数理解析研究所講究録
第 192 巻 1973 年 398-408

Fourier 変換の擬局所性について

東大 教養　内山康一

佐藤の超函数において重要な層 $\mathcal{C}$ に対応する層を Distribution の場合に Fourier 変換を用いて構成することを目的とする．すなわち，cosphere bundle $\pi : S^*\Omega \longrightarrow \Omega$ に対して，$\mathcal{D}'(\Omega)/\mathcal{E}(\Omega) \cong \pi_* \mathcal{M}(\Omega)$ *) $\cong \Gamma(S^*\Omega, \mathcal{M})$ となる層 $\mathcal{M}$ を作る。応用上は $\mathcal{M}$ の section の台（singular support S-S）が重要であり，Hörmander は直接これを（wave front set）構成した。

記号を導入しておく．$\tilde{\Sigma}$ を R^n_ξ における原点 0 を頂点とする錐体とする．$\Sigma = \tilde{\Sigma}\text{-}0/R^+$ とおき R^n_ξ 中の単位球 S^{n-1} と同一視する。

次の関数空間を導入する．（Hörmander [1],[2]）

$$
H^{s,\infty}_{loc}(\Omega \times \Sigma) = \Big\{ u \in H^s_{loc}(\Omega) \; ; \; \forall (x_0, \xi_0) \in \Omega \times \Sigma \quad \exists \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \ \text{s.t.}
$$

$$
(1) \quad \varphi(x_0) \neq 0
$$

$$
(2) \quad \forall N, \ |\widehat{\varphi u}(\xi)| \le \frac{C_N}{(1+|\xi|)^N} \; ; \ \xi \text{ は } \xi_0 \text{ の近く} \Big\}
$$

*) $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$ の記号は $\mathcal{D}/\mathcal{a}$ 用に保留しておく．藤原 [3]．

ここで Ω は $\mathbb{R}^n_x$ の開集合．Σ は S^{n-1} の（開）集合．(2) の ξ_0 の近くで成立するという意味は ξ_0 を内部に含む錐体が存在してそこで成立することである。

$H^{s,\infty}_{loc}(\Omega\times\Sigma)$ は $H^\infty(\Omega\times\Sigma)$ と略記もする．

$H^{s,\infty}_{loc}(\Omega\times S^{n-1}) = C^\infty(\Omega)$ は明らかであろう。（以下の補題から従う．）

定義中に現われた局所的条件を少しいいかえておこう．

補題 1.　$u\in\mathcal{E}'(\Omega)$ に対して急減少評価

$$(*)\ {}^\forall N,\ |\hat{u}(\xi)| \le C_N/(|\xi|+1)^N$$

が ξ_0 の近傍 σ_{ξ_0} で成立しているとせよ．任意の $\alpha\in C_0^\infty(\Omega)$ に対し，$\widehat{\alpha u}$ について評価 (*) が σ_{ξ_0} を少しちぢめた近傍 $\sigma'_{\xi_0}\subset\subset\sigma_{\xi_0}$ で成立する．

(証明)　$|\widehat{\alpha u}(\xi)| = |\hat{\alpha}*\hat{u}(\xi)|$

$$\le \int_{\sigma_{\xi_0}} |\hat{\alpha}(\xi-\eta)||\hat{u}(\eta)|d\eta + \int_{R^n\setminus\sigma_{\xi_0}} |\hat{\alpha}(\xi-\eta)||\hat{u}(\eta)|d\eta$$

$$|\hat{\alpha}(\xi-\eta)| \le C_M/(1+|\xi-\eta|)^M,\quad M=1,2,\cdots$$

$$\le C_M(1+|\xi|)^M/(1+|\eta|)^M,\quad C_M(1+|\eta|)^M/(1+|\xi|)^M$$

および，$1+|\xi-\eta| \geqq 1+\varepsilon|\xi|,\ 1+\varepsilon|\eta|$ から従う．

$\xi\in\sigma'_{\xi_0},\quad \eta\in\sigma_{\xi_0}$　(∴)

補題2. $\Omega \subset \mathbb{R}^n_x$, $\Sigma \subset S^{n-1}$ をそれぞれ開集合とする. $u \in H^{s,\infty}_{loc}(\Omega \times \Sigma)$ とする. compact 集合 $K \subset \Omega$ と $\kappa \subset \Sigma$ に対して次のような $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ が存在する. (1) φ は K の近傍で恒等的に 1. $(\varphi \geqq 0)$.

