数理解析研究所講究録
第 182 巻 1973 年 196-210

De Sitter 群の一様有界表現

阪大 基礎工 川西啓一

§1. 序文

$SL(2,\mathbb{R})$ および $SL(2,\mathbb{C})$ に関しては，それらの一様有界表現が構成され，その応用として matrix element を使ってすべての既約ユニタリー表現が分類されている。(cf. [2], [3]) 我々はここで De Sitter 群について上記の考察を行なう。その際，[4] の表現 $g \mapsto R(g,n,s)$ が complementary series の表現を部分的に含むものであることを示し，表現 $g \mapsto R(g,n,s)$ を使って De Sitter 群について Hausdorff-Young の定理 L_p convolution 定理，Riemann-Lebesgue lemma を導く。最後にこれらの定理によって既約ユニタリー表現の分類を実行する。

G を De Sitter 群の universal covering group とし，H を quaternion field とする。$x = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k \in H$，$x_1, x_2$ $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ に対して

$$\bar{x} = x_1 - x_2 i - x_3 j - x_4 k,$$

$$\hat{x} = x_1 + x_2 i + x_3 j - x_4 k,$$

$$|x| = (x\bar{x})^{1/2} = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{1/2}$$

$$U = \{x \in \mathbb{H};\ |x| = 1\},\quad Z = \{x \in \mathbb{H};\ x_4 = 0\}$$

とおく。 G は 2×2 quaternion matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\quad \hat{a}c = \hat{c}a,\ \hat{b}d = \hat{d}b,\ \hat{a}d - \hat{c}b = 1$$

全体からなる群と同一視されることが[6], Chap II に示されている。

$$G = KA_+N \quad (\text{岩沢分解})$$

ただし

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{a} & -\hat{b} \\ b & a \end{pmatrix};\ |a|^2 + |b|^2 = 1,\ a\hat{b} = b\hat{a} \right\},$$

$$A_+ = \left\{ \begin{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{t}{2}} \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix};\ x \in Z \right\}$$

M' および M を K における A_+ の normalizer, centralizer とすると,

$$M' = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{u} & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\hat{u} \\ u & 0 \end{pmatrix};\ u \in U \right\}$$

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{u} & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix};\ u \in U \right\}$$

を得る。 θ を Cartan involution とし, $V = \theta N$ とおくと,

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ z \in Z \right\}$$

である。これらの subgroups について measure zero を除いて $G = \overline{V}MA_+N$ と分解される。$T = MA_+N$, $W = M'/M$ (Weyl group) とし，Wの代表としてe $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と $p = \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix}$ をとる。

そのとき Bruhat 分解 $G = T \cup TpT$ (disjoint) を得る。

次に，Gは左からZに act し，次の式で定義される。

$$g.z = (az+b)(cz+d)^{-1}$$

ただし，$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$, $z \in Z$ である。また，

$$\begin{cases} \omega_G(g,z) = |cz+d|^2, \\ u_G(g,z) = (cz+d)/|cz+d| \end{cases}$$

とおくと ω_G および u_G は multipliers である。

§2. Gの表現について

Continuous principal series の既約ユニタリー表現は[6]に記述されている。それらは2つの parameters (n, s), $n \geq 0$ half-integer, $s = 3/2 + it$, をもつ表現 $g \mapsto V_{g_{V^n}}^{n,s}$ として与えられる。nに対して$(2n+1)$次元 Hilbert 空間 V の $SU(2)$ の既約ユニタリー表現 ρ^n を考える。そのとき $V_g^{n,s}$ は Z上で定義されたV^n-valued 2乗可積分関数全体よりなる Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 上の作用素として定義され，explicit には次の形である。

$$(2.1)\quad (V_g^{n,s}f)(z) = \omega_G(g^{-1},z)^{-s}\rho^n(u_G(g^{-1},z)^{-1})f(g^{-1}.z),\quad f \in \mathfrak{H}$$

次に(2.1)から complementary series の既約ユニタリー表現の explicit な形を得る。

$\mathfrak{H}_{n,\sigma}$ ($\sigma\in\mathbb{R}$) を Z 上で定義された V^n-valued 関数で

$$\|f\|^2_{n,\sigma} = C^n_\sigma \iint_{ZZ} |u-v|^{-6+2\sigma} \langle f(u), f(v)\rangle_{V^n}\, du\, dv < +\infty$$

