma g) \tag{18}$$

が $G \times G$ 上の $\mathrm{Hom}(F, F)$-valued continuous function $B_\varphi(g, g_1)$ に広義一様，絶対収束するものと仮定しよう．このとき $B_\varphi(g, g_1)$ は $\Gamma \backslash G \times \Gamma \backslash G$ 上の関数であり，$\forall f \in L^2(\mathcal{F}_\Lambda)$ に対し

$$(T_\varphi f)(g) = \int_{\Gamma \backslash G} B_\varphi(g, g_1) f(g_1)\, dg_1 \tag{19}$$

が成立つ．

$L^2(\mathfrak{F}_1)$ の subspace $\mathcal{H}(\omega_j)$ $(j=1, 2, \cdots)$ の orthonormal basis を

$$\{ f_i^{(j)} \ ; \ 1 \leqq i \leqq \kappa_j \ \} \qquad (\kappa_j = \dim \mathcal{H}(\omega_j))$$

とすれば，$f_i^{(j)}$ の全体は $L^2(\mathfrak{F}_1)$ の orthonormal basis をなす．

次の Lemma が成立つ：

Lemma. X を compact manifold，dx を X の volume element，F を有限次元 Hilbert space とせよ．$\mathcal{H}$ を $\mathcal{H} \subset L^2(X) \otimes F$ なる Hilbert space とし，連続核 $B \in C(X^2) \otimes \mathrm{Hom}(F, F)$ をもつ $\mathcal{H}$ 上の positive integral operator T を考える：

$$(Tf)(x) = \int_X B(x, y) f(y)\, dy \qquad f \in \mathcal{H} .$$

T は当然 discrete spectrum を有するが，T の eigenvalues と対応する eigenfunctions のつくる $\mathcal{H}$ の orthonormal basis を

$$0 \leqq \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots\cdots$$
$$f_1 , \quad f_2 , \quad \cdots\cdots$$

とすれば級数

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \, f_j(x) \otimes f_j(y)$$

は X^2 上一様，絶対に $B(x, y)$ に収束する．

この Lemma によれば，我々の kernel B_φ は一様収束級数

$$B_\varphi(g, g_1) = \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j(\varphi) \sum_{i=1}^{K_j} f_i^{(j)}(g) \otimes f_i^{(j)}(g_1) \qquad (20)$$

で表わされる．よって T_φ の trace は

$$\int_{\Gamma\backslash G} \mathrm{Tr}\, B_\varphi(g, g)\, dg = \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j(\varphi) \sum_{i=1}^{K_j} \int_{\Gamma\backslash G} \mathrm{Tr}\left(f_i^{(j)}(g) \otimes f_i^{(j)}(g)\right) dg$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} K_j \cdot \omega_j(\varphi) \qquad (21)$$

に等しいが，左辺は更に

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} \int_{\Gamma\backslash G} \mathrm{Tr}\, A_\varphi(g^{-1}\gamma g)\, dg = d_\Lambda^{-1} \cdot \sum_{\gamma\in\Gamma} \int_{\Gamma\backslash G} \varphi(g^{-1}\gamma g)\, dg$$

となる．Γ を conjugate classes の和に分け，class に関する和を $\sum'$，$\gamma\in\Gamma$ の G, Γ における centralizer を G_γ, Γ_γ と書けば上式は

$$d_\Lambda^{-1} \cdot \sum_{\{\gamma\}}{}' \mathrm{vol}(\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma) \int_{G_\gamma\backslash G} \varphi(g^{-1}\gamma g)\, d_\gamma g \qquad (22)$$

に等しい．$d_\gamma g$ は $G_\gamma\backslash G$ での invariant measure である．これが我々の trace formula である．

§4. Asymptotic behaviour of spectrum of the laplacian.

vector bundle $\mathfrak{F}_\Lambda$ の laplacian Δ の相異なる固有値を

$$0 \leqq r_0 < r_1 < \cdots \uparrow \infty$$

とし，$\forall r > 0$ に対して

$$N(r) = \sum_{r_i < r} r_i \cdot \dim A(\Gamma, \Lambda, r_i) \tag{23}$$

とおく．定理1によって，$r \to \infty$ のときの $N(r)$ の漸近行動は，U の分解（1）に現われる成分で，τ_Λ^* を含み，主系列に属するものの asymptotic behaviour を表わしている．我々の問題は

"$r \to \infty$ のときの $N(r)$ の asymptotic behaviour を求めること"

である．そのため，$N(r)$ の Laplace 変換

$$\mathcal{L}(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha r} dN(r) \qquad (\alpha > 0) \tag{24}$$

