数理解析研究所講究録
第 191 巻 1973 年 27-29

三角形の辺の長さについての不等式の一般的解法。

千葉大 教養部 大関信雄

三角形の3辺の長さ a, b, c についての不等式は多く知られている。[1]. $a+b+c=s_1$, $ab+bc+ca=s_2$, $abc=s_3$ とおく. 不等式が s_1, s_2, s_3 で表わされたとき [2]

定理. $\frac{16}{5}s_2 \leqq s_1^2 < 4s_2$ のとき

$$s_3 \leqq s_1(4s_2-s_1^2)/8$$

$3s_2 \leqq s_1^2 < \frac{16}{5}s_2$ のとき $s_3 \leqq \beta$.

また $\alpha \leqq s_3$ ここに

$$\alpha, \beta = \left\{s_1(9s_2-2s_1^2) \pm 2(s_1^2-3s_2)^{\frac{3}{2}}\right\}/27$$

$$3s_2 \leqq s_1^2 < 4s_2$$

証明。 $x^3-s_1x^2+s_2x-s_3=0 \quad (s_i>0)$

(1)

が実根をもち すなわち 判別式 $D=27s_3^2-2s_1(9s_2$
$-2s_1^2)s_3+s_2^2(4s_2-s_1^2)\leqq 0$ ⋯ (1)

2根の和 > 他の1根. すなわち $s_1/2>1$根

これより $3s_2\leqq s_1^2<4s_2$.

$s_3<s_1(4s_2-s_1^2)/8$ ⋯ (2)

(1), (2)を一緒にして定理となる。

定理の適用

$\sqrt{3}\Delta\geqq 9r^2$ ⋯ (3) (3)

$(s_1/2)^2\geqq 16Rr-5r^2$ ⋯ (4)

Δは三角形の面積 R, r は外接円及び内接円の半径。

(3)は $7s_1^3-27s_1s_2+54s_3\geqq 0$

(4)は $s_1^3-5s_1s_2+18s_3\leqq 0$

(4)は 定理の $s_3\leqq s_1(4s_2-s_1^2)/8$, および $s_3\leqq\beta$ とすればよい。

$c_1s_1^3-c_2s_1s_2+54s_3\geqq 0$. $3c_1-c_2+6=0$ として. $s_3\geqq\alpha$ より $c_1=6$, $c_2=24$

(2).

(3) は $s_1(s_1^2-3s_2)+6(s_1^3-8s_1s_2+9s_3)\geqq 0$

References

[1] D. S. Mitrinović et al: Geometric Inequalities. P11 – P79

[2] G. H. Hardy et al: Inequalities P 64 Schur's Ineq.

$$x^\mu(x-y)(x-z)+y^\mu(y-z)(y-x)+z^\mu(z-x)(z-y)$$
$$=2(x^{\mu+2}+y^{\mu+2}+z^{\mu+2})-(x+y+z)(x^{\mu+1}+y^{\mu+1}+z^{\mu+1})+xyz(x^{\mu-1}+y^{\mu-1}+z^{\mu-1})\geqq 0$$
$(x,\ y,\ z,\ \mu\geqq 0)$

[3] [1] P. 71 P. 50