(2) $\forall N$, $|\widehat{\varphi u}(\xi)| \leqq C_N/(|\xi|+1)^N$, $\xi \in \tilde{\kappa}$.

(証明) (I). $x_0 \in K$ を固定する. $u \in H^\infty(\Omega \times \Sigma)$ だから各 $\xi \in \kappa$ に対し φ_ξ が存在して ξ の近傍 σ_ξ で $\widehat{\varphi_\xi u}$ が急減少である。$\bigcup_{\xi \in \kappa} \sigma_\xi \supset \kappa$ で κ は compact だから有限被覆 $\sigma_1, \cdots, \sigma_N$ と $\varphi_1, \cdots, \varphi_N \in C_0^\infty(\Omega)$ が存在して (1) $\varphi_i(x_0) \neq 0$, (2) $\widehat{\varphi_i u}$ は σ_i で急減少である。$\varphi = \varphi_1 \cdots \varphi_N$ とせよ. $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ で $\varphi(x_0) \neq 0$. 一方、少しちぢめた近傍 $\exists \sigma_1' \Subset \sigma_1, \cdots, \exists \sigma_N' \Subset \sigma_N$ があって $\bigcup \sigma_i' \supset \kappa$ としてよい. $\widehat{\varphi u} = \widehat{\varphi_1 \cdots \varphi_N u} = \widehat{(\varphi_2 \cdots \varphi_N)\varphi_1 u}$. 補題1からこれは σ_1' で急減少. σ_2' 以下同様であるから κ で急減少である。

(II) まず (I) の φ は $\varphi \geqq 0$ としてよい. x_0 を動かせば各 $x \in K$ に対し、φ_x と近傍 U_x が存在して、(1) $\varphi_x \in C_0^\infty(\Omega)$, φ_x は U_x で正. (2) $\widehat{\varphi_x u}$ は κ で急減少。K も compact であるから, $\bigcup_{x \in K} U_x \supset K$ から $\bigcup_{i=1}^N U_i \supset K$ と $\varphi_1, \cdots, \varphi_N$ をえらべる. $\varphi_i > 0$ in U_i だから $\varphi = \varphi_1 + \cdots + \varphi_N$ とすれば $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi > 0$

in K かつ $\widehat{\varphi u}$ は K で急減少.

(III) $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ を K 上で $\varphi^{-1}(x)$ に等しいものとせよ. ψ と φ の積を改めて φ とすれば これが求めるものである. ($\therefore$)

定義 $$M^s(\Omega\times\Sigma) = H^s_{loc}(\Omega) \big/ H^{s,\infty}_{loc}(\Omega\times\Sigma).$$

$H^s_{loc}(\Omega)$ の元 u の $M^s(\Omega\times\Sigma)$ における商を $[u]$, $[u]_\Sigma$ などと記す. $X \subset \mathbb{R}^n_x$ 領域に対し, $X\times S^{n-1}$ (X の余球接束) 故の基本近傍系として $\{\Omega\times\Sigma\}$ がとれる。

$\Omega\times\Sigma \longmapsto M^s(\Omega\times\Sigma)$ は presheaf を作る。同伴する $X\times S^{n-1}$ 上の層を $\mathcal{M}^s$ とする.

i.e. $$\mathcal{M}^s = \varinjlim_{\Omega\times\Sigma} M^s(\Omega\times\Sigma).$$

中間的なものとしてΩを固定して,
$$\mathcal{M}^s(\Omega) = \varinjlim_{\Sigma\subset S^{n-1}} M^s(\Omega\times\Sigma)$$
を考える. これは S^{n-1} 上の層である。

<u>命題</u>. sections の同型
$$\Gamma(S^{n-1}, \mathcal{M}^s(\Omega)) \cong H^s_{loc}(\Omega)/\mathcal{E}(\Omega).$$
が成立する.

(証明) (I) 対応を構成する. $f_\Sigma: H^s_{loc}(\Omega)/\mathcal{E}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{M}^s(\Omega \times \Sigma)$ は $H^s_{loc}(\Omega)/\mathcal{E}(\Omega) \ni [u]$ に対して商 $[u]_\Sigma$ を対応させればよい. つまり, covering $\cup \Sigma_i = S^{n-1}$ に対して, $\{[u]_{\Sigma_i}\}$ は $\mathcal{M}^s(\Omega)$ の section を定める.

