

Ky-Fan の不等式について

$$\prod_{i=1}^n x_i / \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^n \leq \prod_{i=1}^n (1-x_i) / \left(\sum_{i=1}^n (1-x_i)\right)^n$$

千葉大 教養部 大関 信雄

$0 < x_i \leq \frac{1}{2}$ ($i=1, 2, \dots, n$) のとき

$$\prod_{i=1}^n x_i / \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^n \leq \prod_{i=1}^n (1-x_i) / \left(\sum_{i=1}^n (1-x_i)\right)^n \quad [1]$$

は Levinson, Popoviciu 等によつて $f(x)$ に適當な条件を付けて次の様な拡張された。

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) - f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(y_i) -$$

$$- f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i\right) \quad (x_i + y_i = 2a, \quad 0 < x_i < a)$$

こゝでは、これとは別に 対称関数によつて、不等式を考へよう。

(1)

$$\sum_{i=1}^n x_i = X_1, \quad \sum_{i \neq j}^n x_i x_j = X_2, \quad \dots, \quad x_1 x_2 \dots x_n = X_n$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = Y_1, \quad \sum_{i \neq j}^n y_i y_j = Y_2, \quad \dots, \quad y_1 y_2 \dots y_n = Y_n$$

$$(X_0 = Y_0 = 1)$$

$$\sum x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots x_n^{d_n} = S_r$$

$$d_1 + \dots + d_n = r$$

$d_i = 0$ or positive integers.

$$\sum y_1^{d_1} y_2^{d_2} \dots y_n^{d_n} = T_r$$

$$d_1 + \dots + d_n = r$$

$d_i = 0$ or positive integers.

定理。 $0 < x_i \leq K \leq y_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) $0 < K < \infty$

$$(1) \quad \frac{X_r}{X_{r-1}} \leq \frac{K(n-r+1)}{r} \leq \frac{Y_r}{Y_{r-1}}$$

$$\frac{S_r}{S_{r-1}} \leq \frac{K(n-r+1)}{r} \leq \frac{T_r}{T_{r-1}}$$

(2)

$$(2) \quad 0 < x_i \leq \frac{1}{2} \quad x_i + y_i = 1 \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

$$(1) \quad \left. \begin{aligned} \frac{x_r}{x_{r-1}} + \frac{y_r}{y_{r-1}} &\leq \frac{n-r+1}{r} \\ \frac{n+r-1}{r} &\leq \frac{s_r}{s_{r-1}} + \frac{T_r}{T_{r-1}} \end{aligned} \right\} [2]$$

$$(11) \quad \left(\frac{s_2}{T_2}\right)^{\frac{1}{2}} \geq \left(\frac{s_1}{T_1}\right) = \left(\frac{x_1}{y_1}\right) \geq \left(\frac{x_2}{y_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{尚} \quad x_i + y_i = 1 \quad 0 < x_i \leq y_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

$$\frac{x_1}{y_1} \cdot \frac{x_3}{y_3} \leq \left(\frac{x_2}{y_2}\right)^2 \quad \text{あるいは}$$

$$\left(\frac{x_3}{y_3}\right)^{\frac{1}{3}} \leq \left(\frac{x_2}{y_2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{か右より左か、又は}$$

右より左ないかは残念ながら私はわかりません。
か右。後を示すための次第。

(3)

References

[1] F. Beckenbach, R. Bellman
Inequalities. p. 5

D. S. Mitrinović: Analytic Ineq.
p. 363.

[2] D. S. Mitrinović: Analytic Ineq.

[102 — 105

[1] p. 33 — p. 35

$$E_1(x) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

$$E_2(x) = \sum_{i \neq j} x_i x_j$$

$$E_n(x) = x_1 x_2 \dots x_n$$

$$\frac{E_r(x+y)}{E_{r+1}(x+y)} \geq \frac{E_r(x)}{E_{r+1}(x)} + \frac{E_r(y)}{E_{r+1}(y)}$$

(4)