数理解析研究所講究録
第190巻 1973年 97-111

賭の問題の数値計算

電総研　　戸田英雄

1. まえおき

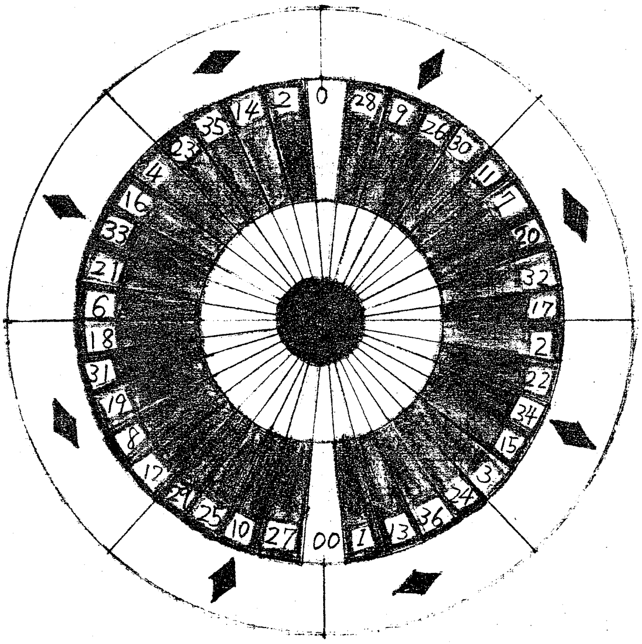
森口繁一(1963)氏のトバクの数理[1]　の中の古典的な破産の問題について，数値実験と数値計算の結果を報告する。この種の問題は，線形の差分方程式を適当な境界条件で解くため，特性方程式（2次以上の高次方程式）の根を求めるのが一つの方法であるが，パラメタを数値で与えてしまえば，連立方程式の形にして数値計算で答を求めるのは簡単である．また，このような確率の問題は，モンテカルロ法でもかなり性質がつかめるようだ．

2. 賭の問題の数値実験

ルーレットを用いる賭は，トバクの本命(?)で，オ1図のような円周を38等分し，1から36までの番号とその他に0と00があるものを用いる．0と00は緑色で1から36までの数は

，交互に赤と黒になっている．この車をまわすのと反対の方向に小さい白い玉をまわすと，この玉は最後には38区かくのどれか一つに入ってしまう．その番号と色を読み上げ勝負するわけである．

第1図　ルーレット



ルーレットを用いた賭で次のものを試みた．

(A)　1：1　の賭

これには次の6種類がある：(1)黒色　(2)赤色　(3)偶数　(4)奇数　(5)　1から18までの数　(6)19から36までの数．

たとえば，1弗を黒色にかけると，もし黒が出ればアタリで1弗貰える．もし赤か緑が出ればハズレで賭金の1弗は取られてしまう．1回の試みで，アタリの確率をp，ハズレ

の確率を q とすると，

$$p = \frac{18}{38} \quad , \quad q = \frac{20}{38}$$

である．

(A′)　1:1 の賭で，かけ金を 2 倍にする．

(B)　2:1 の賭

これには次の 6 種類がある：(1) 最初の 12 この数（1 から 12 までの数）(2) 次の 12 こ（13 から 24 までの数）
(3) 最後の 12 こ（25 から 36 までの数）
(4) 才 1 列（1, 4, 7, ‥, 34）
(5) 才 2 列（2, 5, 8, ‥, 35）
(6) 才 3 列（3, 6, 9, ‥, 36）

$p = \frac{12}{38}$，$q = \frac{26}{38}$ であるが，支払いは 2:1 でつまり 1＄かけてもアタレば 2＄貰える．ハズレは 1＄取られる．

(C)　ペテルスブルグ式のかけ

これは次のように賭ける．まず 1＄賭ける．ハズレなら 2＄かける．これもハズレなら 4＄と，‥アタリまで賭金を倍倍にする．アタレば そこで賭金をふやすのをやめて また 1＄から出なおす．このようにすれば アタリが 1 つ出るたびに，その前のアタリのときよりも所持金は 1＄増える．