逆 $\Gamma(S^{n-1}, \mathcal{M}^s(\Omega)) \ni m \longmapsto g(m) \in H^s_{loc}(\Omega)/\mathcal{E}(\Omega)$ を構成しよう。 m は十分細かい covering $\bigcup_{i=1}^{N} \Sigma_i \supset S^{n-1}$ に対して, $\{u_i \in H^s_{loc}(\Omega) \ ; \ u_i - u_j \in H^\infty(\Omega \times \Sigma_{ij})\}$ という組と同値である。 $(\Sigma_{ij} = \Sigma_i \cap \Sigma_j)$.

$\Omega \supset K$ compact とする。K の近傍で 1 に等しい $\varphi_K \in C_0^\infty(\Omega)$ があって $\widehat{\varphi_K(u_i - u_j)}$ は Σ'_{ij} で急減少。

$\{\Sigma_i\}$ に同伴する 1 の分解を $\beta_i(\xi)$ とする。(i.e. $\beta_i \in C^\infty$, $\beta_i(t\xi) = \beta_i(\xi)$ $|\xi| \gg 1$, $\operatorname{supp} \beta_i(\xi) \cap \{|\xi| \gg 1\} \subset \tilde{\Sigma}_i$, $\sum \beta_i(\xi) \equiv 1$ $(|\xi| \gg 1)$).

いま compact $L \supset K$ ならば $u_L - u_K \in \mathcal{E}(\mathring{K})$ を示そう. $\widehat{(u_K - u_L)} = \sum \beta_i(\xi) \widehat{(\varphi_K - \varphi_L) u_i}(\xi)$. β_i を 0 階の ΨDO とみれば $\varphi_K - \varphi_L \equiv 0$ in $\mathring{K}$ から $u_K - u_L \in \mathcal{E}(\mathring{K})$ が従う. u_K を定めるときの $\{u_i, \Sigma_i\}$ のえらび方, 1 の分解 β_i のえらび方による任意性は K の内部では $\mathcal{E}$ に吸収される。従って $K \longmapsto u_K$ によって $H^s_{loc}(\Omega)/\mathcal{E}(\Omega)$ の元が定まることがわかる。この対応を g とする.

(II) 次に $\Gamma(S^{n-1}, \mathcal{M}^s(\Omega)) \underset{f}{\overset{g}{\rightleftarrows}} H^s_{loc}(\Omega)/\mathcal{E}(\Omega)$

において $f\circ g = id.$, $g\circ f = id.$ を示そう。

$H^s_{loc}(\Omega)/\mathcal{E}(\Omega) \ni [u]$ $\quad f_\Sigma[u] = [u]_\Sigma \in M^s(\Omega\times\Sigma)$.

$g\circ f[u] \quad \longleftrightarrow \quad K \longmapsto v_K = \mathcal{F}^{-1}\Sigma\beta_i\widehat{\varphi_K u}$

$= \varphi_K u. \quad \therefore u = v$

代表元のとり方は $\mathcal{E}(\Omega)$ に吸収されて考えなくてよい。ゆえに $g\circ f = id$ in $H^s_{loc}(\Omega)/\mathcal{E}(\Omega)$.

逆に、$\Gamma(S^{n-1}, \mathcal{M}^s(\Omega)) \ni m \leftrightarrow \{[u_i]_{\Sigma_i} \in M^s(\Omega\times\Sigma_i)\}$ に対して $f\circ g(m) = u$ とおく。$u - u_i \in H^\infty(\Omega\times\Sigma_i)$ を示せば十分である。つまり $\forall(x_0, \xi_0) \in \Omega\times\Sigma_{i_0}$ に対し、$\varphi(x_0) \neq 0$ かつ $\widehat{\varphi(u-u_i)}$ が ξ_0 の近くで急減少となる $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ をみつければよい。実は何でもよい。$\varphi(x_0) \neq 0$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ とする。$K = supp\,\varphi$ とする。φu を考えるのには $u_K = \mathcal{F}^{-1}\Sigma\beta_j\widehat{\varphi_K u_j}$ でよい。従って

$$\widehat{\varphi(u-u_{i_0})} = \hat{\varphi} * \Sigma\beta_j\widehat{\varphi_K(u_j - u_{i_0})}$$

右辺 $\underset{(\Sigma\cdots は)}{、}$ $\xi_0 \in \Sigma_{i_0}$ の近くで急減少ゆえ補題1から全体が急減少。ゆえに $f\circ g = id.$ in $\Gamma(S^{n-1}, \mathcal{M}^s(\Omega))$.