を満たすもの全体の作る Hilbert 空間とする。ただし，$C^n_\sigma = (2n+1)^{-1} 2^{3-2\sigma} \pi^{-3/2} \Gamma(-3/2+\sigma)/\Gamma(3-\sigma)$ である。そのとき

(1) $3/2<\sigma<3$ に対して，表現 $g\mapsto V^{0,\sigma}_g$ on $\mathfrak{H}_{0,\sigma}$ は class 1 の complementary series の表現である。

(2) positive integer n と $3/2<\sigma<2$ に対して，表現 $g\mapsto V^{n,\sigma}_g$ on $\mathfrak{H}_{n,\sigma}$ は n に対応する complementary series の表現である。

§3．　G の一様有界表現

[4]と同様の方法によって次の定理を得る。得られる表現 $g\mapsto R(g,n,s)$ に関しては[4]の結果と一致するが，さらにそれが Complementary series をも部分的に含むことが分る。

定理 1．　$n\geq 0$ を half-integer とする。そのとき以下の条件を満たす表現 $g\mapsto R(g,n,s)$ of G on $\mathfrak{H}$ が存在する；

(1) $g\mapsto R(g,n,s)$ は continuous，ただし，$n\geq 0$ half-integer，$1/2<\mathrm{Re}\, s<5/2$，

(2) $\mathrm{Re}\, s=3/2$ のとき，$g\mapsto R(g,n,s)$ は Continuous principal series の表現にユニタリー同値，

(3) $n=0$，s が実数で $3/2<s<5/2$ のとき，$g\mapsto R(g,n,s)$ は class 1 の Complementary series の表現にユニタリー同値，

(4) $n \geqq 1$ integer, s が実数で $3/2 < s < 2$ のとき, $g \mapsto R(g, n, s)$ は n に対応する Complementary series の表現にユニタリー同値,

(5) $\xi, \eta \in \mathfrak{H}$ ならば, 各 fixed $g \in G$, $n \geqq 0$ half-integer に対して $s \mapsto (R(g, n, s)\xi, \eta)$ は $1/2 < \mathrm{Re}\, s < 5/2$ で analytic,

(6) $\sup_{g \in G} \| R(g, n, s) \|_\infty \leqq K_\sigma (1+n)(1+|t|)^4$, $s = \sigma + it$, $1/2 < \sigma < 5/2$, $n \geqq 0$ half-integer, $\| \cdot \|_\infty$ は operator norm を表わし, K_σ は $(1/2, 5/2)$ の任意の closed subinterval 上で一様有界にとれる.

(証明) (3), (4) を除いては [4] にその証明が与えられている。(3), (4) を証明するために $n \geqq 0$ integer, $0 < \sigma < 3$ に対して, Z 上で定義された V^n-valued 関数で

$$\| F \|_{n,\sigma}^2 = \int_Z |F(z)|_{V^n}^2 \cdot |z|^{3-2\sigma} dz < +\infty$$

を満たすもの全体のつくる Hilbert 空間 $\mathcal{H}_{n,\sigma}$ を導入する。$s_1 = \sigma_1 + it_1$, $s_2 = \sigma_2 + it_2$, $0 < \sigma_1, \sigma_2 < 3$, $-\infty < t_1, t_2 < +\infty$ に対して $\mathcal{H}_{n,\sigma_1}$ 上の operator $W(s_1, s_2)$ を

$$(W(s_1, s_2)F)(z) = |z|^{s_2 - s_1} F(z), \quad F \in \mathcal{H}_{n,\sigma_1}$$

によって定義すれば, $W(s_1, s_2)$ は $\mathcal{H}_{n,\sigma_1}$ から $\mathcal{H}_{n,\sigma_2}$ の上への isometry で, $W(s_2, s_1)$ は $W(s_1, s_2)$ の inverse mapping である。さらに R^3 上の Fourier 変換を $\mathcal{F}$ で表わせば, $\mathcal{F}\mathfrak{H}_{n,\sigma} = \mathcal{H}_{n,\sigma}$ であることが分り, [4] における intertwining operator $A(s) = \mathcal{F}^{-1} W(s, 3/2) \mathcal{F}$ for $\mathrm{Re}\, s \geqq 3/2$, が成立する。これらの事と $R(g, n, s)$ の analyticity によって (3), (4) を得る。 (証明終り)