たとえば，4 回ハズレて 5 回目に アタレば，

	賭け金	アタリ／ハズレ	所持金	
1回目	1 $	ハズレ	$z-1$	$= z-1$ ($)
2回目	2 $	ハズレ	$z-(1+2)$	$= z-3$ ($)
3回目	4 $	ハズレ	$z-(1+2+4)$	$= z-7$ ($)
4回目	8 $	ハズレ	$z-(1+2+4+8)$	$= z-15$ ($)
5回目	16 $	アタリ	$z-15+16$	$= z+1$ ($)

そこで，ある人が所持金 $z=10$ $ で賭を楽しんだ．所持金が15 $ 以上となれば勝，所持金が0 $ ~~（またはこれ以下）~~トル となれば破産として負とする．勝負がつけば止めて帰ることにして，このような方針で，破産する確率と勝負がつくまでの平均時間を求める．その結果は次の表−1 となる：

表−1 所持金 $z=10$ $ で破産 する確率 q_{10}

	実験値（500回）			計算値
	WIN	RUIN	$\hat{q}_{10}$	q_{10}
(A) 1：1	248	252	0.504	0.516
(A′) 1：1 かけ金2倍	251	249	0.498	0.475
(B) 2：1	290	210	0.42	0.444
(C) ペテルスブルグ はじめ1 $ から	300	200	0.40	0.399

表-2　所持金 $z=10$\$ で勝負がつくまでの回数の期待値

	実験値（500回）	計算値 D_z
(A) 1:1	49.84	51.97
(A′) 1:1 かけ金 2倍	14.89	15.33
(B) 2:1	27.77	27.82
(C) ペテルスブルグ はじめ 1\$ から	9.32	9.65

この実験から次のことが分かる。

1) 1:1 の賭で遊ぶ人の約半数は喜び，半数は悲しむ。もし同じ人が毎日こういう賭をやれば，約半分はツイテいる日となる。

2) もし賭金を倍にして 1:1 の賭をやると成功する割合は大きいが，勝負のきまり方が速すぎる。

3) 2:1 の賭では，成功する割合も比較的高いし，長い時間楽しめる。

4) ペテルスブルグ式の賭では，2:1 の賭より少し成功率は下がり，勝負の決り方が速い。

こうして見ると，私は 2:1 の賭がよいと思う。

3. 賭の問題の数値計算

確率 p でアタリ, q でハズレる ($p+q=1$) 賭で, はじめの所持金 z 中の人が, ある賭を行い, 所持金が a に達したときは勝, 0 となったら負 というゲームを続ける。このとき, 負となる確率 q_z と, ゲームの継続時間の期待値 D_z を求める. ランダム・ウォークの言葉でいえば, q_z は z から出発した1つの粒子が, 0 の壁に吸収される確率である。$p_z = 1 - q_z$ (これが成立つことは 証明されている.) は a の壁に吸収される確率である. D_z は両側の壁に吸収されるまでの平均歩行距離である.

<u>(A) 1:1 の賭</u> ([2] フェラ著 河田訳 "確率論~~入門~~とその応用 才14章 参照)

最初の賭で, ある人の所持金は $z+1$ か $z-1$ となる.

$$(A-1)\qquad \begin{cases} q_z = p\cdot q_{z+1} + q\cdot q_{z-1} & (1<z<a-1) \\ q_1 = p\, q_2 + q & \\ q_a = q\cdot q_{a-2} & \end{cases}$$

となる. 方程式を統一するため,

$$q_0 = 1,\quad q_a = 0 \qquad (境界条件)$$

とおき $\qquad q_z = p\cdot q_{z+1} + q\cdot q_{z-1} \qquad (1 \leq z \leq a-1)$

を解く. [2] によれば,

(A−2) $$q_z = \frac{(q/p)^a - (q/p)^z}{(q/p)^a - 1} \quad (p \neq q \text{ のとき})$$

(A−3) $$q_z = 1 - \frac{z}{a} \quad (p = q \text{ のとき})$$

(A−4) $$D_z = p\,D_{z+1} + q\,D_{z-1} + 1 \quad (0 \leq z \leq a)$$

$$D_0 = 0, \quad D_a = 0 \quad (\text{境界条件})$$

これは

(A−5) $$D_z = \frac{z}{q-p} - \frac{a}{q-p} \cdot \frac{1-(q/p)^z}{1-(q/p)^a} \quad (p \neq q \text{ のとき})$$

(A−6) $$D_z = z(a-z) \quad (p = q \text{ のとき})$$

(B) 2:1 の賭

q_z については次の差分方程式が成立つ.