<u>定理1</u>. $\Gamma(\Omega\times S^{n-1}, \mathcal{M}^s) \cong H^s_{loc}(\Omega)/\mathcal{E}(\Omega)$.

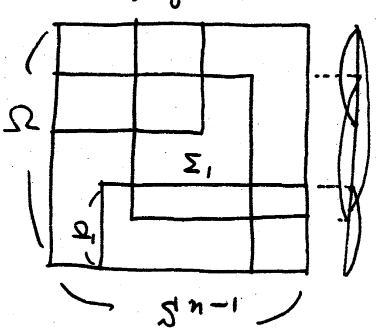
(証明). $\Gamma(\Omega, \varinjlim_{\Omega'\subset\Omega} H^s_{loc}(\Omega')/\mathcal{E}(\Omega')) = H^s_{loc}(\Omega)/\mathcal{E}(\Omega)$

は $H^1(\Omega, \mathcal{E}) = 0$ から従う。

(I) 対応の構成. $H^s_{loc}(\Omega)/\mathcal{E}(\Omega) \ni [u] \longmapsto [u]_{\Omega'\times\Sigma} \in H^s_{loc}(\Omega')/H^\infty(\Omega'\times\Sigma)$ は制限と商によって定まる。

$\{[u]_{\Omega_i\times\Sigma_i}\ ;\ \bigcup \Omega_i\times\Sigma_i \supset \Omega\times S^{n-1}\}$ は $\Omega\times S^{n-1}$ 上の $\mathcal{M}^s$ の section を定める. これを $f: H^s_{loc}(\Omega)/\mathcal{E}(\Omega)\to \Gamma(\Omega\times S^{n-1},\mathcal{M}^s)$ とする. 逆を定めよう.

$\Gamma(\Omega\times S^{n-1},\mathcal{M}^s)\ni m$ はある loc. finite な open covering $\bigcup\Omega_i\times\Sigma_i = \Omega\times S^{n-1}$ と, $\{u_i\in H^s_{loc}(\Omega_i)\ ;\ u_i-u_j\in H^{s,\infty}_{loc}(\Omega_{ij}\times\Sigma_{ij})\}$ という組によって表現される. これをまずとり直そう. 有限添字集合 $S_x=\{j\ ;\ \Omega_j\ni x\}\subset \mathbf{N}=\{1,2,\cdots\}$ を定義すると, $\{\bigcap_{S_x\ni j}\Omega_j\ ,\ x\in\Omega\}$ は $\{\Omega_i\}$ の細分である. 添字 x は多すぎる. $S_1, S_2, \cdots$ と番号づけられる。すなわち $\{\bigcap_{S_i\ni j}\Omega_j\ ,\ i=1,2,\cdots\}=\{\Omega'_i\ ;\ i=1,2,\cdots\}$ とする。



このとき各 i について

$$\bigcup_{S_i\ni l}\Sigma_l = S^{n-1}$$

である。S_i の中からひとつ $l(i)\in S_i$ を指定しておく.

$\Omega\times S^{n-1}$ の covering として,

$\{\Omega'_j\times\Sigma_l\ ;\ j=1,2,\dots,\ \ l\in S_j\}$ がとれる.

u_l, $l\in S_j$ を Ω'_j に制限して $\{u_l\in H^s_{loc}(\Omega'_j)\}$ を考えれば $u_l-u_{l'}\in H^\infty(\Omega'_{jj'}\times\Sigma_{ll'})$, $l'\in S_{j'}$.