§4. G の Fourier analysis

$f\in L_1(G)$, $n\geqq 0$ half-integer, $s\in\mathbb{C}$ $1/2<\mathrm{Re}\, s<5/2$ に対して f の Fourier 変換を

$$\mathcal{F}(n,s)=\int_G f(g)R(g,n,s)\,dg$$

によって定義する。fixed n, s, $1/2<\mathrm{Re}\, s<5/2$ に対して $R(g,n,s)$ は一様有界表現であるから $\mathcal{F}(n,s)$ は well-defined で $\mathfrak{H}$ 上の bounded operator である。さらに、各 fixed n に対して $\mathcal{F}(n,s)$ は $1/2<\mathrm{Re}\, s<5/2$ において s の analytic function である。

定理 2 (Hausdorff-Young 定理) $1<p<2$, $1/p+1/q=1$, $s=\sigma+it$, $(1/p+5/q)/2<\sigma<(5/p+1/q)/2$, $\sigma\neq 3/2$ とする。そのとき、任意の $\varepsilon>0$ に対して $\delta>0$ と constant $A(p,\sigma,\varepsilon)$ が存在して

$$(4.1)\qquad \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\|\mathcal{F}(n,s)\|_q^q\,(1+|t|)^{2-4|\sigma-3/2|q-\varepsilon}\,dt\right)^{1/q}$$
$$\leqq A(p,\sigma,\varepsilon)(1+n)^{|\sigma-3/2|\tau(1+\delta)/(1-\tau)+\tau-1}\|f\|_p,$$

を満たす。ただし、$f\in S_0(G)$, G 上の compact support をもつ simple function の全体からなる集合, $\|A\|_p^p=\mathrm{tr}(|A|^p)$, $|A|=(A^*A)^{1/2}$, τ は $1/p=1-\tau/2$ によって与えられ、$0<\tau<1$ である。

(証明) 最初に定理 1 の (6) は次の様に強められる；
任意の $\delta>0$ に対して

$$\sup_{g\in G}\|R(g,n,s)\|_\infty\leqq A_{\sigma,\delta}\,(1+n)^{|\sigma-3/2|(1+\delta)}(1+|t|)^{4|\sigma-3/2|(1+\delta)}$$

また $\mathcal{F}(n,s)$ の定義によって

$$\|\mathcal{F}(n,s)\|_\infty \leqq \sup_{g\in G} \|R(g,n,s)\|_\infty \cdot \|f\|_1$$

これらの不等式から次のことを得る；

任意の $\delta>0$, $1/2<\sigma<5/2$ に対して

$$(4.2) \qquad \sup_{t\in\mathbb{R}} (1+|t|)^{-4|\sigma-3/2|(1+\delta)} \|\mathcal{F}(n,\sigma+it)\|_\infty$$
$$\leqq A_{\sigma,\delta}(1+n)^{|\sigma-3/2|(1+\delta)} \|f\|_1 , \quad f\in S_0(G)$$

が成立する。さらに G に対する Plancherel の定理 (cf. [5]) によって

$$\|f\|_2^2 \geqq \frac{1}{16\pi^2} \sum_{\substack{n\geqq 0\\ \text{half-integer}}} (2n+1) \int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathcal{F}(n,3/2+it)\|_2^2 \,[(n+1/2)^2+t^2]$$
$$\times\, t\cdot \tanh(\pi t+in)\,dt$$

故に

$$(4.3) \qquad \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathcal{F}(n,3/2+it)\|_2^2 \cdot |t|^3/(1+|t|)\,dt\right)^{1/2}$$
$$\leqq 4\pi(2n+1)^{-1}\cdot \|f\|_2$$

$(1/p+5/q)/2<\sigma<3/2$ と仮定する。α を $1/2<\alpha<\sigma<3/2$ として，(4.2) を σ の代りに α に置き換えると，

$$(4.4) \qquad \sup_{t\in\mathbb{R}} (1+|t|)^{c} \|\mathcal{F}(n,\alpha+it)\|_\infty \leqq A_{\alpha,\delta}(1+n)^{-c/4} \|f\|_1 ,$$