(B−1) $$q_z = p\,q_{z+2} + q \cdot q_{z-1} \quad (1 \leq z \leq a-1).$$

ただし

(B−2) $$\begin{cases} q_0 = 1 \\ q_a = q_{a+1} = 0 \end{cases}.$$

この解は直接 (B−1) と (B−2) から連立方程式をクラーメルでといて,

(B−3) $$q_z = q^z\,P_{a-1-z} / P_{a-1},$$

ここで

(B−4) $$P_k = \sum_{j=0}^{[\frac{k}{3}]} (-)^j \binom{k-2j}{j} (q^2 p)^j$$

でもとめられる。たとえば　$a=15$ のとき

(B−5)　　$q_{10} = q^{10}(1-2q^2p)/(1-12q^2p+45(q^2p)^2 - 56(q^2p)^3 + 15(q^2p)^4)$

となる。

D_z については

(B−6)　　$D_z = pD_{z+2} + qD_{z-1} + 1 \quad (1 \leq z \leq a-1)$

たゞし

(B−7)　　$D_0 = 0, \; D_a = 0, \; D_{a+1} = 0$

$p = \frac{12}{38} = 0.3157895$ の場合　$q_z \doteqdot Q(z)$, $D_z = D(z)$ の表は，数値計算の結果，次のようになる。($a=15$)

表−3

Q(1)=	0.9566342	D(1)=	6.3715
Q(2)=	0.9109084	D(2)=	12.0545
Q(3)=	0.8626752	D(3)=	17.0098
Q(4)=	0.8118362	D(4)=	21.2011
Q(5)=	0.7581704	D(5)=	24.5795
Q(6)=	0.7016852	D(6)=	27.1157
Q(7)=	0.6418950	D(7)=	28.7327
Q(8)=	0.5793011	D(8)=	29.4442
Q(9)=	0.5123498	D(9)=	29.0696
Q(10)=	0.4436812	D(10)=	27.8192
Q(11)=	0.3672891	D(11)=	25.0913
Q(12)=	0.2948995	D(12)=	21.9436
Q(13)=	0.2017733	D(13)=	16.0140
Q(14)=	0.1380554	D(14)=	11.9570
Q(15)=	0.0000000	D(15)=	0.0000

(C) ペテルスブルグ式の賭

$$p = \frac{18}{38}, \quad q = \frac{20}{38} \quad \text{として，}$$

$q(z, s)$ を　所持金 $z^{\$}$ の人がペテルスブルグ式に $s^{\$}$ を賭けて遂に破産する確率

$D(z, s)$ を　所持金 $z^{\$}$ の人がペテルスブルグ式に $s^{\$}$ を賭けて，勝負がきまるまでの時間の期待値

とする．たゞし，$s \leq z$（倍々と賭金をふやしていく原則ではあるが，現在の所持金以上の金を賭けてはならない．）とする．

$q(z, s)$ については，次の差分方程式が成立つ．

$$(C-1)\quad \left\{\begin{array}{lll}
q(1,1) = & p \cdot q(2,1) & + q \\
q(2,1) = & p \cdot q(3,1) & + q \cdot \boxed{q(1,1)} \\
q(3,1) = & p \cdot q(4,1) & + q \cdot q(2,2) \\
q(4,1) = & p \cdot q(5,1) & + q \cdot q(3,2) \\
q(5,1) = & p \cdot q(6,1) & + q \cdot q(4,2) \\
q(6,1) = & p \cdot q(7,1) & + q \cdot q(5,2) \\
q(7,1) = & p \cdot q(8,1) & + q \cdot q(6,2) \\
q(8,1) = & p \cdot q(9,1) & + q \cdot q(7,2) \\
q(9,1) = & p \cdot q(10,1) & + q \cdot q(8,2) \\
q(10,1) = & p \cdot q(11,1) & + q \cdot q(9,2) \\
q(11,1) = & p \cdot q(12,1) & + q \cdot q(10,2) \\
q(12,1) = & p \cdot q(13,1) & + q \cdot q(11,2) \\
q(13,1) = & p \cdot q(14,1) & + q \cdot q(12,2) \\
q(14,1) = & & + q \cdot q(13,2) \\
q(2,2) = & p \cdot q(4,1) & + q \\
q(3,2) = & p \cdot q(5,1) & + q \cdot \boxed{q(1,1)} \\
q(4,2) = & p \cdot q(6,1) & + q \cdot \boxed{q(2,2)}
\end{array}\right.$$