これは m の別の表現である。

まず $\{u_\ell \in H^s_{loc}(\Omega'_j)\}_{\ell\in S_j}$ で各 j ごとに命題の証明の方法に従ってはりあわせて $\{U_j \in H^s_{loc}(\Omega'_j)/\mathcal{E}(\Omega'_j)\}$ を得る。U_j, U_k の Ω'_{jk}上の差をしらべよう。$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega'_{jk})$ に対し、$\mathrm{supp}\,\varphi = K$ とおくと、

$$\varphi(U_j - U_k) = \varphi\cdot\mathcal{F}^{-1}\Big\{\sum_{\ell\in S_j}\beta_\ell(\xi)\widehat{\varphi_K u_\ell} - \sum_{\ell'\in S_k}\beta_{\ell'}\widehat{\varphi_K u_{\ell'}}\Big\}$$

が mod $C^\infty(\Omega'_{jk})$ で成立する。

$\widehat{\varphi_K(u_\ell - u_{\ell'})}$ は $\Sigma_{\ell\ell'}$ の内部で急減少であることに注意すれば $\varphi(U_j - U_k) \in C^\infty(\Omega'_{jk})$ がわかる。(右辺で coverings $\{\Sigma_\ell, \ell\in S_j\}$, $\{\Sigma_{\ell'}, \ell'\in S_k\}$ の共通細分を考えよ)

これで $g:\quad \Gamma(S^{n-1}\times\Omega, \mathcal{M}^s) \longrightarrow H^s_{loc}(\Omega)/\mathcal{E}(\Omega)$ が定まった。

(II) $f\circ g = id$, $g\circ f = id$. を示そう。

$g\circ f = id$. は容易である(命題の証明)。$f\circ g = id$. については以下の通り。$\Gamma(\Omega\times S^{n-1}, \mathcal{M}^s) \ni m \longleftrightarrow$

$\{u_i \in H^s_{loc}(\Omega_i)\ \ s.t.\ \ u_i - u_j \in H^\infty(\Omega_{ij}\times\Sigma_{ij})\}$

$\longleftrightarrow \{u_\ell \in H^s_{loc}(\Omega'_j)\ \ s.t.\ \ u_\ell - u_{\ell'} \in H^\infty(\Omega'_{jj'}\times\Sigma_{\ell\ell'})\}$

$\xrightarrow{g} \{U_j \in H^s_{loc}(\Omega'_j)/\mathcal{E}(\Omega'_j)\} = U \in H^s_{loc}(\Omega)/\mathcal{E}(\Omega)$.

従って $[U]_{\Omega_i\times\Sigma_i} - u_i \in H^\infty(\Omega_i\times\Sigma_i)$

$\quad\Leftrightarrows [U]_{\Omega'_j\times\Sigma_\ell} - u_\ell \in H^\infty(\Omega'_j\times\Sigma_\ell)$

をみればよい。$U = \{U_j\}$ より $[U_j]_{\Omega'_j\times\Sigma_\ell} - u_\ell \in H^\infty(\Omega'_j\times\Sigma_\ell)$

に同値でこれは命題ですんでいる。 (∴)

定理2. 層 $\mathcal{M}^s$ は柔軟(soft)である。

(証明) $K \subset \Omega \times S^{n-1}$ を閉集合とする。 任意に $m \in \Gamma(K, \mathcal{M}^s)$ を考える。これは loc. finite open covering $K \subset \bigcup_i (\Omega_i \times \Sigma_i)$ が存在して $u_i \in H^s_{loc}(\Omega_i)$, $u_i - u_j \in H^\infty(\Omega_{ij} \times \Sigma_{ij})$ となる組 $\{u_i\}$ によって表現される。

(I) $\forall i, \Omega_i = U$ となっている場合.

K の S^{n-1} への射影を κ とする。 $\kappa \subset \bigcup \Sigma_i$.

ここで $\beta_i \in C^\infty(R^n_\xi)$ をえらんで, $supp\, \beta_i$ は $|\xi|$ が十分大きいとき $\tilde{\Sigma}_i$ に属し, かつ $\sum \beta_i(\xi) = 1$ が κ の近傍で成立させられる。

$$\tilde{u} = \mathcal{F}^{-1}\left(\sum \beta_i(\xi)\, \widehat{\varphi_{\pi K} u_i}\right)$$