$c=4(\alpha-3/2)(1+\delta)$ 　α を $\sigma=\alpha(1-\tau)+3\tau/2$ に取って，(4.3) と (4.4) に定理 4 ([2], p.16) を適用する。定理 4 の notation で

$$c=4(\alpha-3/2)(1+\delta),\quad a=3/2,\quad b=-1/2$$

と取ると

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \|\mathcal{F}(n,\sigma+it)\|_q^q\,(1+|t|)^{qd}\,dt\right)^{1/q} \leqq A(\tau,\alpha,\delta,n)\,\|f\|_p$$

$f\in S_0(G)$を得る。 ここで[2]における同様の議論により,

$$qd \geq 2-4q|\sigma-3/2|-\varepsilon$$

$$A(\tau,\alpha,\delta,n)=A(p,\sigma,\delta)(1+n)^{|\sigma-3/2|\tau(1+\delta)/(1-\tau)+\tau-1}$$

が得られる。 $3/2<\sigma<(5/p+1/q)/2$ の場合にも $\mathcal{F}(n,s)=\mathcal{F}(n,3-s)$ であることを使って同様に証明される。 (証明終り)

$\Phi(s)=(\mathcal{F}(n,s)\xi,\eta)$, $\xi,\eta\in\mathfrak{h}$ に Phragmen-Lindelöf principle を適用することにより以下の系が得られる。(cf. [2])

系 2.1. 各 p, $1\leq p<2$ に対して

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\|\mathcal{F}(n,3/2+it)\|_\infty \leq A_p\|f\|_p, \quad f\in S_0(G) \tag{4.5}$$

ただし, A_p は p のみに depend する constant である。

系 2.2. 各 p, $1\leq p<2$, $(1/p+5/q)/2<\sigma<(5/p+1/q)/2$, $s=\sigma+it$ に対して,

$$\|\mathcal{F}(n,s)\|_\infty \leq A_{p,n,s}\|f\|_p, \quad f\in S_0(G) \tag{4.6}$$

次に Discrete series の表現を $D^{n,r;+}$, $D^{n,r;-}$ で表わす。ここで n,r: half-integer, $n\geq r\geq 1$, $n-r$: integer である。(cf. [6])

$$D_f^{n,r;\pm}=\int_G f(g)D_g^{n,r;\pm}dg, \quad f\in L_1(G)$$

とおく。

定理 3. $1\leq p\leq 2$, $1/p+1/q=1$ とすると,

$$\frac{1}{4\pi}\Big\{\sum_{\substack{n\geq 1\\ \text{half-integer}}}(2n+1)\sum_{\substack{n\geq r\geq 1\\ n-r;\ \text{integer}}}(2r-1)(n+r)(n-r+1)\big(\|D_f^{n,r;+}\|_q^q$$

$+\|D_f^{n,r;-}\|_q^q)\}^{1/q} \leq \|f\|_p, \quad f \in L_1(G) \cap L_p(G)$

これは定理２と同じ方法で証明される。

系 3.1. Mapping $f \mapsto D_f^{n,r;\pm}$ は L_p 全体への unique な拡張をもち，この拡張は次の不等式を満たす。

$$(4.7) \qquad \sup_{n,r;\pm} \|D_f^{n,r;\pm}\|_\infty \leq (2\pi/3)^{1-1/p} \|f\|_p, \quad 1 \leq p \leq 2$$

２つの関数 f, h に対して，それらの Convolution を

$$(f*h)(g_0) = \int_G f(g_0 g^{-1}) h(g)\, dg$$

で定義する。 (4.5), (4.7) および Hilbert 空間上の bounded operators からなる Banach 空間の一般論 (cf. [2]) を結びあわせると，計算によって次の結論を得る。

定理 4.1. (L_p convolution 定理) $f \in L_2(G)$, $h \in L_p(G)$, $1 \leq p < 2$ とする。$k = f*h$ とおくと，

$$(4.8) \qquad k \in L_2(G), \quad \|k\|_2 \leq C_p \|f\|_2 \|h\|_p,$$

ただし，C_p は f および h に independent である。すなわち L_p 関数 $(1 \leq p < 2)$ による convolution の operation は $L_2(G)$ 上の bounded operator である。