$$\begin{aligned}
q(5,2) &= p \cdot q(7,1) + q \cdot q(3,3) \\
q(6,2) &= p \cdot q(8,1) + q \cdot q(4,4) \\
q(7,2) &= p \cdot q(9,1) + q \cdot q(5,4) \\
q(8,2) &= p \cdot q(10,1) + q \cdot q(6,4) \\
q(9,2) &= p \cdot q(11,1) + q \cdot q(7,4) \\
q(10,2) &= p \cdot q(12,1) + q \cdot q(8,4) \\
q(11,2) &= p \cdot q(13,1) + q \cdot q(9,4) \\
q(12,2) &= p \cdot q(14,1) + q \cdot q(10,4) \\
q(13,2) &= + q \cdot q(11,4) \\
q(14,2) &= + q \cdot q(12,4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q(4,4) &= p \cdot q(8,1) + q \\
q(5,4) &= p \cdot q(9,1) + q \cdot q(1,1) \\
q(6,4) &= p \cdot q(10,1) + q \cdot q(2,2) \\
q(7,4) &= p \cdot q(11,1) + q \cdot q(3,3) \\
q(8,4) &= p \cdot q(12,1) + q \cdot q(4,4) \\
q(9,4) &= p \cdot q(13,1) + q \cdot q(5,5) \\
q(10,4) &= p \cdot q(14,1) + q \cdot q(6,6) \\
q(11,4) &= + q \cdot q(7,7) \\
q(12,4) &= + q \cdot q(8,8) \\
q(13,4) &= + q \cdot q(9,8) \\
q(14,4) &= + q \cdot q(10,8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q(8,8) &= + q \\
q(9,8) &= + q \cdot q(1,1) \\
q(10,8) &= + q \cdot q(2,2) \\
q(11,8) &= + q \cdot q(3,3) \\
q(12,8) &= + q \cdot q(4,4) \\
q(13,8) &= + q \cdot q(5,5) \\
q(14,8) &= + q \cdot q(6,6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q(3,3) &= p \cdot q(6,1) + q \\
q(5,5) &= p \cdot q(10,1) + q \\
q(6,6) &= p \cdot q(12,1) + q \\
q(7,7) &= p \cdot q(14,1) + q
\end{aligned}$$

$D(z,s)$ については 次の差分方程式が成立つ.