とおく. πK は K の U への射影. $f(\tilde{u})$ は はじめの m の拡張である。なぜなら,

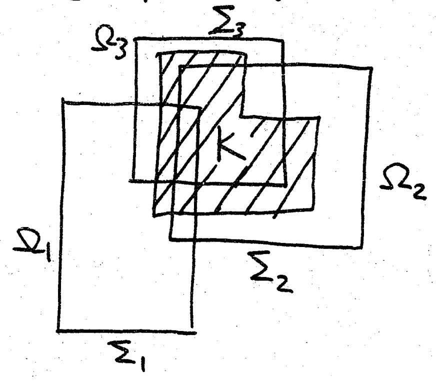
$f(\tilde{u}) \longleftrightarrow \{[\tilde{u}]_{U \times \Sigma_i}\}$ だから, $\forall (x,\xi) \in K$ に対し $\exists U_x, \exists \Sigma_\xi$, $[\tilde{u}]_{U_x \times \Sigma_\xi} - u_i \in H^\infty(U_x \times \Sigma_\xi)$ をみればよく, U_x としては $\varphi_{\pi K}$ が恒等的に1である範囲にとればよい。 $\varphi \in C_0^\infty(U_x)$ に対し, $\widehat{\varphi(\tilde{u} - u_i)} =$

$$\widehat{\varphi(\tilde{u} - \varphi_{\pi K} u_i)} = \hat{\varphi} * \sum_j \beta_j\, \widehat{\varphi_{\pi K}(u_j - u_i)} + \hat{\varphi} * (1 - \sum \beta_j)\, \widehat{\varphi_{\pi K} u_i}$$

これは Σ_ξ で急減少．（ここで $(x, \xi) \in U \times \Sigma_i$ ）．

(III) 一般の場合．

定理1の証明と同様に coveringをとり直す．従って



$\Gamma(K, \mathcal{M}^s) \ni u$

$\longleftrightarrow \{u_\ell \in H^s_{loc}(\Omega_j') \,;\, S_j \ni \ell$

かつ

$u_\ell - u_{\ell'} \in H^\infty(\Omega_{jj'}' \times \Sigma_{\ell\ell'})$

$K \subset \bigcup_{\substack{j \\ \ell \in S_j}} \Omega_j' \times \Sigma_\ell \}$

としてよい．πK の近傍で有効な $\{\Omega_j'\}$ に属する1の分解を $\alpha_j(x)$, $\bigcup_{\ell \in S_j} \{K \cap (\Omega_j' \times \Sigma_\ell)$ の S^{n-1} への射影$\}$ の近傍で有効な1の分解を $\{\beta_{j\ell}\}_\ell$ とする．$\mathrm{supp}\, \alpha_j$ の近傍で1である $\psi_j \in C_0^\infty(\Omega_j')$ をとり，

$$u = \sum_j \alpha_j \mathcal{F}^{-1}\Big(\sum_{\ell \in S_j} \beta_{j\ell}(\xi)\, \widehat{\psi_j u_\ell}(\xi)\Big)$$

とおく．まず $u \in H^s_{loc}(\Omega)$．

次に $\forall (x_0, \xi_0) \in K$ に対し，$(x_0, \xi_0) \in \Omega_j' \times \Sigma_\ell$．

$\sum \alpha_j$ が1に等しい所の内部に台をもつ $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_j')$, $\varphi(x_0) \neq 0$ をとる．$\widehat{\varphi(u - u_\ell)} = \sum_{\substack{j \\ (\text{有限})}} \widehat{\varphi\alpha_j} * \Big(\sum_{\ell' \in S_j} \beta_{j\ell'} \widehat{\psi_j u_{\ell'}}$

$- \widehat{\psi_j u_\ell}\Big)$ ξ_0 の近傍に限ってみれば

$= \sum_j \widehat{\varphi\alpha_j} * \sum \beta_{j\ell'} \widehat{\psi_j(u_{\ell'} - u_\ell)}$ これはそこで急減少．(∵)

$\mathcal{D}'/\mathcal{A}$ について．　$\mathcal{D}'(\Omega) \supset \mathcal{A}(\Omega)$ の特長づけを Fourier 変換の増大度によって行っても，その ξ 方向での局所化と合成に困難があって，このような方法だけでおし通せるかどうか不明である．（藤原 [3] の試みがあった．）

[1] Hörmander : C.P.A.M. 1971. 671−704 p.

[2] 〃　Acta. Math. 1971. とくに 119〜133 p.

[3] 藤原．1972 超函数シンポジウム．6月，および 1972，6月 東大．小松セミナー