定理 4.2. $f, h \in L_2(G)$, $k = f*h$ とすると，

$$(4.9) \qquad k \in L_q(G), \quad 2 < q \leq \infty, \quad \|k\|_q \leq C_q \|f\|_2 \|h\|_2,$$

ここでC_qはfおよびnに independent である。

(4.6)における constant $A_{p,n,s}$ をさらに詳細に調べることによって次の定理を得る。(cf. [2], [3])

定理 5 (A Riemann-Lebesgue lemma) $n \geqq 0$, half-integer, $1 \leqq p < 2$, $f \in L_p(G)$ とする。そのとき, $\|\mathcal{F}(n, 3/2+it)\|_\infty$ は infinity で 0 になる。

§5. Continuous principal series の characterization

$g \mapsto U_g$ を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ における G のユニタリー表現とする。

定義. $g \mapsto U_g$ が fixed p, $p \geqq 1$ に対して extendable to $L_p(G)$ であるとは

$$\|U(f)\|_\infty \leqq A\|f\|_p, \quad f \in L_1(G) \cap L_p(G)$$

が成立することである。ただし, A は f に independent で, $U(f) = \int_G f(g)U_g\,dg$ である。

次の lemma は [2] による。

Lemma. 表現 $g \mapsto U_g$ が extendable to $L_p(G)$ であるための必要十分条件は, 任意の $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ に対してすべての matrix element $\phi(g) = (U_g\xi, \eta)$ が $L_q(G)$ に属することである。ここで $1/p + 1/q = 1$ である。

Remarks. G の正則表現は (4.8) によって $L_p(G)$, $1 \leqq p < 2$ に extendable である。再び (4.9) によって正則表現のすべて

の matrix element は $L_q(G)$, $q>2$ に属する。

すべての matrix element は $L_\infty(G)$ に属するので、matrix element が $L_{q_0}(G)$ に属するならば、それはまた $L_q(G)$, $q\geq q_0$ に属している。故に lemma によって、表現が $L_{p_0}(G)$, $p_0>1$ に extendable ならば、それはまた $L_p(G)$, $1\leq p\leq p_0$ に extendable である。

定理6. $g\mapsto U_g$ を恒等表現および Non square-integrable 表現と異なる G の既約ユニタリー表現とする。そのとき U は、(1) Continuous principal series, (2) Complementary series, (3) Discrete series, (4) Limits of Discrete series, のいずれかの表現に同値である。さらに、

(i) U が (1) または (4) の表現にユニタリー同値。

$\Leftrightarrow$ U は $L_p(G)$, $1\leq p<2$ に extendable であるが、$L_2(G)$ に extendable でない。

$\Leftrightarrow$ すべての matrix element が $L_q(G)$, $q>2$ に属するが、$L_2(G)$ に属さないものが存在する。

(ii) U が $n=0$ に対しては $3/2<\sigma<5/2$, $n\geq 1$ integer に対しては $3/2<\sigma<2$ である parameter σ に対応する (2) の表現にユニタリー同値。

$\Rightarrow$ U は $L_p(G)$, $p<4/(2\sigma-1)$ に extendable。

$\Leftrightarrow$ すべての matrix element が $L_q(G)$, $q>4/(5-2\sigma)$ に

属する。

(iii) U が (3) の表現にユニタリー同値。

$\Leftrightarrow$ U は $L_2(G)$ に extendable。

$\Leftrightarrow$ すべての matrix element が $L_2(G)$ に属する。

(証明) [1] において，G のすべての既約ユニタリー表現は恒等表現および non square-integrable 表現を除いて，(1), (2), (3), (4) のいずれかの表現にユニタリー同値であることが示されている。

(4.5) によって (1) のすべての表現は $L_p(G)$, $1 \leq p < 2$ に extendable であり，(4.7) によって (3) のすべての表現は $L_2(G)$ に extendable である。strict half-integer n に対する表現 $g \mapsto V_g^{n,3/2}$ は (4) の2つの表現の直和である。(cf. [6]) $V_g^{n,3/2}$ は $L_p(G)$, $1 \leq p < 2$ に extendable であるから，(4) のすべての表現もまた $L_p(G)$, $1 \leq p < 2$ に extendable である。最後に (4.6) によって $n=0$ に対して $3/2 < \sigma < 5/2$, $n \geq 1$ integer に対して $3/2 < \sigma < 2$ である σ に対応する (2) の表現は $L_p(G)$, $1 \leq p < 4/(2\sigma-1)$ に extendable である。