$$
\left\{
\begin{array}{llllll}
D(1,1) & = p\cdot D(2,1) & & & & +1 \\
D(2,1) & = p\cdot D(3,1) & + & q & \cdot\boxed{D(1,1)} & +1 \\
D(3,1) & = p\cdot D(4,1) & + & q & \cdot D(2,2) & +1 \\
D(4,1) & = p\cdot D(5,1) & + & q & \cdot D(3,2) & +1 \\
D(5,1) & = p\cdot D(6,1) & + & q & \cdot D(4,2) & +1 \\
D(6,1) & = p\cdot D(7,1) & + & q & \cdot D(5,2) & +1 \\
D(7,1) & = p\cdot D(8,1) & + & q & \cdot D(6,2) & +1 \\
D(8,1) & = p\cdot D(9,1) & + & q & \cdot D(7,2) & +1 \\
D(9,1) & = p\cdot D(10,1) & + & q & \cdot D(8,2) & +1 \\
D(10,1) & = p\cdot D(11,1) & + & q & \cdot D(9,2) & +1 \\
D(11,1) & = p\cdot D(12,1) & + & q & \cdot D(10,2) & +1 \\
D(12,1) & = p\cdot D(13,1) & + & q & \cdot D(11,2) & +1 \\
D(13,1) & = p\cdot D(14,1) & + & q & \cdot D(12,2) & +1 \\
D(14,1) & = & + & q & \cdot D(13,2) & +1 \\
 & & & & & \\
D(2,2) & = p\cdot D(4,1) & & & & +1 \\
D(3,2) & = p\cdot D(5,1) & + & q & \cdot\boxed{D(1,1)} & +1 \\
D(4,2) & = p\cdot D(6,1) & + & q & \cdot\boxed{D(2,2)} & +1 \\
D(5,2) & = p\cdot D(7,1) & + & q & \cdot\boxed{D(3,3)} & +1 \\
D(6,2) & = p\cdot D(8,1) & + & q & \cdot D(4,4) & +1 \\
D(7,2) & = p\cdot D(9,1) & + & q & \cdot D(5,4) & +1 \\
D(8,2) & = p\cdot D(10,1) & + & q & \cdot D(6,4) & +1 \\
D(9,2) & = p\cdot D(11,1) & + & q & \cdot D(7,4) & +1 \\
D(10,2) & = p\cdot D(12,1) & + & q & \cdot D(8,4) & +1 \\
D(11,2) & = p\cdot D(13,1) & + & q & \cdot D(9,4) & +1 \\
D(12,2) & = p\cdot D(14,1) & + & q & \cdot D(10,4) & +1 \\
D(13,2) & = & + & q & \cdot D(11,4) & +1 \\
D(14,2) & = & + & q & \cdot D(12,4) & +1 \\
 & & & & & \\
D(4,4) & = p\cdot D(8,1) & & & & +1 \\
D(5,4) & = p\cdot D(9,1) & + & q & \cdot\boxed{D(1,1)} & +1 \\
D(6,4) & = p\cdot D(10,1) & + & q & \cdot\boxed{D(2,2)} & +1 \\
D(7,4) & = p\cdot D(11,1) & + & q & \cdot\boxed{D(3,3)} & +1 \\
D(8,4) & = p\cdot D(12,1) & + & q & \cdot\boxed{D(4,4)} & +1 \\
D(9,4) & = p\cdot D(13,1) & + & q & \cdot\boxed{D(5,5)} & +1 \\
D(10,4) & = p\cdot D(14,1) & + & q & \cdot\boxed{D(6,6)} & +1 \\
D(11,4) & = & + & q & \cdot\boxed{D(7,7)} & +1 \\
D(12,4) & = & + & q & \cdot D(8,8) & +1 \\
D(13,4) & = & + & q & \cdot D(9,8) & +1 \\
D(14,4) & = & + & q & \cdot D(10,8) & +1
\end{array}
\right.
\tag{C-2}
$$

$$
\begin{aligned}
D(8,8) &= && +1\\
D(9,8) &= && + q\cdot D(1,1) +1\\
D(10,8) &= && + q\cdot D(2,2) +1\\
D(11,8) &= && + q\cdot D(3,3) +1\\
D(12,8) &= && + q\cdot D(4,4) +1\\
D(13,8) &= && + q\cdot D(5,5) +1\\
D(14,8) &= && + q\cdot D(6,6) +1\\
D(3,3) &= p\cdot D(6,1) && +1\\
D(5,5) &= p\cdot D(10,1) && +1\\
D(6,6) &= p\cdot D(12,1) && +1\\
D(7,7) &= p\cdot D(14,1) && +1
\end{aligned}
$$

(C−1) と (C−2) を数値的に解くため，適当な初期値をいれて，Gauss-Seidel 法で 50 回反復した。その結果を表-4 と表-5 に示す。

(注) ー 1:1 の賭でかけ金を2倍にする場合 ー

p = 1回の試みでアタリの確率

q = 1回の試みでハズレの確率

z = (最初の所持金) / (1回のかけ金)

a = (目標額) / (1回のかけ金)