が theta function

$$Tr(e^{-\alpha\Delta}) = \sum_{i=0}^\infty e^{-\alpha r_i} \cdot \dim A(\Gamma, \Lambda, r_i) \tag{25}$$

に等しいことに着目し，heat equation

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \Delta u = 0 \tag{26}$$

の elementary solution $B_\alpha(g, g_1)$ を構成する．$B_\alpha(g, g_1)$ は $C^\infty(\Gamma\backslash G \times \Gamma\backslash G) \otimes Hom(F, F)$ の関数であるが，これを（9）に基づいて考えられる方程式

$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} + (\Omega + (\Lambda, \Lambda + 2\delta))A_\alpha = 0 \tag{27}$$

の（12）の形の解 A_α を用いて

$$B_\alpha(g, g_1) = \sum_{\gamma\in\Gamma} A_\alpha(g_1^{-1}\gamma g)$$

なる形で求めたい。(27)の解を得るために

$$\frac{\partial \mathcal{E}_\alpha}{\partial \alpha} + (\Omega + (\Lambda, \Lambda+2\delta))\mathcal{E}_\alpha = 0 \qquad (28)$$

の解 $\mathcal{E}_\alpha$ を $\mathcal{S}_\Lambda(G)$ の中に求める.

a) $n = 2l+1$ ($l \geq 1$) のとき.

(28) の両辺を $\zeta_{\lambda,\nu}$ により Fourier 変換すれば

$$\frac{d\tilde{\mathcal{E}}_\alpha}{d\alpha} + (l^2+\nu^2)\tilde{\mathcal{E}}_\alpha = 0 .$$

この方程式の解として $\tilde{\mathcal{E}}_\alpha(\lambda, \nu) = e^{-\alpha(l^2+\nu^2)}$ を採ることができる. これを逆変換(7)で変換した関数

$$\mathcal{E}_\alpha(g) = c^{-1} d_\Lambda \cdot \sum_{\lambda\in\hat{M}(\Lambda)} P(\lambda) \int_R e^{-\alpha(l^2+\nu^2)} \overline{\zeta_{\lambda,\nu}(g)} \prod_{j=1}^{l}((m_j+l-j)^2+\nu^2)\, d\nu$$

$$\cdots\cdots (29)$$

は $\mathcal{S}_\Lambda(G)$ に属する. これは確かに (28) をみたす.

b) $n = 2l$ ($l \geq 1$) のとき.

discrete series の表現に対応する Λ-spherical function $\zeta^{\pm}_{\lambda,p}$ は central eigendistribution である. $\Omega + (\Lambda, \Lambda+2\delta)$ に対する eigenvalue を $\rho^{\pm}_{\lambda,p}$ とすれば

$$\mathcal{E}_\alpha(g) = c'^{-1} d_\Lambda \cdot \sum_{\lambda,p}^{\Lambda} Q(\lambda,p)\{e^{-\alpha\rho^+_{\lambda,p}}\overline{\zeta^+_{\lambda,p}(g)} + e^{-\alpha\rho^-_{\lambda,p}}\overline{\zeta^-_{\lambda,p}(g)}\}$$

$$+ c'^{-1} d_\Lambda \cdot \sum_{\lambda\in\hat{M}(\Lambda)} R(\lambda) \int_R e^{-\alpha((l-\frac{1}{2})^2+\nu^2)} \overline{\zeta_{\lambda,\nu}(g)} \cdot \prod_{j=1}^{l-1}((m_j+l-j-\tfrac{1}{2})^2+\nu^2)\, \nu \operatorname{th} \pi\nu\, d\nu$$

$$\cdots\cdots (30)$$

が（28）をみたす $\mathcal{S}_\Lambda(G)$ の元である．

$\mathcal{E}_\alpha(g) \in \mathcal{S}_\Lambda(G)$ を上に define したものとして

$$A_\alpha(g) \equiv \int_K \mathcal{E}_\alpha(gk)\tau_\Lambda(k)\,dk \tag{31}$$

とおけば，これは（27）を満足する．そこで

$$B_\alpha(g, g_1) = \sum_{\gamma\in\Gamma} A_\alpha(g_1^{-1}\gamma g) \tag{32}$$

によって $B_\alpha(g, g_1)$ を define したい．右辺の収束性を一般に示すことができないので

［仮定 II］：“（32）の右辺は $G\times G$ 上絶対かつ広義一様に収束する”

を設けて議論をすすめる．

この仮定の下に定まる $B_\alpha(g, g_1)$ は $\Gamma\backslash G\times\Gamma\backslash G$ 上の $Hom(F, F)$-valued C^∞-function で，vector bundle $\mathfrak{F}_\Lambda$ 上の heat equation（26）の elementary solution であることがわかる．