次に (1) または (4) のすべての表現が $L_2(G)$ に extendable でないことを示さなければならない。最初に (1) について考える。lemma によって，$L_2(G)$ に属さない matrix element の存在を示せば十分である。[1] によって，$t \to \infty$ のとき，

$$\phi(a_t) = (T_{a_t}^{n,s} f, f) \sim Re\left[\lambda \exp\{(-3/2 + i(\sigma - 1/4)^{1/2})t\}\right],$$

ただし，$s = 3/2 \pm i(\sigma - 1/4)^{1/2}$，$\lambda \neq 0$，$dg = 2\pi^2 \sinh^3 t\, dt\, dk\, dk'$

従って，$\phi(a_t) \notin L_2(G)$ である。(4)の表現に対しては，

$t \to \infty$ のとき，

$$\phi(a_t) \sim \lambda e^{-3t/2}$$

従って，$\phi(a_t) \notin L_2(G)$ である。　　(証明終り)

§3 の補足

Normalized principal series は次の様に定義される；

$n \geq 0$ half-integer，$Re\, s = 3/2$ に対して

$$R(g, n, s) = A(s)\, T_g^{n,s} A(3-s)\,, \quad g \in G$$

ただし，$Re\, s = 3/2$ に対しては，operator $A(s)$ は $\mathfrak{H}$ 上のユニタリー operator で $A(s)^{-1} = A(3-s)$ である。その explicit な形は

$$(A_n(s) f)(v) = \frac{1}{\gamma(s)} \int_Z |z|^{-9/2+s} f(v-z)\, dz$$

$$\gamma(s) = 2^{-3/2+s} \pi^{3/2}\, \Gamma(-3/4 + s/2) / \Gamma(9/4 - s/2)$$

である。

$R(g, n, s)$ を拡張するときに本質的に用いることは，$G_0 = VMA_+$ としたとき，

$$R(g, n, s) = T_g^{n, 3/2}, \quad g \in G_0, \quad Re\, s = 3/2$$

であること，$G=G_0\cup G_0 p G_0$ (disjoint)，および次の不等式（[7] の Theorem B_2^*）である。

$\phi(v)$, $\psi(z)$ を $\mathbb{R}^3$ 上の関数とし，$0<\gamma<3$，$1<p<\infty$，$\alpha<3/p'$，$\beta<3/q$，$\alpha+\beta\geqq 0$，$1/q=1/p+(\alpha+\beta+\gamma)/3-1$ と仮定する。$p\leqq q<\infty$ ならば，

$$\left|\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\phi(v)\psi(z)}{|v|^{\alpha}|v-z|^{\gamma}|z|^{\beta}}\,dv\,dz\right|\leqq K\|\phi\|_p\|\psi\|_{q'}$$

ただし，$1/p+1/p'=1$，$1/q+1/q'=1$，K は ϕ および ψ に independent である。

References

1 J.Dixmier: Représentations intégrables du groupe de De Sitter, Bull. Soc. Math. France, 89 (1961), 9-41.

2 R.A.Kunze and E.M.Stein: Uniformly bounded representations and harmonic analysis of the 2×2 real unimodular group, Amer. J. Math., 82 (1960), 1-62.

3 R.L.Lipsman: Uniformly bounded representations of SL(2,$\mathbb{C}$), Amer. J. Math., 91 (1969), 47-66.

4 ___________: Uniformly bounded representations of the Lorentz groups, Amer. J. Math., 91 (1969), 938-962.

5 K.Okamoto: On the Plancherel formulas for some types of simple Lie groups, Osaka J. Math., 2 (1965), 247-282.

6 R.Takahashi: Sur les représentations unitaires des groupes de Lorentz géneralisés, Bull. Soc. Math. France, 91 (1963), 289-433.

7 E.M.Stein and G.Weiss: Fractional integrals on n-dimensional Euclidean space, J. Math. and Mechanics, 7 (1958), 503-514.