とする。

(A) 1:1 のかけの場合は $p=\frac{18}{38}$, $q=\frac{20}{38}$, $z=\frac{10}{1}=10$, $a=\frac{15}{1}=15$

$$
q_z = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^z}{\left(\frac{q}{p}\right)^a - 1} = \frac{\left(\frac{10}{9}\right)^{15} - \left(\frac{10}{9}\right)^{10}}{\left(\frac{10}{9}\right)^{15} - 1} = 0.516
$$

$$
D_z = \frac{z - a(1-q_z)}{q-p} = 51.97
$$

(A′) 1:1 のかけでかけ金を2倍にする場合は

$z=\frac{10}{2}=5$, $a=\frac{15}{2}=7.5$ とすればよい。

表-4 (C-1)の計算結果，ただし $R(z,s) \equiv q(z,s)$ である

K= 49

R(1,1)=	0.9566	R(1,2)=	0.5000	R(1,4)=	0.5000	R(1,8)=	0.5000
R(2,1)=	0.9085	R(2,2)=	0.9050	R(2,4)=	0.5000	R(2,8)=	0.5000
R(3,1)=	0.8549	R(3,2)=	0.8536	R(3,4)=	0.5000	R(3,8)=	0.5000
R(4,1)=	0.7994	R(4,2)=	0.7963	R(4,4)=	0.7838	R(4,8)=	0.5000
R(5,1)=	0.7391	R(5,2)=	0.7344	R(5,4)=	0.7276	R(5,8)=	0.5000
R(6,1)=	0.6755	R(6,2)=	0.6700	R(6,4)=	0.6655	R(6,8)=	0.5000
R(7,1)=	0.6101	R(7,2)=	0.6070	R(7,4)=	0.5985	R(7,8)=	0.5000
R(8,1)=	0.5436	R(8,2)=	0.5394	R(8,4)=	0.5283	R(8,8)=	0.5263
R(9,1)=	0.4731	R(9,2)=	0.4680	R(9,4)=	0.4543	R(9,8)=	0.5035
R(10,1)=	0.3993	R(10,2)=	0.3938	R(10,4)=	0.3770	R(10,8)=	0.4763
R(11,1)=	0.3231	R(11,2)=	0.3168	R(11,4)=	0.2976	R(11,8)=	0.4454
R(12,1)=	0.2444	R(12,2)=	0.2375	R(12,4)=	0.2770	R(12,8)=	0.4125
R(13,1)=	0.1640	R(13,2)=	0.1566	R(13,4)=	0.2650	R(13,8)=	0.3766
R(14,1)=	0.0824	R(14,2)=	0.1458	R(14,4)=	0.2507	R(14,8)=	0.3379

K= 50

R(1,1)=	0.9566	R(1,2)=	0.5000	R(1,4)=	0.5000	R(1,8)=	0.5000
R(2,1)=	0.9085	R(2,2)=	0.9050	R(2,4)=	0.5000	R(2,8)=	0.5000
R(3,1)=	0.8549	R(3,2)=	0.8536	R(3,4)=	0.5000	R(3,8)=	0.5000
R(4,1)=	0.7994	R(4,2)=	0.7963	R(4,4)=	0.7838	R(4,8)=	0.5000
R(5,1)=	0.7391	R(5,2)=	0.7344	R(5,4)=	0.7276	R(5,8)=	0.5000
R(6,1)=	0.6755	R(6,2)=	0.6700	R(6,4)=	0.6655	R(6,8)=	0.5000
R(7,1)=	0.6101	R(7,2)=	0.6070	R(7,4)=	0.5985	R(7,8)=	0.5000
R(8,1)=	0.5436	R(8,2)=	0.5394	R(8,4)=	0.5283	R(8,8)=	0.5263
R(9,1)=	0.4731	R(9,2)=	0.4680	R(9,4)=	0.4543	R(9,8)=	0.5035
R(10,1)=	0.3993	R(10,2)=	0.3938	R(10,4)=	0.3770	R(10,8)=	0.4763
R(11,1)=	0.3231	R(11,2)=	0.3168	R(11,4)=	0.2976	R(11,8)=	0.4454
R(12,1)=	0.2444	R(12,2)=	0.2375	R(12,4)=	0.2770	R(12,8)=	0.4125
R(13,1)=	0.1640	R(13,2)=	0.1566	R(13,4)=	0.2650	R(13,8)=	0.3766
R(14,1)=	0.0824	R(14,2)=	0.1458	R(14,4)=	0.2507	R(14,8)=	0.3379