$B_\alpha(g, g_1)$ は continuous hermitian kernel であり，$\Gamma\backslash G$ は compact であるから

$$(T_\alpha f)(g) = \int_{\Gamma\backslash G} B_\alpha(g, g_1)f(g_1)\,dg_1 \tag{33}$$

で define される $T_\alpha = T_{\mathcal{E}_\alpha}$ は hermitian compact．定理 1 に基づいて

$$\mathcal{H}(\omega_j) \subset A(\Gamma, \Lambda, r_i)$$

とすれば，簡単な計算により

$$f \in \mathcal{H}(\omega_j) \subset A(\Gamma, \Lambda, r_i) \Rightarrow T_\alpha f = e^{-\alpha r_i} f \qquad (34)$$

なることがわかる．continuous kernel をもつから T_α は finite trace

$$Tr(T_\alpha) = \int_{\Gamma \backslash G} Tr\, B_\alpha(g, g)\, dg$$

を有することがわかるが，定理1と trace formula により次の定理が得られる：

定理2 (theta relation). $N(r)$ およびその Laplace 変換 $\mathcal{L}(\alpha)$ は well-defined であり，更に等式

$$\mathcal{L}(\alpha) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\alpha r_i} \cdot \dim A(\Gamma, \Lambda, r_i)$$

$$= d_\Lambda^{-1} \cdot \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{\Gamma \backslash G} \mathcal{E}_\alpha(g^{-1} \gamma g)\, dg$$

$$= d_\Lambda^{-1} \cdot \sum_{\{\gamma\}}{}' vol(\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma) \int_{G_\gamma \backslash G} \mathcal{E}_\alpha(g^{-1} \gamma g)\, d_\gamma g \qquad (35)$$

が成立つ．

さて，$\alpha \to 0$ のときの $\mathcal{L}(\alpha)$ の behaviour を調べよう．定理2より

$$d_\Lambda \cdot \mathcal{L}(\alpha) = vol(\Gamma \backslash G)\, \mathcal{E}_\alpha(1) + \sum_{\gamma \neq 1} \int_{\Gamma \backslash G} \mathcal{E}_\alpha(g^{-1}\gamma g)\, dg \qquad (36)$$

である．単位元以外の Γ の元 γ は G/K に fixed point をもたないから

$$\{ g^{-1}\gamma g \;:\; g \in G,\quad \gamma \in \Gamma,\ \gamma \neq 1 \}$$

は K と交わらない G の closed subset となす．このことから

$$\alpha \to 0 \quad のとき \quad \sum_{\gamma \neq 1} \int_{\Gamma \backslash G} \mathcal{E}_\alpha(g^{-1}\gamma g)\, dg \to 0$$

を示すことができる．よって（36）の右辺第1項について考えればよい．

a) $n = 2\ell + 1$ （$\ell \geqq 1$）のとき．

（29）より

$$\mathcal{E}_\alpha(1) = c^{-1} \cdot d_\Lambda \cdot \sum_{\lambda \in \widehat{M}(\Lambda)} P(\lambda) \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha(\ell^2 + \nu^2)} \cdot \prod_{j=1}^{\ell} ((m_j + \ell - j)^2 + \nu^2)\, d\nu$$

であるが，右辺は直接計算でき，$\alpha \to 0$ のときその主要部は

$$\mathcal{E}_\alpha(1) \sim c^{-1} d_\Lambda \cdot \sqrt{\pi}\, \frac{(2\ell-1)!!}{2^\ell} \Bigl(\sum_{\lambda \in \widehat{M}(\Lambda)} P(\lambda) \Bigr) \alpha^{-(\ell + \frac{1}{2})} \qquad (37)$$

となる．

b) $n = 2\ell$ （$\ell \geqq 1$）のとき．

（30）より

$$\mathcal{E}_\alpha(1) = c^{-1} \cdot d_\Lambda \cdot \sum_{\lambda, p}^{\Lambda} (e^{-\alpha \rho^{+}_{\lambda, p}} + e^{-\alpha \rho^{-}_{\lambda, p}})\, Q(\lambda, p)$$

$$+\, c'^{-1} d_\Lambda \sum_{\lambda\in\hat{M}(\Lambda)} R(\lambda) \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha((\ell-\frac{1}{2})^2+\nu^2)} \prod_{j=1}^{\ell-1}((m_j+\ell-j-\tfrac{1}{2})^2+\nu^2)\,\nu\, th\pi\nu\, d\nu$$

