

関数による平均値の比較不等式について

法政大 工 安藤 四郎

1. 関数による平均値

関数 φ が区間 I で連続で単調なとき、 I に属する n 個の数 a_1, \dots, a_n と、 $p_i > 0$, $\sum p_i = 1$ となる p_1, \dots, p_n に対し

$$M_\varphi = \varphi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^n p_i \varphi(a_i) \right\}$$

を、関数 φ による、 $\{p_i\}$ を重みとする $\{a_i\}$ の平均値という。

同じ区間 I で定義された二つの単調な連続関数 φ, ψ について、 M_φ と M_ψ を比較する次の命題はよく知られている。

([2], p. 60)

命題 φ が区間 I で単調増加(減少)で、 $\varphi \circ \varphi^{-1}$ が(狭義の)凸(凹)関数ならば、

$$M_\varphi \leq M_\psi$$

ここで、等号が成り立つのは $a_1 = \dots = a_n$ の場合に限る。

2. 比較判定関数

関数 φ, ψ が2回微分可能で、1階導関数が定符号ならば、条件をもう少し使いやすい形で表わすことができる。 φ に、

$$\varphi^*(x) = \frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)}$$

で定義される比較判定関数 φ^* を対応させる。このとき、

定理 区間 I で $\varphi^* < \psi^*$ ならば、 $M_\varphi \leq M_\psi$ 。

ここで、等号が成り立つのは $a_1 = \dots = a_n$ の場合に限る。

報告者ははじめ、 φ を $\Phi = a\varphi + b$ に変えても M_φ および φ^* が変わらないことから、 $x = M_\psi$ の点で接する Φ と ψ を比較して直接定理を得たが、

$$\chi(x) = (\psi \circ \varphi^{-1})(x), \quad \varphi^{-1}(x) = t$$

とおくと、

$$\chi''(x) = \frac{\dot{\psi}(t)}{\dot{\varphi}(t)^2} \left\{ \frac{\ddot{\psi}(t)}{\dot{\psi}(t)} - \frac{\ddot{\varphi}(t)}{\dot{\varphi}(t)} \right\}$$

となるから、前の命題から直ちに定理が得られる。

このように、この定理は前の命題の言いかえに過ぎないが、 φ^* は比較する相手に関係なく求められるので、この形の方が便利だと思う。

3. 応用例

ここで, $p_1 = \dots = p_n$ とし, 不等式を導く例を示す.

例1 $\varphi(x) = \log x$, $\psi(x) = \log(1+x)$ ($x > 0$)

のとき, $\varphi^*(x) = -\frac{1}{x} < -\frac{1}{1+x} = \psi^*(x)$ だから,

$a_i > 0$ に対し, 次の関係が成り立つ.

$$M_\varphi = \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leq M_\psi = \sqrt[n]{(1+a_1) \dots (1+a_n)} - 1$$

$$(1+a_1) \dots (1+a_n) \geq (1 + \sqrt[n]{a_1 \dots a_n})^n$$

例2 $\varphi(x) = \log x$, $\psi(x) = \frac{x}{1+x}$ ($0 < x < 1$)

のとき, $\varphi^*(x) = -\frac{1}{x} < -\frac{2}{1+x} = \psi^*(x)$ となる.

$0 < c_i < \frac{1}{2}$ ($i = 1, \dots, n$) に対し, $a_i = \frac{c_i}{1-c_i}$

とおくと, $0 < a_i < 1$. よって,

$$M_\varphi = \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} = \sqrt[n]{\frac{\prod c_i}{\prod (1-c_i)}} \leq M_\psi = \frac{\sum c_i}{\sum (1-c_i)}$$

これから, 次の Ky Fan の不等式 ([1], p.60) を得る.

$$\frac{\prod c_i}{(\sum c_i)^n} \leq \frac{\prod (1-c_i)}{(\sum (1-c_i))^n}$$

文献 [1] 大関信雄, 青柳雅計: 不等式 (昭42) 槇書店

[2] 渡部隆一: 不等式入門 (1969) 森北出版

[3] 安藤四郎: 平均値概念の定式化について (1968)
芝浦工大研究報告 16