表-5　(C-2)の計算結果

K= 49

D(1,1)=	4.924	D(1,2)=	1.000	D(1,4)=	1.000	D(1,8)=	1.000
D(2,1)=	8.283	D(2,2)=	6.490	D(2,4)=	1.000	D(2,8)=	1.000
D(3,1)=	9.905	D(3,2)=	9.291	D(3,4)=	1.000	D(3,8)=	1.000
D(4,1)=	11.589	D(4,2)=	10.121	D(4,4)=	6.643	D(4,8)=	1.000
D(5,1)=	12.032	D(5,2)=	10.204	D(5,4)=	8.799	D(5,8)=	1.000
D(6,1)=	12.045	D(6,2)=	10.139	D(6,4)=	8.988	D(6,8)=	1.000
D(7,1)=	11.979	D(7,2)=	10.839	D(7,4)=	8.340	D(7,8)=	1.000
D(8,1)=	11.913	D(8,2)=	10.303	D(8,4)=	7.420	D(8,8)=	1.000
D(9,1)=	10.995	D(9,2)=	9.200	D(9,4)=	5.905	D(9,8)=	3.591
D(10,1)=	9.652	D(10,2)=	7.829	D(10,4)=	4.057	D(10,8)=	4.416
D(11,1)=	8.044	D(11,2)=	6.080	D(11,4)=	2.048	D(11,8)=	4.529
D(12,1)=	6.173	D(12,2)=	4.127	D(12,4)=	1.526	D(12,8)=	4.496
D(13,1)=	4.164	D(13,2)=	2.078	D(13,4)=	2.890	D(13,8)=	3.933
D(14,1)=	2.094	D(14,2)=	1.803	D(14,4)=	3.324	D(14,8)=	3.065

K= 50

D(1,1)=	4.924	D(1,2)=	1.000	D(1,4)=	1.000	D(1,8)=	1.000
D(2,1)=	8.283	D(2,2)=	6.490	D(2,4)=	1.000	D(2,8)=	1.000
D(3,1)=	9.905	D(3,2)=	9.291	D(3,4)=	1.000	D(3,8)=	1.000
D(4,1)=	11.589	D(4,2)=	10.121	D(4,4)=	6.643	D(4,8)=	1.000
D(5,1)=	12.032	D(5,2)=	10.204	D(5,4)=	8.799	D(5,8)=	1.000
D(6,1)=	12.045	D(6,2)=	10.139	D(6,4)=	8.988	D(6,8)=	1.000
D(7,1)=	11.979	D(7,2)=	10.839	D(7,4)=	8.340	D(7,8)=	1.000
D(8,1)=	11.913	D(8,2)=	10.303	D(8,4)=	7.420	D(8,8)=	1.000
D(9,1)=	10.995	D(9,2)=	9.200	D(9,4)=	5.905	D(9,8)=	3.591
D(10,1)=	9.652	D(10,2)=	7.829	D(10,4)=	4.057	D(10,8)=	4.416
D(11,1)=	8.044	D(11,2)=	6.080	D(11,4)=	2.048	D(11,8)=	4.529
D(12,1)=	6.173	D(12,2)=	4.127	D(12,4)=	1.526	D(12,8)=	4.496
D(13,1)=	4.164	D(13,2)=	2.078	D(13,4)=	2.890	D(13,8)=	3.933
D(14,1)=	2.094	D(14,2)=	1.803	D(14,4)=	3.324	D(14,8)=	3.065

4. むすび

目標額を決めない賭の場合は，いままでのやり方では解けない．しかし，実際に賭をするときは，目標額は決めるのがよい。殊に，ペテルスブルグ式に賭けるときはそうである．目標額は，（所持金＋アルファ）に決めるのが，一番安全ではあるが，スリルがない．

参考文献

[1] 森口繁一（1963），トバクの数理，数理科学 8.63，12-19.

[2] フェラ著，河田龍夫他訳（1960），確率論とその応用 紀伊国屋書店，才14章

[3] H. Yanai (1967), A Generalized Method to Evaluate the Lipschitz Constant Associated with a Class of Simultaneous Operator Systems, Proceedings of the Fujihara Memorial Faculty of Engineering, KEIO University, Vol. 20 NO. 79, PP. 1〜51.

研究集会の後上記[3]の文献を頂きましたことを感謝します．