であるが，右辺オ一項は $\alpha\to 0$ のとき ℓ に無関係な定数に近づく．オ二項については

$$\int_0^\infty e^{-\alpha\nu^2}\nu^{1+2p}\, th\pi\nu\, d\nu \sim \frac{p!}{2}\alpha^{-(p+1)}$$

であることに注意すれば

$$\mathcal{E}_\alpha(1) \sim c'^{-1} d_\Lambda (\ell-1)! \Big(\sum_{\lambda\in\hat{M}(\Lambda)} R(\lambda)\Big)\cdot \alpha^{-\ell} \qquad (38)$$

なることがわかる．したがって，$\alpha\to 0$ のとき常に

$$\mathcal{L}(\alpha) \sim c_G\cdot vol(\Gamma\backslash G)\cdot\alpha^{-n/2}$$

或いは Tauber 型定理により次のように表わせる：

定理 3. $G=G_+(n)$ において，$r\to\infty$ のとき $N(r)$ の behaviour は

$$N(r) \sim \frac{c_G\cdot vol(\Gamma\backslash G)}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} r^{\frac{n}{2}}$$

に従う．ここで c_G は

$$c_G = \begin{cases} c^{-1}\sqrt{\pi}\,\dfrac{(2\ell-1)!!}{2^\ell}\Big(\displaystyle\sum_{\lambda\in\hat{M}(\Lambda)} P(\lambda)\Big) & (n=2\ell+1 \text{ のとき}) \\[2ex] c'^{-1}(\ell-1)!\Big(\displaystyle\sum_{\lambda\in\hat{M}(\Lambda)} R(\lambda)\Big) & (n=2\ell \text{ のとき}) \end{cases}$$

なる constant である．

REFERENCES

[1] J.G.Arthur, Harmonic analysis of tempered distributions on semisimple Lie groups of real rank one, Ph.D. Thesis Yale Univ., 1970

[2] H. Boerner, Darstellungen von Gruppen, Springer, 1955.

[3] R. Gangolli, Asymptotic behaviour of spectra of compact quotients of certain symmetric spaces, Acta Math.121 (1968) 151-192.

[4] I.M.Gelfand & I.I.Pyatetsukii-Shapiro, (i) Unitary representations in homogeneous spaces with discrete stationary groups, Doklad. Akad. nauk SSSR. 147-1(1962) 17-20.
(ii) Representation theory and automorphic functions, (Generalized functions, vol.6) Saunders Company, 1969.

[5] R. Godement, A theory of spherical functions I, Trans. Amer. Math. Soc. 73(1952) 496-556.

[6] T. Hirai, (i) On irreducible representations of the Lorentz group of n-th order, Proc. Japan Acad. 38(1962) 258-262
(ii) The Plancherel formula for the Lorentz group of n-th order, Proc. Japan Acad. 42(1965) 323-326.

[7] R.P.Langlands, Dimension of spaces of automorphic forms, Proc. Sympos. Pure Math.,vol 9, Amer. Math. Soc., 1966, 253-257.

[8] R. Lipsman, The dual topology for the principal and discrete series on semisimple groups, Trans. Amer. Math. Soc. 152(1970) 399-412.

[9] Y. Matsushima, A formula for the Betti numbers of compact locally symmetric Riemannian manifolds, J. Diff. Geom. 1(1967) 99-109.

[10] Y.Matsushima & S.Murakami,(i) On vector bundle-valued harmonic forms and automorphic forms on symmetric Riemannian manifolds, Ann. of Math. 78(1963) 365-416. (ii) On certain cohomology groups attached to hermitian symmetric spaces , Osaka J. Math. 5(1968) 223-241.

[11] H.P.McKean, Selberg's trace formula as applied to a compact Riemann surfaces, Comm. pur. appl. math. 25(1972) 225-246.

[12] K. Okamoto, Harmonic analysis on homogeneous vector bundles Conf. Harmonic Anal. Proc. 1971, Springer, 1972.

[13] A. Selberg, Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series, J.Indian Math. Soc., 20(1956) 47-87.

[14] Y. Shimizu, An analogue of the Paley-Wiener theorem for certain function spaces on the generalized Lorentz group, J.Fac. of Sci. Univ. of Tokyo 16(1969) 13-51.

[15] R. Takahashi, (i) Sur les fonction spheriques et la formule de Plancherel dans le groupe hyperbolique, Japan J. Math. 31(1961) 55-90.
(ii) Sur les representations unitaires des groupes de Lorentz generalises, Bull. Soc. Math. France 91(1963) 289-433.

[16] T. Tamagawa, On Selberg's trace formula, J. Fac. of Sci. Univ. of Tokyo 8(1960) 363-386.

[17] G. Warner, Harmonic analysis on semisimple Lie groups I,II Springer, 1972.